Reflexão sobre a geometria [II][1]

Eduardo Veloso

Conforme previsto na parte I desta «reflexão sobre a geometria», iremos tentar responder agora ao mesmo tipo de questões que enunciámos no primeiro artigo — o que fazem os geómetras, de que problemas se ocupam, que métodos usam para resolver esses problemas ou para provar as suas afirmações? —, mas tomando agora como ponto de partida, em lugar das construções geométricas, as transformações geométricas. Para poder mostrar de início a riqueza e diversidade deste tema, não vamos de imediato impor uma definição de transformação geométrica, mas sim apresentar alguns exemplos de transformações geométricas e a sua utilização na resolução de problemas ou demonstração de resultados, deixando as sistematizações para mais à frente neste artigo.

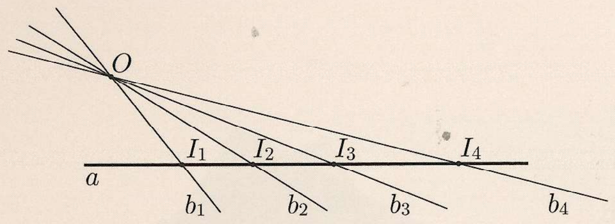
Projecção central

Consideremos dois planos, α e β, não paralelos[2], e um ponto O exterior aos dois planos (figura 1). Podemos «em geral» fazer corresponder, a cada ponto P de α, um ponto P' de β, da seguinte forma: consideramos a recta PO e a sua intersecção com o plano β, e designamos esse ponto por P' (na figura, apenas está representado o segmento PP'). Diremos então que a correspondência $P \to P'$, assim estabelecida, é uma projecção central de α «sobre» β, com centro no ponto O e que P' será a imagem de P por meio desta projecção central. Trata-se de um primeiro exemplo de transformação geométrica. Naturalmente, da mesma forma podemos considerar a transformação geométrica inversa, ou seja a que faz corresponder a cada ponto Q' de β um ponto Q de α.

Escrevemos «em geral» e «sobre» entre aspas para fazer notar o seguinte:

- existem pontos em α que não têm imagem em β, basta que a recta PO resulte paralela a β;
- pela mesma razão, a aplicação $P \to P'$ não é sobre, ou seja existem pontos em β que não são imagem de nenhum ponto de α.

Para que a projecção central seja uma verdadeira bijecção de α sobre β, juntamos aos «habituais» pontos da geometria euclidiana um novo conjunto de pontos que intuitivamente designamos por *pontos no infinito*. Neste processo, característico do trabalho em geometria, deixamo-nos conduzir ao mesmo tempo pela intuição geométrica e pela regra fundamental de trabalhar com os conceitos primitivos da cada teoria exclusivamente de acordo com as regras (axiomas) que fixámos de início e não com as nossas intuições avulsas (v. caixa *Elementos impróprios*).



Na figura, uma recta b roda em torno do ponto O, tomando as sucessivas posições b_1, b_2, b_3, ... A sua interseção com a é sucessivamente I_1, I_2, I_3, ... e intuitivamente podemos considerar que essa intersecção se afasta indefinidamente e que quando a recta b ficar paralela a a essa intersecção é um *ponto no infinito* da recta a (e também da recta b, obviamente); assim, ao conjunto dos pontos «habituais» de cada recta (a que é costume chamar pontos *próprios*) iremos acrescentar um novo ponto (o *ponto no infinito*, que é costume designar por ponto impróprio). Ao mesmo tempo, ao conjunto dos pontos próprios e das rectas «habituais» de um plano α, iremos acrescentar os pontos impróprios de todas as rectas de α, a cujo conjunto chamaremos *recta do infinito* do plano α.

Ocorre perguntar: porquê apenas um ponto impróprio, e não dois — um para «cada lado» da recta? Porque razão chamamos ao conjunto dos pontos impróprios de um plano *recta* (do infinito)? A resposta é simples: porque queremos que as regras que geriam as relações entre os antigos pontos, rectas e planos se mantenham em relação aos novos conceitos (ampliados):

- *Dois pontos A e B definem uma recta*

  Se um dos pontos (por exemplo A) é impróprio (por exemplo da recta a), a recta definida por A e B é a recta que passa por B e é paralela a a. Se os dois pontos A e B são impróprios e distintos, então são os pontos do infinito de duas rectas não paralelas a e b e a recta AB é a recta do infinito de um plano definido por um ponto qualquer do espaço e duas rectas passando por esse ponto e paralelas a a e a b.

  Nota: se uma recta tivesse dois pontos impróprios, esses dois pontos determinavam não uma recta mas um feixe de rectas paralelas.

- *Duas rectas definem um ponto (a sua intersecção)*

  O caso das duas rectas serem paralelas não é agora excepção, o ponto que definem é o ponto impróprio de ambas. Os pontos impróprios de um plano podem ser associados aos feixes de rectas paralelas (ou seja, às *direcções*) desse plano.

- *Dois planos definem uma recta (a sua intersecção).*

  Dois planos paralelos definem a recta imprópria comum a ambos.

  Quanto ao conjunto de todos os pontos impróprios do espaço. convenciona-se que formam um plano, o *plano do infinito*. O leitor poderá constatar, pensando um pouco, que esta convenção, embora com uma origem não tanto intuitiva como as anteriores, continua a preservar, e mesmo simplificar, as relações entre (a nova totalidade) de objectos (pontos, rectas e planos) do espaço.

No que se segue, como não trataremos de modo formal as questões que vamos abordar, manteremos as notações habituais para as rectas (minúsculas em itálico) e para os planos (letras gregas minúsculas), apesar de incluirem sempre, tal como o espaço, os elementos impróprios.[3]

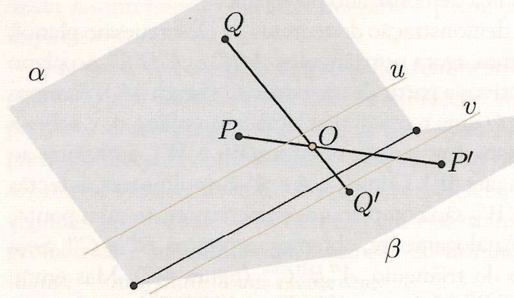


Figura 1

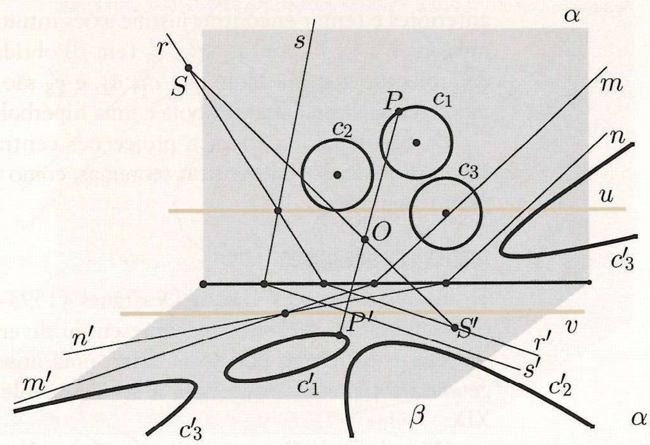


Figura 2

Neste artigo, as rectas, planos e o espaço que consideramos estão sempre ampliados com os pontos impróprios.

Se pelo ponto O fizermos passar um plano paralelo a β, ele irá intersectar o plano α numa recta u (figura 1). Os pontos de u são precisamente os pontos de α que não tinham imagem em β, e que agora têm como imagens pontos da recta do infinito de β. Se imaginarmos um ponto A em u, a imagem de A, por meio da correspondência $P \to P'$, será um dos pontos da recta do infinito de β. Considerações análogas, pensando agora na transformação inversa $Q' \to Q$, levariam à consideração da recta v, no plano β.

Assim, dados dois planos α e β, e um ponto O exterior aos dois planos, sabemos definir a projecção central de α sobre β com centro em O, a qual é uma bijecção. A cada figura F (conjunto de pontos) em α, fica a corresponder uma figura F' em β, a imagem de F por meio da projecção central. Tanto F como F' podem conter pontos próprios e impróprios. Na figura 2 considerámos algumas figuras em α (duas rectas r e s concorrentes num ponto de u; duas rectas paralelas n e m; três circunferências c_1, c_2 e c_3) e determinámos — com o auxílio do *Sketchpad* — as imagens correspondentes em β.

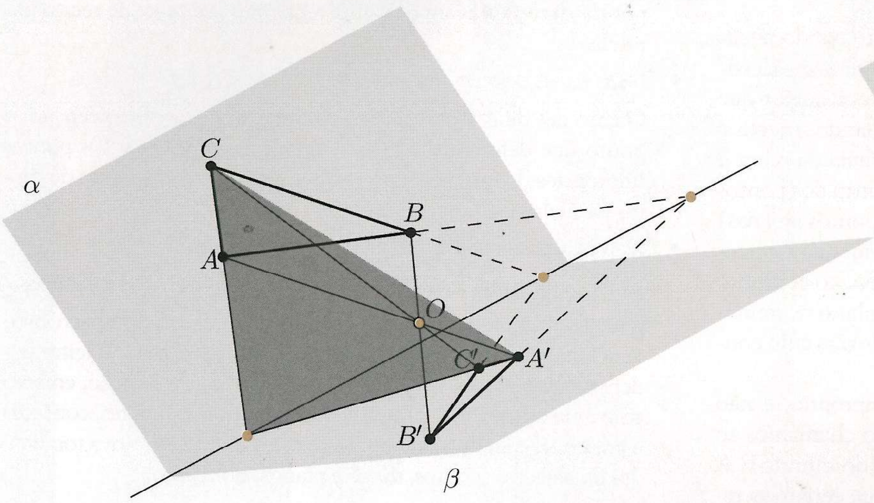


Figura 3.

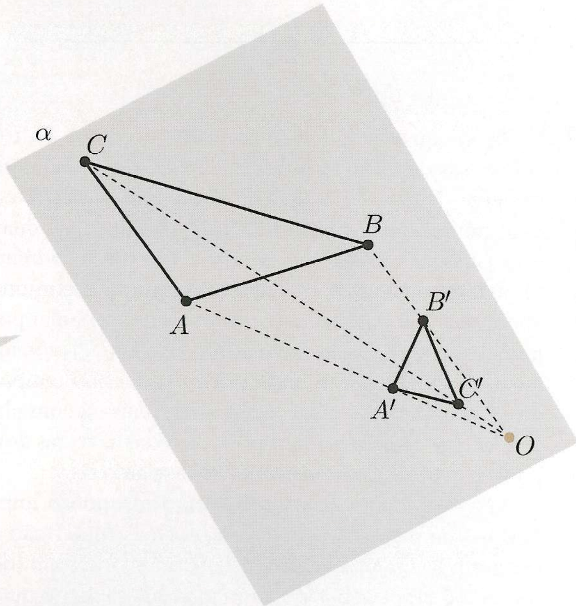


Figura 4A.

O leitor, se não tem experiência de trabalho com projecções centrais, deve procurar visualizar os diferentes casos anteriores e tentar encontrar justificações intuitivas para as imagens r', s', n', m', c_1', c_2', c_3' (em β) obtidas por meio da projecção central. Note que c_1', c_2', e c_3' são respectivamente uma elipse, uma parábola e uma hipérbole.

Os geómetras recorrem a projecções centrais para resolver problemas e demonstrar teoremas, como veremos no ponto seguinte.

Teorema de Desargues

O arquitecto francês Girard Desargues (1593–1662), um contemporâneo de Descartes, apresentou diversos resultados que constituem, por assim dizer, uma antecipação da geometria projectiva que viria a ser desenvolvida no séc. XIX.

O teorema de Desargues diz respeito a dois triângulos, ABC e $A'B'C'$, *perspectivos a partir de um ponto P*. Quer isto dizer que as rectas AA', BB' e CC' são concorrentes no ponto P. Desargues afirma que esta condição implica que as intersecções de AB com $A'B'$, AC com $A'C'$ e BC com $B'C'$ são colineares.

Existem duas versões deste teorema — ditas «no plano» e «no espaço» —, conforme os triângulos estão no mesmo plano ou em planos diferentes.

O teorema de Desargues no espaço é muito fácil de demonstrar, e começamos por ele — apoiando depois a demonstração «no plano» na versão espacial já demonstrada.

Sejam então ABC e $A'B'C'$ os triângulos dados, respectivamente nos planos α e β, e seja O o ponto a partir do qual são perspectivos (figura 3). O plano que contém os pontos $AA'CC'$ encontra a intersecção de α e β num ponto em que concorrem AC e $A'C'$. O mesmo acontece relativamente aos pares de rectas AB e $A'B'$ e BC e $B'C'$, logo o teorema fica demonstrado no espaço.

Para a demonstração do teorema de Desargues no plano[4], consideramos agora os triângulos ABC e $A'B'C'$ no plano α, perspectivos a partir de um ponto O (figura 4A). Fazemos passar por O uma recta e, não situada no plano α, e sobre e consideramos dois pontos distintos W_1 e W_2, exteriores ao plano α (figura 4B). Como O, A e A' são colineares, as rectas AW_1 e $A'W_2$ são complanares e encontram-se num ponto, seja A''. Analogamente, obtemos os pontos B'' e C''. Seja β o plano do triângulo $A''B''C''$ (figura 4C). Mas então ABC e $A''B''C''$ (resp. $A'B'C'$ e $A''B''C''$) são dois triângulos em planos diferentes (α e β) e perspectivos a partir de W_1 (resp. W_2). Logo, pelo teorema de Desargues no espaço, AB e $A''B''$ (e também $A'B'$ e $A''B''$) encontram-se num ponto de i, intersecção de α e β, e portanto o mesmo acontece a AB e $A'B'$ (resp. AC e $A'C'$ e BC e $B'C'$). Fica assim o teorema demonstrado.

Pense o leitor um pouco sobre algumas características desta demonstração. Definimos previamente uma transformação geométrica — a projecção central de um plano α sobre um plano β. A transformação geométrica foi definida como uma bijecção entre os dois planos (para o que am-

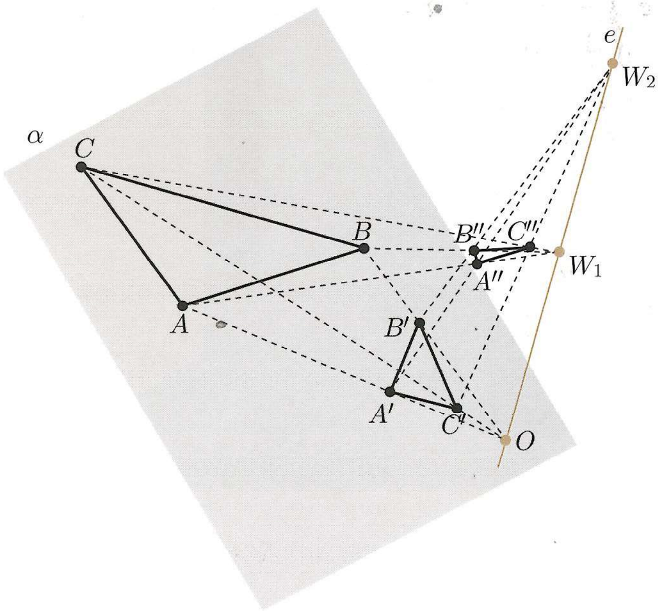


Figura 4B.

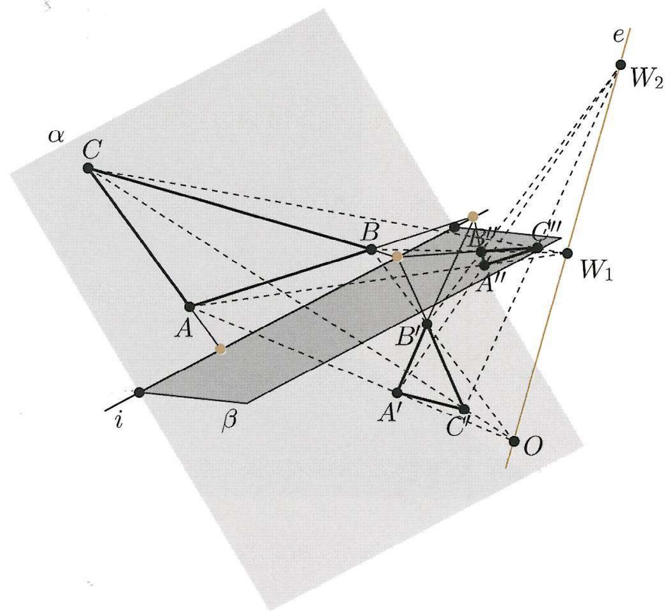


Figura 4C.

pliámos cada plano com o conjunto dos seus pontos impróprios — a sua recta do infinito). Não é difícil constatar que esta transformação geométrica preserva o conceito de ponto (isto é, transforma pontos em pontos), bem como o conceito de recta e de intersecção de duas rectas (a intersecção de duas rectas — ponto próprio ou impróprio —, é transformada na intersecção das suas imagens – ponto próprio ou impróprio).

Foi tendo em conta as propriedades (colinearidade e incidência) que ficam invariantes por projecção central que pudemos demonstrar o teorema de Desargues no plano a partir do teorema de Desargues no espaço. Nos dois pontos seguintes, vamos introduzir a projecção paralela, constatar algumas propriedades invariantes para essa transformação geométrica e apresentar um exemplo de utilização semelhante — mas muito mais elementar.

Projecção paralela

Consideremos de novo dois planos α e β não paralelos. Seja d uma recta exterior aos dois planos e não paralela a qualquer deles (figura 5). A cada ponto P do plano α fica a corresponder um ponto P' do plano β, a intersecção com β da recta que passa por P e é paralela a d. Esssa correspondência biunívoca é uma transformação geométrica, dita projecção paralela de α sobre β. Na figura 5 estão representadas diversas figuras no plano α (um triângulo, duas rectas paralelas e uma circunferência) e foram determinadas, com o auxílio do *Sketchpad*, as suas imagens em β por meio da pro-

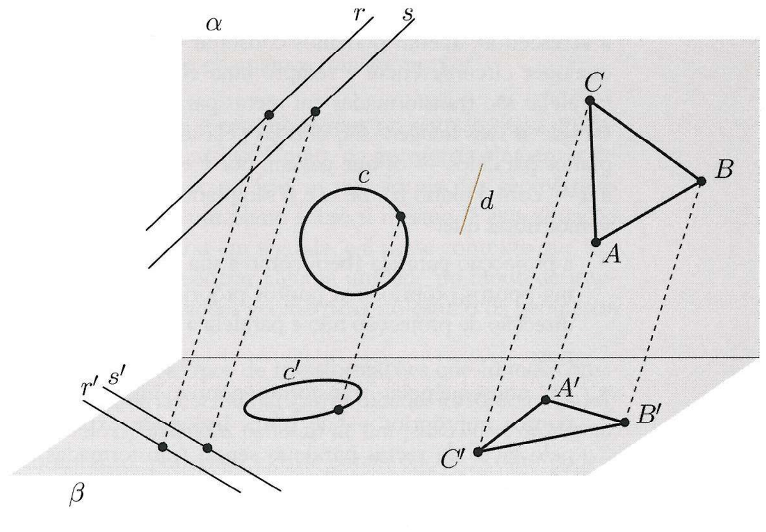


Figura 5.

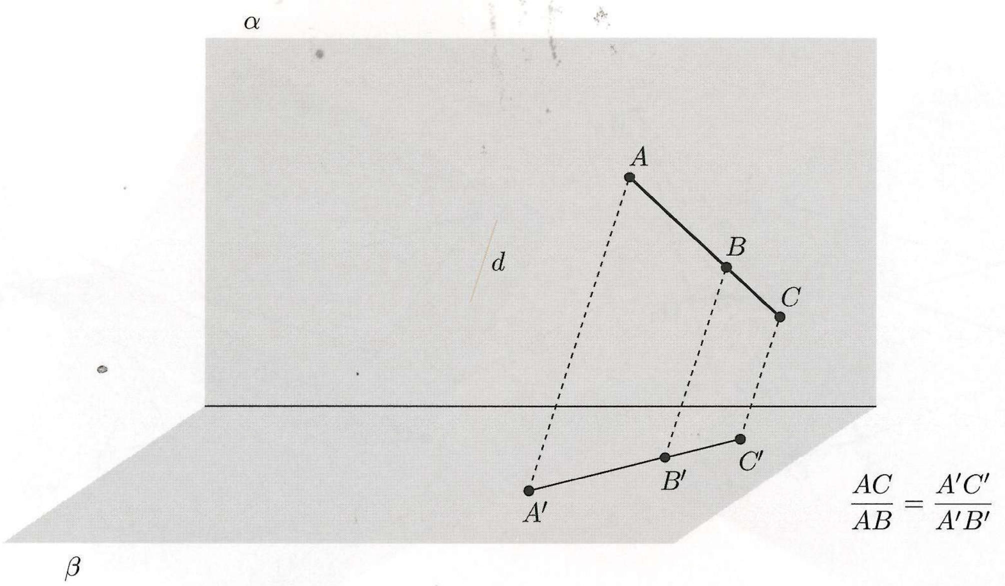


Figura 6.

jecção paralela. Se os planos α e β são considerados euclidianos (isto é, sem adjunção das rectas no infinito) nada há a acrescentar, apenas podemos constatar que a imagem de qualquer circunferência é sempre uma elipse e que rectas paralelas são transformadas em rectas paralelas (basta pensar que as suas imagens são obtidas pela intersecção de dois planos paralelos — os que passam por r e s e são paralelos a d — com o plano β). Se α e β são planos projectivos, devemos notar que:

- a projecção paralela (bem como a sua inversa) transforma pontos próprios em pontos próprios — dado que a direcção de projecção não é paralela a qualquer dos planos;
- em consequência, transforma pontos impróprios em pontos impróprios — de resto, isso pode exprimir-se pelo facto de rectas paralelas serem transformadas em rectas paralelas;
- como nenhum ponto da circunferência é enviado para o infinito, a imagem de uma circunferência é sempre uma elipse.

Uma outra propriedade da projecção paralela é o facto de deixar invariante a razão dos comprimentos de dois segmentos colineares (ou paralelos) (para concluir imediatamente no caso da colinearidade, basta observar a figura 6).

Exemplo de utilização da projecção paralela

Vamos utilizar a projecção paralela para provar que:

As três medianas de um triângulo intersectam-se num ponto.

Seja $A'B'C'$ um triângulo qualquer num plano β. Seja α um plano qualquer, distinto de β, contendo o segmento $A'C'$. Construamos em α um triângulo equilátero tendo o segmento $A'C'$ como lado, e designemos por B o terceiro vértice (façamos $A \equiv A'$ e $C \equiv C'$). Consideremos a projecção paralela de α sobre β definida pela direcção BB' (figura 7).

A imagem do triângulo equilátero ABC pela projecção paralela que definimos é o triângulo $A'B'C'$ dado. As três medianas do triângulo equilátero são as bissectrizes dos ângulos internos, e por isso encontram-se num ponto D que é o centro da circunferência inscrita. Por outro lado, os pontos médios dos lados do triângulo equilátero, dado que como vimos a razão dos comprimentos de segmentos colineares é invariante nas projecções paralelas, têm por imagens os pontos médios M_1', M_2' e M_3'. Portanto as medianas do triângulo $A'B'C'$ encontram-se num ponto D' (imagem de D pela projecção paralela).

A procura da unidade

Na reflexão que estamos a fazer sobre os processos de trabalho em geometria — sendo o foco deste artigo as transformações geométricas —, temos até agora investido em campos pouco explorados na geometria do ensino básico e secundário. Introduzimos a projecção central de um plano α sobre um plano β (não paralelos) e fomos levados a inventar os elementos impróprios (pontos, rectas e planos) e a compreender que embora a projecção central transforme rectas em rectas, não preserva outros conceitos ou noções a que a geometria, por assim dizer, nos tinha habituado: rectas paralelas são transformadas em rectas concorrentes, certas

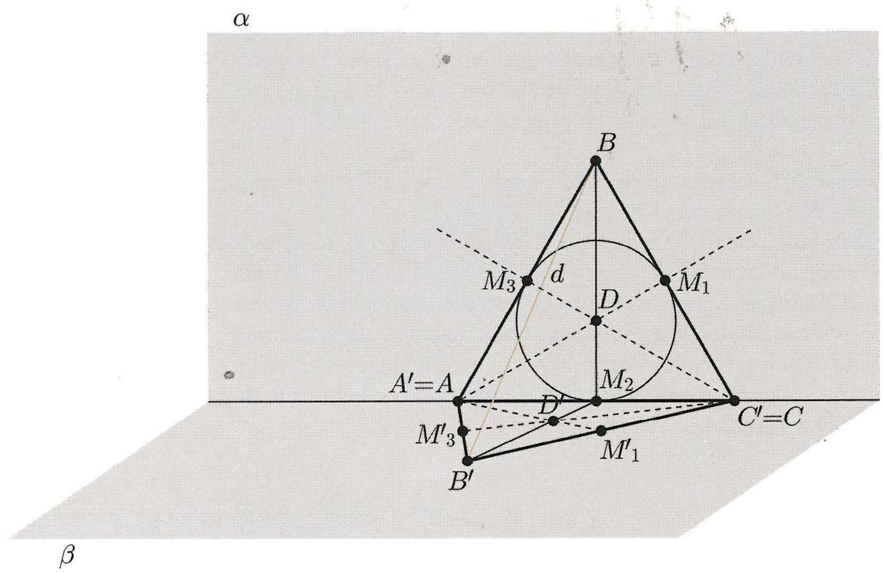


Figura 7.

rectas concorrentes são transformadas em rectas paralelas, os pontos médios dos segmentos deixam de o ser nos segmentos transformados — até os próprios segmentos podem, por transformação, deixar de ser segmentos[5] —, enfim, pouco parece resistir a uma projecção central... No que diz respeito à projecção paralela entre dois planos não paralelos, a situação parece não ser tão «desastrosa», dado que o paralelismo é conservado, os pontos médios também, os segmentos transformam-se sempre em segmentos, mas por exemplo dois segmentos com igual comprimento podem deixar de o ser (note por exemplo que na figura 7 os lados do triângulo equilátero AB e BC são transformados nos segmentos dados $A'B'$ e $B'C'$, não necessariamente iguais)...

Assim, pudemos observar como em geometria se caminha em novas direcções, se inventam novas transformações e conceitos, e se resolvem problemas e provam resultados com a ajuda dos novos entes geométricos que vão sendo criados.

No entanto, a par deste tipo de trabalho eminentemente criativo, tem existido sempre na matemática, e em particular na geometria, processos de trabalho e investigação com uma finalidade que, não excluindo a criatividade, colocam o acento tónico naquilo que poderíamos chamar *a procura da unidade*. Apenas um exemplo, em termos simples, de uma interrogação que seria natural levantar neste ponto do nosso percurso:

- a projecção central e a projecção paralela são exemplos de transformações geométricas — termo ainda indefinido neste artigo, note-se —, tais como as isometrias e semelhanças; mas enquanto naquelas as correspondências consideradas são entre planos, nas isometrias e semelhanças essas correspondências são entre pontos do mesmo plano; há alguma maneira de conferir coerência e unidade ao modo como introduzimos estes entes geométricos a que chamamos transformações?

Veremos que sim, e caminharemos no sentido dessa unidade no resto deste artigo. Como, na geometria elementar do ensino básico e secundário, as transformações geométricas estudadas são de um plano sobre si mesmo, é essa situação que vamos explorar em seguida, e é nesse contexto que iremos procurar encontrar alguma unidade no modo de integrar as transformações geométricas no estudo da geometria em geral.

Portanto, os tipos de transformações que iremos considerar (isometrias, semelhanças, afinidades e projectividades) serão *correspondências pontuais de um plano sobre si mesmo*. No entanto, poderiam existir outras opções, como poderá ver na caixa *Isometrias e Semelhanças a partir de projecções*.

Adoptaremos a definição habitual de transformação geométrica no plano[6]. Sendo dado um plano projectivo α, uma transformação geométrica é uma aplicação (função) T biúnívoca de α sobre si mesmo, ou seja faz corresponder a cada ponto P de α um (e um só) ponto P' de α — designado imagem de P por meio de T — e, além disso, para todo o ponto Q' de α existe uma pré-imagem Q em α (ou seja, tal que $T(Q) = Q'$).

Isometrias e semelhanças[7]

Devemos analisar quais as implicações de estarmos agora a trabalhar no espaço projectivo, dado que as definições habituais de isometrias e semelhanças são em geral dadas no es-

Isometrias e semelhanças a partir de projecções

Comecemos por notar que, depois da introdução dos elementos impróprios, a projecção central e a projecção paralela passam a corresponder a um único conceito, o de projecção de α sobre β a partir de um ponto do espaço (ampliado). Se o centro da projecção é um pronto próprio, estamos na situação da projecção central, se é um ponto impróprio, temos uma projecção paralela.

Quando definimos a projecção (central ou paralela) de α sobre β, tivemos o cuidado de especificar que suponhamos os planos não paralelos. Isto porque queríamos cair em situações novas.

Na realidade, ao imaginarmos uma projecção central (de centro O) entre dois planos paralelos α e β podemos considerar que estamos a partir uma dilação (ou homotetia) espacial, de centro O, e que essa dilação transforma figuras do plano α em figuras homotéticas no plano β (figura 8A). Por sua vez, uma projecção paralela entre dois planos paralelos α e β preserva a distância entre dois pontos, e reduz-se a uma translação no espaço, que tranforma figuras no plano α em figuras iguais no plano β (figura 8B). É possível, a partir daqui, obter qualquer semelhança — e não apenas a dilação —, (resp. qualquer isometria — e não apenas a translação), através da composição de projecções centrais (resp. projecções paralelas) entre planos paralelos.

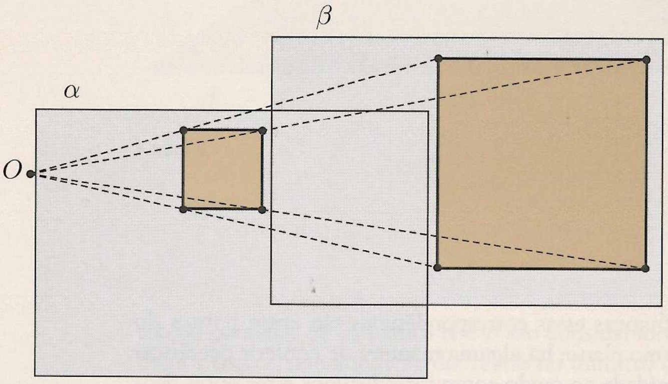


Figura 8A.

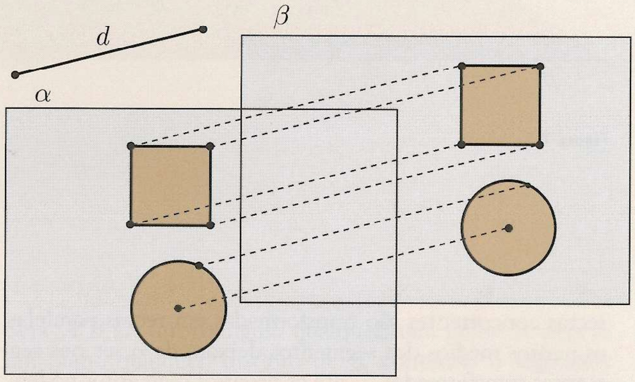


Figura 8B.

paço euclidiano não ampliado. Recordemos que a cada recta r (própria) de α corresponde um ponto impróprio, que como vimos pode ser definido por uma *direcção* no plano (ou seja pelo feixe de rectas paralelas a r). Tendo em atenção que tanto as isometrias como as semelhanças transformam rectas paralelas em rectas paralelas, isso significa que a sua actuação no plano projectivo tem a propriedade de transformar pontos impróprios em pontos impróprios, ou seja deixa fixa a recta do infinito. Apenas algumas notas exemplificativas:

- a imagem por uma translação de uma recta r é uma recta paralela a r; ou seja, a translação fixa todos os pontos de recta do infinito (o que não acontece nem com a rotação nem com a reflexão — pense porquê...)

Recordemos que a composição (ou produto) de duas isometrias é ainda uma isometria e que a inversa de uma isometria é uma isometria. Analogamente, o produto de duas semelhanças e a inversa de uma semelhança são ainda semelhanças. Portanto, tanto o conjunto das isometrias no plano como o conjunto das semelhanças têm uma estrutura de grupo[8].

Temos assim definidos dois grupos de transformações $Iso(\alpha)$ e $Sem(\alpha)$ no plano projectivo.

Projectividades e afinidades

Pretendermos agora definir dois tipos de transformações pontuais de um plano sobre si mesmo com propriedades análogas às das projecções central e paralela entre dois planos.

Seja α um plano e construamos uma cópia de α, α_1, numa posição diferente de α. Podemos por exemplo considerar uma recta própria j de α, rodar α de um certo ângulo em torno de j e obter assim α_1 (figura 9A). Tomado um ponto qualquer O para centro de projecção, definimos como anteriormente a projecção central de α sobre α_1, de centro O. O triângulo $A'B'C'$ em α_1 será a imagem, por esta projecção central, do triângulo ABC do plano α. Desfazendo agora o deslocamento de α (neste caso a rotação em torno de j) iremos obter no plano α a figura $A'B'C'$. Fica assim definida uma transformação geométrica de α sobre si mesmo, a que chamaremos ainda projecção central (por vezes também designada por perspectividade). Deverá observar que:

- as rectas AA', BB' e CC' continuam ainda a ser concorrentes num mesmo ponto (próprio ou impróprio) W;
- ao levarmos de novo à coincidência α e α_1, ficam a existir sobre α as duas rectas u e v que considerámos na definição de projecção central entre dois planos diferentes

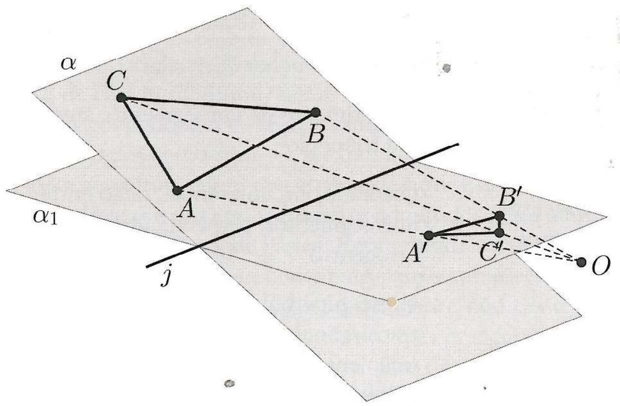


Figura 9A.

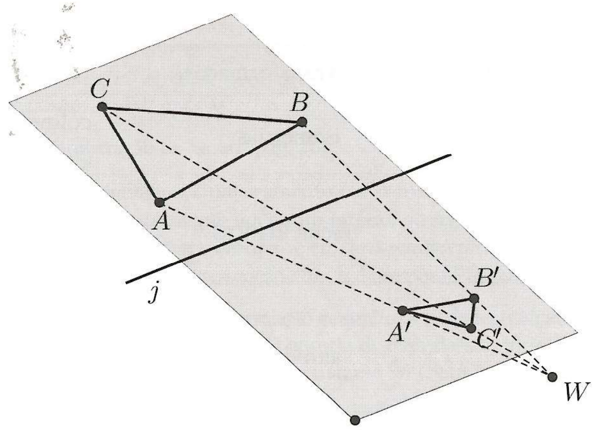


Figura 9B.

(pense um pouco no seu significado nesta nova situação);

- o processo que adoptámos (rotação) de construir uma cópia de α numa posição diferente no espaço foi apenas para servir de exemplo: qualquer deslocação de α podia ser utilizada, o que é necessário é depois trazer essa cópia à posição inicial, coincidente com α.

Esta transformação geométrica de α sobre si mesmo é um primeiro exemplo de *transformação projectiva ou projectividade*. As transformações projectivas pontuais de um plano sobre si próprio podem ser caracterizadas como tranformando rectas em rectas e são também designadas por *colineações*.

Nem todas as transformações projectivas resultam apenas de uma projecção central, como no exemplo anterior.

A composição de um número finito de projecções centrais é ainda uma transformação projectiva e pode demonstrar-se que uma transformação projectiva é sempre uma projecção central composta com uma semelhança[9]. A composição de duas transformações projectivas ainda é obviamente uma transformação projectiva, e a inversa de uma transformação projectiva é da mesma forma uma transformação projectiva. Assim, obtivemos um novo grupo de transformações no plano α, que podemos designar por $Proj(\alpha)$. Como sabemos, todas as isometrias são semelhanças, e dado que a imagem de uma recta por uma semelhança é sempre uma recta, as semelhanças são transformações projectivas. Estamos assim na presença de três grupos de transformações, em que $Isom(\alpha)$ é subgrupo de $Sem(\alpha)$ e este é subgrupo de $Proj(\alpha)$.

Podemos ainda definir um novo tipo de transformações no plano α, se efectuarmos um procedimento inteiramente análogo ao que fizemos relativamente à projecção central mas agora considerando uma projecção paralela de α sobre α_1. Obtemos uma transformação geométrica de α sobre si mesmo, que é um primeiro exemplo de uma *transformação afim ou afinidade*. As transformações afins de α sobre si mesmo caracterizam-se por transformarem rectas em rectas e fixarem a recta do infinito de α (ou, numa definição equivalente sem envolver a recta do infinito, transformarem rectas paralelas em rectas paralelas). É o caso, por exemplo, de uma composição de um número finito de projecções paralelas. Uma afinidade de α sobre si mesmo pode ser sempre obtida como o produto de uma projecção paralela com uma semelhança. Também no caso das afinidades se pode constatar que o seu conjunto forma um grupo, que podemos designar por $Afin(\alpha)$, e que, relativamente aos grupos anteriores, se situa do seguinte modo:

$$Isom(\alpha) \subseteq Sem(\alpha) \subseteq Afin(\alpha) \subseteq Proj(\alpha)$$

Geometria e grupos de transformações

As primeiras linhas do artigo *Introdução ao estudo das geometrias baseado no conceito de transformação*, que Sebastião e Silva escreveu para o número 35 da *Gazeta de Matemática*, são as seguintes:

> No célebre programa de Erlangen, mostrou Fleix Klein como o conceito de transformação permite iluminar a interdependência lógica dos diversos conceitos da geometria, sugerindo novas conexões e conduzindo a uma visão do mundo geométrico, que é a mais penetrante, a mais racional e a mais dominadora a que se possa chegar.[10]

A unidade a que nos referimos anteriormente consiste nesta *visão do mundo geométrico* exposta por Felix Klein no programa de Erlangen e que Sebastião e Siva descreve naquele magnífico artigo. Aconselhamos vivamente o leitor, se gosta de geometria e quiser pressentir essa unidade, a procurar o nº 35 da Gazeta. O que faremos aqui é apenas, em alguns enunciados demasiado breves e sem quaisquer justificações — pois de outra coisa não seríamos capazes —, tomar como

Tabela 1.

Geometrias	Transformações	Noções primitivas	Algumas noções derivadas
métrica elementar	isometrias	colinearidade, paralelismo, grandeza de segmentos	comprimento de um segmento, área de um triângulo
euclidiana	semelhanças	colinearidade, paralelismo, igualdade de segmentos	quadrado, circunferência, razão entre dois segmentos, perpendicularidade, ortocentro
afim	afinidades	colinearidade, paralelismo	elipse, hipérbole, parábola, homotetia, translação, baricentro de um triângulo, razão entre segmentos colineares ou paralelos
projectiva	colineações	colinearidade	cónica, razão dupla[13]

exemplo conceitos geométricos conhecidos e os quatro tipos de transformações geométricas que apresentámos e indicar o seu enquadramento naquela visão.

Uma teoria matemática qualquer é formada por conceitos (ou noções) e por afirmações relacionando esses conceitos. O mundo geométrico não foge a este esquema geral, e inclui conceitos como os de recta, segmento, perpendicularidade, triângulo rectângulo, quadrado e área e afirmações que os relacionam, como o teorema de Pitágoras. Na geometria (como em qualquer teoria matemática),

«é necessário fixar como primitivas ou indefiníveis certas noções, a partir das quais é possível depois definir formalmente todas as outras noções que se apresentam no desenvolvimento lógico da teoria — chamadas, por isso mesmo, noções derivadas.»[11]

Note-se que, por questões de simplicidade e comodidade, podem ser seleccionadas como primitivas noções que podem ser derivadas a partir de outras do conjunto escolhido.

Paralelamente, algumas afirmações, designadas por axiomas, e aceites sem demonstração, formam o conjunto a partir do qual todas as outras afirmações da teoria, os teoremas, são demonstradas.

A ideia fundamental de Klein, nessa visão unificada do mundo geométrico, foi considerar que as noções e propriedades geométricas se podem agrupar em diversas *geometrias*. Assim, para nos limitarmos aos exemplos que considerámos no presente artigo, a cada grupo de transformações pontuais do plano projectivo, *Isom*(a), *Sem*(a), *Afin*(a) e *Proj*(a) fica associada uma geometria, respectivamente a *geometria métrica elementar*, a *geometria euclidiana*, a *geometria afim* e a *geometria projectiva*. Essa associação consiste no seguinte: *as noções e propriedades geométricas estudadas em cada geometria são aquelas que são invariantes para as transformações do respectivo grupo* (diz-se também com o mesmo significado *noções respeitadas* ou *noções preservadas*). Por exemplo, a noção de quadrado é uma noção da geometria euclidiana porque fica invariante para as semelhanças, mas não é uma noção da geometria afim porque uma afinidade transforma em geral um quadrado num paralelogramo (pense na sombra de um quadrado provocada pela luz do sol, por exemplo). Da mesma forma, a elipse é uma noção da geometria afim (ou simplesmente uma noção afim) porque é invariante para as afinidades, mas não é uma noção projectiva — pois uma elipse pode ter como imagem, por projecção central (tipo particular de transformação projectiva), uma parábola ou uma hipérbole.

Mas a relação entre transformações geométricas e propriedades conservadas revela-se ainda mais forte, devido à seguinte propriedade fundamental:

Se uma transformação biunívoca respeita nos dois sentidos uma dada noção ou un dado conjunto de noções, respeita necessariamente qualquer outra noção que se possa definir logicamente a partir das primeiras. Reciprocamente, se uma noção é respeitada por todas as transformações biunívocas que deixam invariantes as noções dadas, ela será logicamente exprimível a partir destas.[12]

Assim, uma determinada noção pertencerá a uma determinada geometria se ficar invariante para o respectivo grupo de transformações ou se for definível a partir das noções primitivas dessa geometria, e os dois critérios são equivalentes. A tabela 1 mostra a correspondência entre as geometrias, os grupos de transformações e noções que podem ser tomadas como primitivas em cada geometria. São indicadas também algumas noções derivadas, a título de exemplo. É uma adaptação de um quadro análogo incluído no capítulo citado do livro *Textos Didácticos*, de Sebastião e Silva.

E a educação matemática?

Se a finalidade principal da *educação matemática para todos* fosse de carácter cultural, temas como os abordados nestes dois artigos poderiam — se devidamente tratados e não apenas indicados como aqui —, ser incluídos no ensino secundário e constituir assim uma espécie de síntese das experiências realizadas e dos conhecimentos adquiridos pelos alunos ao longo da escolaridade básica. Representariam, no que diz respeito à geometria, um contributo para a compreensão da natureza da matemática. Mas praticamente não existe geometria no nosso ensino secundário, e as preocupações de carácter cultural são desprezadas em face da preparação técnica para prosseguir estudos ou para entrar numa profissão. Ao mesmo tempo, o abandono das finalidades do Currículo Nacional pelo novo programa do ensino básico e a sua pobreza matemática vão no mesmo sentido utilitarista que invade completamente o nosso sistema educativo.

Resta-nos esperar que a força e beleza das ideias que tentámos transmitir atraiam alguns leitores e os convençam que vale a pena lutar por alterações tão necessárias como urgentes na nossa educação matemática.

Notas

1. Este artigo é a continuação de um artigo anterior com o mesmo título, que foi publicado no último número de *Educação e Matemática*.

2. A condição de não paralelismo dos planos α e β tem a ver apenas com o facto de nesse caso, como veremos, tanto na projecção central como na projecção paralela, as transformações resultantes serem respectivamente as «clássicas» *isometrias* e *semelhanças*, e pretendermos nestes primeiros pontos tratarmos de transformações menos conhecidas (projectividades e afinidades).

3. Para simplificar a escrita, muitos autores designam por recta projectiva a recta euclidiana (dos pontos próprios) completada com o ponto impróprio (analogamente para plano projectivo e espeço projectivo). Além disso, alguns autores, quando introduzem os elementos impróprios em geometria, embora afirmemque se trata de convenções, acresentam logo algumas frases retirando o carácter de excepcional a essas convenções. Veja-se por exemplo uma parte do texto de Sebastião e Silva, logo depois de afirmar que «as convenções relativas aos pontos impróprios têm uma base intuitiva»:

   «Não esqueçamos porém que os pontos impróprios têm uma existência puramente convencional. De resto, o mesmo se pode dizer a respeito dos pontos próprios e das entidades geométricas em geral, pois que tais entes *não existem* na realidade física, são apenas *idealizações, representações esquemáticas* dos objectos do mundo empírico. Ao matemático, o que interessa é apenas que os postulados ou convenções fundamentais, que relacionam esses entes, sejam compatíveis entre si, isto é, não conduzam a contradição. Como dizia Poincaré, «existir» em Matemática significa «ser isento de contradição».» (*Textos Didácticos*, vol. I, p. 213).

4. Demonstração de Smart, pág. 286.

5. Imagine na figura 2 um segmento em α intersectando a recta u (sendo a intersecção um ponto interior ao segmento). Nesse caso, o segmento transforma-se em duas semirectas, pois a imagem do ponto de intersecção com u é um ponto impróprio.

6. Sobre a noção de transformação geométrica pode ler a *Nota sobre o Ensino da Geometria* da autoria de Rita Bastos, intitulada *Transformações Geométricas*, no número 94 (Set/Out 2007).

7. No *site* da oficina sobre *Transformação Geométricas e Simetria* (endereço: `http://www.apm.pt/formacao/tgs_2008/`), encontrará muita informação organizada sobre isometrias e semelhanças, que por falta de espaço não podemos repetir aqui.

8. Sobre grupos de transformações geométricas, veja o *Texto de Apoio 11*, no *site* citado anteriormente.

9. I.M.Yaglom, *Geometric Transformations III*, pág. 52.

10 *Gazeta de Matemática* n° 35, p. 1.

11. idem

12. idem, pág. 5.

13. Dados quatro pontos A, B, C, e D, sobre uma recta projectiva, a razão dupla (AB,CD) é dada pela expressão $(AC/CB)/(AD/DB)$, em que os segmentos são orientados. É interessante notar que as isometrias preservam as distâncias, as semelhanças preservam as razões das distâncias e as transformações projectivas preservam as razões duplas (as razões das razões...). Mais um sintoma da unidade da matemática...

Bibliografia

Klein, Felix. *Le programme d'Erlangen*. Paris: Éditions Jacques Gabay, 1991.

Sebastião e Silva, J. *Textos didácticos, Vol. I*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1999.

Sebastião e Silva, J. Introdução ao estudo das geometrias baseado no conceito de transformação. *Gazeta de Matemática*, Ano VIII, n° 35, Fev. 1948.

Smart, James R. *Modern Geometries*. New York: Brooks/Cole Publishing Company, 1998.

Yaglom, I. M. *Geometric Transformations III*. Washington: Mathematical Association of America, 1973.

Eduardo Veloso