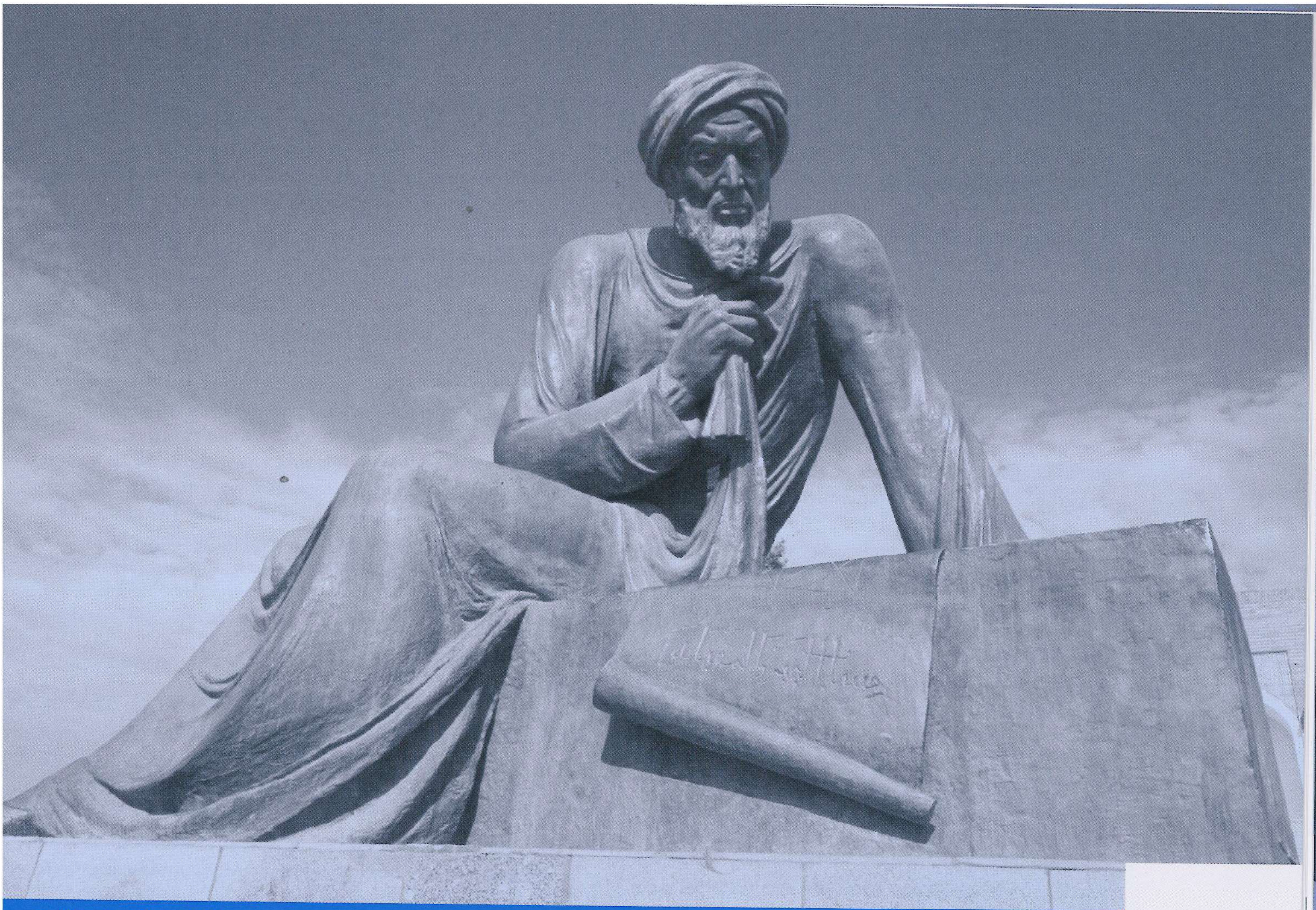


Al-Khwarizmi (780—850)

O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos

João Pedro da Ponte Neusa Branco Ana Matos

Raciocinar envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento. Em Álgebra, isso faz-se em grande medida usando símbolos, nomeadamente sinais e letras do nosso e de outros alfabetos, já que a sua utilização é central neste campo da Matemática. Os símbolos permitem expressar ideias matemáticas de forma rigorosa e condensada e são muito úteis para a resolução de problemas. No entanto, os símbolos podem ter significados diversos, conforme o contexto em que são usados, e uma boa parte das dificuldades dos alunos está precisamente nesta interpretação. Neste artigo referimos alguns problemas que podem ocorrer na aprendizagem deste tema devido à utilização dos símbolos, em especial nas expressões algébricas que intervêm no trabalho com equações e funções. Na nossa perspectiva, o raciocínio em Álgebra requer a compreensão da linguagem algébrica, sendo por isso de grande importância compreender a natureza e origem das dificuldades dos alunos. Assim, analisamos os erros e as dificuldades mais comuns dos alunos no trabalho com expressões algébricas e na resolução de equações do primeiro grau. Terminamos com diversas sugestões para situar o trabalho em Álgebra, não apenas na manipulação simbólica, mas, de um modo mais geral, no desenvolvimento do pensamento algébrico.

O simbolismo e o pensamento algébrico

A Álgebra surge na Antiguidade com a resolução de problemas, nomeadamente de Aritmética e Geometria. Inicialmente, esses problemas eram expressos em linguagem natural, mas com o contributo de matemáticos como Diofanto, começaram a usar-se pequenas abreviações. No século XVI, com François Viète, deu-se uma transformação fundamental — a construção de uma Álgebra simbólica. Não podemos minimizar a importância dos símbolos que é reconhecida. Por exemplo, pelo matemático americano Keith Devlin quando defende que "sem os símbolos algébricos, uma grande parte da Matemática simplesmente não existiria".

A linguagem algébrica cria a possibilidade de distanciamento em relação aos elementos semânticos que os símbolos representam. Deste modo, a simbologia algébrica e a respectiva sintaxe ganham vida própria e tornam-se poderosas ferramentas para a resolução de problemas. No entanto, esta grande potencialidade do simbolismo é também a sua grande fraqueza. Esta vida própria tem tendência a desligar-se dos referentes concretos iniciais e corre o sério risco de perder todo o sentido. É o que acontece quando se utiliza simbologia de modo abstracto, sem referentes significativos, transformando a Matemática num jogo de manipulação, pautado pela prática repetitiva de exercícios envolvendo expressões algébricas, ou quando se evidenciam apenas as propriedades das estruturas algébricas, nos mais diversos domínios, como sucedeu no movimento da Matemática moderna.

Este movimento foi fortemente criticado por Hans Freudenthal, fundador da corrente da Educação Matemática Realista. Na sua perspectiva, na escola, os símbolos literais devem ter algum significado, pelo menos numa fase inicial, por analogia ao que sucedeu no desenvolvimento histórico da Álgebra. Além disso, Freudenthal interpreta a linguagem algébrica como um sistema regido por um vasto conjunto de regras sintácticas que permitem desenvolver alguma acção. Compara a linguagem corrente com a linguagem algébrica e sublinha a complexidade desta e a quantidade de interpretações incorrectas que podem surgir na sua aprendizagem. Com esta ênfase na linguagem algébrica e nos símbolos, numa fase inicial associados a referentes, continua a dar uma importância primordial ao simbolismo e à progressiva formalização, mas representa uma outra concepção da Álgebra.

Mais recentemente, principalmente desde a década de 80 do século passado, têm sido discutidas diferentes visões da Álgebra. Muitas dessas discussões procuram delimitar o que deve ser incluído, ou não, neste campo e, em particular, na Álgebra que se ensina nas escolas básicas e secundárias. Nessas discussões emergiu igualmente o interesse pela caracterização do pensamento algébrico. Um dos autores que mais escreveu sobre esta ideia foi o americano James Kaput. Para ele, o pensamento algébrico manifesta-se quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Este processo de generalização pode ocorrer com base na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática e, em última instância, em qualquer conceito matemático leccionado desde os primeiros anos de escolaridade. Kaput identifica cinco facetas do pensamento algébrico, estreitamente relacionadas entre si: (i) a generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) a manipulação de formalismos guiada sintacticamente; (iii) o estudo de estruturas abstractas; (iv) o estudo de funções, relações e de variação conjunta; e (v) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos.

Esta perspectiva sobre a Álgebra e o pensamento algébrico reforça a ideia de que este tema não se reduz ao trabalho com o simbolismo formal. Pelo contrário, aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações. Resumir a actividade algébrica à manipulação simbólica, repetitiva e rotineira, equivale a reduzir a riqueza da Álgebra a apenas um dos cinco aspectos mencionados.

Diferentes interpretações para os símbolos

Já nos anos 70, num estudo feito no Reino Unido, Dietmar Küchemann indicava diversas acepções para as letras usadas em Álgebra. Para além de várias noções rudimentares (letra avaliada, letra não considerada e letra como objecto) apontava três acepções fundamentais usadas correntemente em Matemática:

1. *Letra como incógnita*, representando um número específico mas desconhecido, com o qual é possível operar directamente. Esta interpretação está intimamente relacionada com a resolução de equações como $x + 3 = 6$, por exemplo.
2. *Letra como número generalizado*, situação em que o aluno a vê como representante de vários números ou, pelo menos, como podendo ser substituída por mais do que um valor.
3. *Letra como variável*, caso em que esta é vista como representante de um conjunto de valores e pode ser usada para descrever relações entre dois conjuntos de valores.

É de notar que muitas das expressões algébricas e equações usadas frequentemente nas aulas de Matemática variam na sua natureza e podem e ser interpretadas de modos distintos. Zalman Usiskin (1988), um outro autor norte-americano, apresenta como exemplo as equações seguintes:

$$A = LW;$$
$$40 = 5x;$$
$$\sin(x) = \cos(x) \cdot \mathrm{tg}(x);$$
$$1 = n\frac{1}{n};$$
$$y = kx.$$

Segundo Usiskin (1988), a primeira expressão apresentada, $A = LW$, é uma fórmula, na qual as letras A, L e W representam três quantidades — área, comprimento e largura

— que são entendidas como se fossem números conhecidos. Na equação $40 = 5x$, a letra x é usualmente vista como incógnita, ou seja, como representante de um certo número desconhecido. A expressão $\sin(x) = \cos(x) \cdot \mathrm{tg}(x)$ é uma identidade, sendo a letra x vista como o argumento de uma função. A expressão $n = n \cdot (1/n)$ representa a propriedade da existência de inverso e pode surgir da generalização de uma regularidade, em que n é uma das suas instâncias. Por último, $y = kx$ pode ser interpretada como a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade directa em que as três letras utilizadas assumem papéis distintos: x é o argumento da função (variável independente), y é o valor que a função toma para cada argumento (variável dependente) e k pode ser visto como a constante de proporcionalidade directa ou como um parâmetro, se considerarmos a família de funções respectiva. Por outro lado, esta expressão pode ainda ser encarada como a equação reduzida das rectas não verticais que contêm a origem do referencial e têm declive k. Podemos discordar destas interpretações num ou noutro ponto, mas os exemplos apresentados mostram que a utilização das letras é multifacetada, envolvendo uma diversidade de significados, de acordo com as situações em causa.

Dificuldades na compreensão de expressões algébricas e equações do 1.º grau

Muitas das dificuldades dos alunos na resolução de equações surgem devido aos erros que estes cometem no trabalho com expressões algébricas, por não compreenderem o significado destas expressões ou as condições da sua equivalência. Boa parte destas dificuldades tem a ver com o facto de os alunos continuarem a usar em Álgebra os conceitos e convenções aprendidos anteriormente em Aritmética. Verificam-se, também, dificuldades de natureza pré-algébrica, tais como a separação de um número do sinal "menos" que o precede. Vejamos algumas das dificuldades mais comuns.

1. *Adição incorrecta de termos semelhantes*. Diversos estudos têm identificado dificuldades sentidas pelos alunos na resolução de equações do 1.º grau. Carolyn Kieran, do Canadá, é uma autora que se tem destacado neste campo. Uma das situações que identifica refere-se ao facto de muitos alunos adicionarem incorrectamente os coeficientes de dois termos, afirmando, por exemplo, que $-2x + 5x = 8$ é equivalente a $-7x = 8$.

Sara (7.º ano)[1], não revela qualquer dificuldade em interpretar a notação algébrica e em seguir procedimentos correctos para iniciar a resolução da equação

$$3(x - 7) + 10 = 2x - 3.$$

Esta aluna usa correctamente a propriedade distributiva, mas depois não adiciona correctamente os termos semelhantes no primeiro membro ($-21 + 10 = -11$ e ela faz -31). Demonstra, aqui, uma dificuldade na execução das operações com números inteiros relativos (ver figura 1).

2. *Adição incorrecta de termos não semelhantes e interpretação incorrecta do sinal "="*. Perante a equação $2x + 3 = 4x - 1$, Afonso (8.º ano) exprime a sua surpresa pelo facto de $4x$ ser

$$3 \times x - 3 \times 7 + 10 = 2x - 3$$
$$\Leftrightarrow 3x - 21 + 10 = 2x - 3$$
$$\Leftrightarrow 3x - 31 = 2x - 3$$
$$\Leftrightarrow 3x - 2x = +31 - 3$$
$$\Leftrightarrow x = 31 - 3$$
$$\Leftrightarrow x = 28$$

Figura 1.

um termo do segundo membro da equação, quando esperava que a soma de $2x$ com 3 tivesse dado origem a $5x$:

Afonso — Aqui, como é que é isto? $4x$...? Se tem $2x + 3$, vai dar igual...

Professora — Não pode dar ali $4x$?

Afonso — Não, é a maneira... Não percebo como vai dar.

Professora — O que é que tu esperavas que desse? Explica lá.

Afonso — Não, porque... Não sei... Também o 3 o que é que podia estar aqui a fazer, se está aqui o $4x$? Mas se isto é a somar e depois vai dar igual a $4x$ menos 1 ... (...) Se eu somasse ficaria $5x$, não é, stora?

O aluno considera o binómio $2x + 3$ como uma expressão que não está terminada e que pode, ainda, ser alvo de simplificação. Deste modo, não interpreta o sinal "=" como exprimindo uma relação de equivalência. Além disso, influenciado pela sua experiência anterior em Aritmética, encara o sinal "+" como um indicador da necessidade de proceder a uma adição e obter um resultado, que deve surgir à direita do "=". Esta interpretação da expressão algébrica do primeiro membro e dos sinais "+" e "=" impede-o de conseguir resolver a equação de forma correcta. A interpretação do sinal "+" como indicador de uma adição algébrica e a compreensão do sinal "=" como indicador de uma relação de equivalência são aspectos necessários à compreensão da Álgebra, que não surgem nos alunos de forma imediata.

3. *Interpretação incorrecta de monómios do 1.º grau*. Teresa (7.º ano) mostra dificuldades na compreensão de monómios do tipo ax, com a diferente de zero. Na equação $2x + 3 = 15$, entende a letra x como representante do algarismo das unidades de um número com duas dezenas. Deste modo, argumenta que esta equação é impossível, uma vez que ao adicionar 3 a esse número não pode obter 15:

Professora — O que tu entendes por isso que aí está?

$$5+\overset{13}{x}=18$$

$$2x+3=15$$

É impossível dar 15.

Figura 2.

d) $-3-x=0$

$$\cancel{-x=0+3}$$

$$\cancel{x=3}$$

$$\frac{-x}{-1}=\frac{3}{-1}$$

Figura 3.

Teresa — Acho que não dá porque está aqui um 2, temos que acrescentar mais qualquer coisa, mais 3 não pode dar 15.

Professora — Portanto, o que tu entendes é que está um 2...

Teresa — Sim, e está o x, por isso significa, que tem de ser 20 e qualquer coisa mais os 3, é impossível dar 15 (ver figura 2).

4. *Separação entre parte literal e a parte numérica numa expressão algébrica.* Sara (7.° ano) mostra dificuldade em simplificar a expressão algébrica $P = A + (A + 3) + (A \times 2)$ por considerar que deve separar totalmente a parte literal e a parte numérica dessa expressão:

Sara — Se calhar posso somar os 3 mais 3 vezes 2.

Professora — Como é que tu já chegaste a esse resultado?

Sara — Somei os A's porque são figuras.

Professora — Sim. E depois?

Sara — E depois é só os números.

Professora — Ah... E porque é que colocaste 3 vezes 2? Porque é que é 3 vezes 2?

Sara — Porque é os 3 centímetros, mais o dobro do primeiro lado.

Professora — Continuo sem perceber porque é que juntaste os 3 centímetros com o dobro do primeiro lado.

Sara — Porque são os dois números.

Professora — Então, juntas sempre os números com os números?

Sara — Sim, os números com números e as letras com letras.

A aluna adiciona a parte literal, considerando que todos os monómios do primeiro grau têm coeficiente 1, obtendo $3A$ e, em seguida, multiplica 3 por 2:

$$3A + 3\times 2$$

5. *Resolução incorrecta de uma equação do tipo $ax=b$.* A resolução deste tipo de equações levanta grandes dificuldades para muitos alunos para certos valores de a e b. Isso é descrito num estudo da investigadora belga Joëlle Vlassis, desenvolvido com alunos entre os 13 e os 14 anos que já antes tinham começado a estudar Álgebra. Este estudo descreve a dificuldade sentida por alguns alunos na resolução de equações como, por considerarem que após o sinal "−" deve estar um número positivo. Pensando deste modo não compreendem como pode $-x$ ser igual a 4.

A determinação da solução de uma equação deste tipo constitui também uma dificuldade para muitos alunos portugueses. Na resolução da equação $-x = 3$, Juliana (7.° ano) divide ambos os membros por −1, mas indica que a solução da equação é 3 em vez de −3 (ver figura 3).

Noutros casos, os alunos resolvem este tipo de equações de forma correcta, embora não sejam capazes de explicar os procedimentos que efectuam. É o que acontece com Afonso (8.° ano), quando procura explicar como resolveu a equação $-2x = -4$:

Afonso — E depois aqui é x igual a... −4 sobre −2.

Professora — Porquê?

Afonso — Então, temos aqui um número. Fica $x = -4$ e depois passa o −2 cá para baixo.

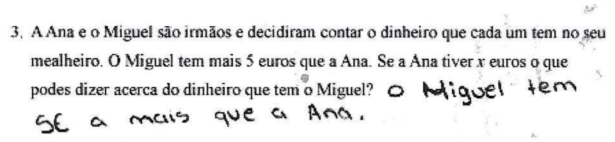
Professora — Cá para baixo?? É que eu não estou a perceber ... Mas porquê?

Afonso — Porque eu acho que é assim.

Os erros e dificuldades mais comuns no trabalho com expressões algébricas e equações encontram-se sistematizados no Quadro 1. Note-se, porém, que alguns alunos não chegam propriamente a cometer erros. A sua dificuldade é de tal ordem que nem sequer percebem muito bem o que representa uma equação e muito menos o que está envolvido na respectiva resolução. A lista indicada não pretende ser exaustiva mas apenas indicativa. Importa, sobretudo, que o professor esteja alerta para a possibilidade da ocorrência destas e de outras dificuldades dos alunos, tendo em conta que elas podem estar relacionadas com as experiências vividas nas suas aulas.

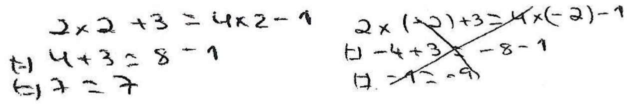
Quadro 1 — Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do 1.º grau

Erro/Dificuldade	Exemplo	Autor
Adição de termos que não são semelhantes e Interpretação dos sinais "+" e "=" como indicadores de uma acção	$3 + 4n = 7n$ $2a + 5b = 7ab$	Booth, 1984, 1988 Kieran, 1981, 1992 Küchemann, 1981 MacGregor e Stacey, 1997
Interpretação incorrecta de monómios do 1.º grau	Interpretação de $4y$ como: — quatro "y's"; — um número com quatro dezenas e um número desconhecido de unidades; — $4 + y$ por analogia com $3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$.	Booth, 1984
Uso de parêntesis	$3(x + 2) = 7x \Leftrightarrow 3x + 2 = 7x$	Kieran, 1992 Socas, Machado, Palarea e Hernadez, 1996
Não saber como começar a resolver uma equação		Kieran, 1985
Não respeitar a convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita representam o mesmo número		Kieran, 1985
Adição incorrecta de termos semelhantes	$-2x + 5x = 8 \Leftrightarrow -7x = 8$	Kieran, 2006
Adição incorrecta de termos não semelhantes	$2x + 5 = x + 8 \Leftrightarrow 7x = 9$	Kieran, 1985
Transposição incorrecta de termos	$16x - 215 = 265 \Leftrightarrow 16x = 265 - 215$ $30 = x + 7 \Leftrightarrow 30 + 7 = x$ $3x + 5 = 2x \Leftrightarrow 3x = 2x + 5$ $7x = x + 8 \Leftrightarrow 7 - 8 = x + x$	Kieran, 1985, 1992
Redistribuição (*Redistribution*)	$-2x + 5 = 8 \Leftrightarrow -2x + 5 - 5 = 8 + 5$	Kieran, 1992
Eliminação	$3x - 3 = 2x - 4 \Leftrightarrow x = 2x - 4$	Kieran, 1992
Conclusão incorrecta da resolução da equação	$6x = 24 \Leftrightarrow 6 + x = 24$ $11x = 9x = \frac{11}{9}$ $2x = 4 \Leftrightarrow$ i) $x = 4 - 2$; ii) $x = \frac{4}{-2}$; iii) $x = \frac{2}{4}$;	Kieran, 1985, 1992 Lima e Tall, 2008 Vlassis, 2001
	$-x = -17 \Leftrightarrow ??$ $-x = 4 \Leftrightarrow ??$	



3. A Ana e o Miguel são irmãos e decidiram contar o dinheiro que cada um tem no seu mealheiro. O Miguel tem mais 5 euros que a Ana. Se a Ana tiver x euros o que podes dizer acerca do dinheiro que tem o Miguel? O Miguel tem 5€ a mais que a Ana.

Figura 4.



$2\times 2+3=4\times 2-1$
$(=)\ 4+3=8-1$
$(=)\ 7=7$

$2\times(-2)+3=4\times(-2)-1$
$(=)\ -4+3=-8-1$
$(=)\ -1=-9$

Figura 5.

Origem das dificuldades

Estudos realizados nos anos 80 sugerem que o modo como as crianças pensam em Álgebra está estreitamente relacionado com o seu desenvolvimento cognitivo, estabelecendo um paralelismo entre o seu desempenho e o estádio de Piaget em que se encontram. A ideia de que as dificuldades dos alunos em Álgebra têm a sua principal origem no atraso do seu desenvolvimento cognitivo implica que qualquer acção do professor para as minorar será necessariamente infrutífera. No entanto, as autoras australianas Mollie MacGregor e Kaye Stacey argumentam que esta interpretação não explica o facto de alunos num mesmo estádio de desenvolvimento lidarem por vezes com a simbologia algébrica de formas muito díspares. Defendem, por isso, que as diferentes interpretações dos alunos podem ter outra origem, salientando os seguintes pontos:

1) *Uso de pressupostos intuitivos e raciocínio pragmático sobre um sistema de notações não familiar.* No início do estudo da Álgebra os alunos, não familiarizados com a linguagem que a caracteriza, podem recorrer a estratégias que lhes permitam responder a determinadas questões, do modo que lhes parece mais adequado. É o que sucede com Raquel (7.° ano), que escreve algo relacionado com os restantes dados do problema, ignorando a letra que é usada no enunciado para representar o número de euros que a Ana tem (figura 4).

Relativamente à mesma situação, Teresa (7.° ano) opta por atribuir um valor específico à letra, por si escolhido: "Então, aqui por exemplo, se a Ana tiver vinte euros, o Miguel tem vinte e cinco, porque o Miguel tem mais cinco euros que a Ana".

2) *Estabelecimento de analogias com sistemas simbólicos usados no quotidiano, noutras áreas da Matemática ou noutras disciplinas.* Alguns alunos, por exemplo, atribuem valores às letras de acordo com a ordem em que estas surgem no alfabeto: $a = 1$, $b = 2$, e assim sucessivamente.

3) *Interferência de outras aprendizagens em Matemática.* Alguns alunos consideram que, em qualquer monómio com coeficiente igual a um, a letra envolvida representa o valor 1. A interferência de outras aprendizagens é também notória em Maria (8.° ano). Depois de resolver correctamente uma equação do 1.° grau, obtendo o valor 2, procura verificar, desnecessariamente, se −2 também é solução, tal como sucede em alguns tipos de equações do 2.° grau que já estudou (figura 5).

Maria — Acho que não há outra hipótese, sem ser o 2.

Professora — Quer dizer, se houvesse outra hipótese, para ti era o −2, era?

Maria — Hum, hum.

Professora — E porquê?

Maria — Não sei, lembrei-me daquilo... Da solução, que às vezes dá −2 e 2.

4) *Influência de materiais e estratégias de ensino pouco adaptados.* Por exemplo, os alunos podem manifestar dificuldades na interpretação das letras utilizadas, nomeadamente, quando estas são usadas como abreviações de palavras ou como designações de objectos. Este erro pode ser induzido pelo modo como as tarefas são construídas e como o próprio professor gere as discussões na aula. Lesley Booth sublinha que é importante que o professor compreenda as dificuldades dos alunos e a sua origem, uma vez que esta compreensão lhe permite propor tarefas capazes de promover aprendizagens mais significativas e minorar as dificuldades dos alunos.

A concluir

Alan Schoenfeld e Abraham Arcavi criticam o facto dos programas de Matemática encararem a utilização de variáveis como algo que, após alguma prática, os alunos compreendem de modo uniforme e sem qualquer ambiguidade. Com base num pequeno estudo realizado com matemáticos, educadores matemáticos, cientistas, linguistas e lógicos, ilustram a diversidade de formas como a notação matemática pode ser entendida. Estes autores argumentam que, no cenário escolar, a construção do conceito de variável é um processo complexo que merece atenção particular, considerando-o mesmo como um tópico central no ensino-aprendizagem da Matemática. A utilização, com significado, da noção de variável facilita a transição entre a Aritmética e a Álgebra e propicia a construção de novos conceitos matemáticos de carácter mais avançado, noutros anos de escolaridade.

No que diz respeito aos significados dos símbolos, parece aconselhável introduzir desde cedo as suas diversas utilizações, nomeadamente como incógnita, número generalizado e variável. Essa é a perspectiva, por exemplo, dos *Prin-*

cípios e Normas do NCTM, onde se defende, de um modo abrangente, que os alunos devem compreender os diversos significados e usos das letras, através da representação de quantidades, nomeadamente na resolução de situações problemáticas. Também o novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* indica que a aprendizagem da linguagem algébrica se deve iniciar no 2.º ciclo. Para o 3.º ciclo, este programa defende que:

> A aprendizagem das operações com monómios e polinómios, e [d]a simplificação de expressões algébricas, deve ser progressiva e recorrer a situações que permitam aos alunos compreender a manipulação simbólica envolvida, por exemplo, efectuando cálculos a partir de expressões algébricas substituindo as letras por valores numéricos. É conveniente usar expressões algébricas para representar problemas, usando letras para designar incógnitas ou variáveis, e introduzir expressões com variáveis ligadas a um contexto. O conceito de variável, pela sua complexidade, justifica que os alunos explorem situações variadas em que surjam letras (nomeadamente, em equações e fórmulas) e discutam os seus significados (p. 55).

O facto de se considerar uma fronteira mais alargada para a Álgebra do que a estabelecida tradicionalmente não significa que se menospreze o cálculo algébrico e o papel do simbolismo. Note-se, contudo, o avanço tecnológico e a emergência de *software* de manipulação simbólica levam a questionar a necessidade de se insistir demasiado em procedimentos morosos e desprovidos de significado.

Indo para além da simples manipulação de símbolos e expressões algébricas, Arcavi defende que se deve procurar o desenvolvimento do que designa por "sentido do símbolo" (*symbol sense*). Na sua perspectiva, isso inclui a capacidade de manipular e interpretar expressões algébricas e a consciência de que os símbolos podem desempenhar papéis distintos consoante os contextos, intuindo a existência dessas diferenças. Assim, o aluno deve criar uma sensibilidade e intuição que lhe permita interpretar aspectos implícitos nos símbolos e antecipar o que pode decorrer das acções que desencadeia sobre eles. Este autor sustenta que isso está ao alcance de todos os alunos, mesmo daqueles que usualmente sentem maiores dificuldades na disciplina de Matemática.

Na nossa perspectiva, continuando a valorizar o simbolismo, mas promovendo a sua apropriação em contextos de trabalho significativos, quer de cunho matemático (estudo de relações e regularidades), quer relativo a situações extra-matemáticas (modelação e variação), a aprendizagem da Álgebra deve visar a compreensão dos seus conceitos fundamentais. Para isso deve dar-se atenção ao desenvolvimento do pensamento algébrico, nas suas diversas vertentes, permitindo aos alunos a elaboração de raciocínios cada vez mais abstractos e complexos.

Nota

1 Os exemplos que apresentamos referem-se a alunos portugueses que participaram em estudos realizados por Ana Matos e Neusa Branco. Desses alunos, Teresa e Raquel (ambas do 7.º ano), não tinham estudado anteriormente qualquer tópico de Álgebra. Em contrapartida, Sara e Juliana (também do 7.º ano) e Afonso e Maria (ambos do 8.º ano) já tinham iniciado anteriormente o estudo da linguagem algébrica.

Bibliografia

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24–35.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29–48). Lisboa: SEM–SPCE.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor: Nfer-Nelson.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra, K–12* (pp. 20–32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico* [Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, disponível em `http://ia.fc.ul.pt`].

Devlin, K. (2002). Matemática: *A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317–326.

Kieran, C. (1985). The equation-solving errors of novice and intermediate algebra students. In L. Streefland et al. (Eds.), *Proceedings of the 9th PME International Conference* (vol. 1, pp. 141–146). Noordwijkerhout, Holanda.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York, NY: Macmillan.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. M. Alvares, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (Eds.), *ICME 8: Selected lectures* (pp. 271–290). Seville: SAEM Thales.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11–49). Rotterdam/Taipei: Sense.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11–16* (pp. 102–119). London: Murray.

Lima, R., & Tall, D. (2008). Procedural embodiment and magic in linear equations. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 3–18.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics*, 33(1), 1–19.

Matos, A. (2007). *Explorando relações funcionais no 8.º ano de escolaridade: Um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico* [Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, disponível em http://ia.fc.ul.pt].

ME-DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC. [Disponível em http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf].

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher*, *81*(6), 420–427.

Socas, M., Machado, M., Palarea, M., & Hernandez, J. (1996). *Iniciacion al álgebra*. Madrid: Síntesis.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, K–12* (1988 Yearbook, pp. 8–19). Reston, VA: NCTM.

Vlassis, J. (2001). Solving equations with negatives or crossing the formalizing gap. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference* (vol. 4, pp. 375–382) Utreque, Holanda.

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Neusa Branco
Escola Superior de Educação de Santarém

Ana Matos
Escola Secundária da Lourinhã

Raciocinar em... Direito

Pensar em direito, quase sempre significa não fazer raciocínios. O Direito pode ser pensado de várias formas, conforme o objecto ou matéria visados ou o fim a atingir. Na criação de normas jurídicas segue-se o método tópico de matriz escolástica; na interpretação de textos normativos, o método lógico-dedutivo; na formulação de soluções o método indutivo-sintéctico. Como muletas literárias do método seguido no pensamento jurídico, são essenciais a dialéctica, a retórica e a gramática. Como instrumentos de análise jurídica, o rigor na observação da realidade e a competência técnica na escolha das hipóteses experimentadas, são determinantes. O pensamento é, em Direito, uma operação intelectiva, fundada num saber assente na experiência feita por pessoas com reconhecido prestígio social. Pensar o Direito é conseguir criar formas de exercer e efectivar a justiça do caso concreto.

Eduardo Vera-Cruz Pinto **[Professor]**
Faculdade de Direito de Lisboa, UL