Representações dos alunos. Que raciocínios revelam?

Alice Carvalho

Uma componente essencial do trabalho do professor prende-se com as experiências de aprendizagem que quer proporcionar aos seus alunos, tendo em conta os conteúdos ou tópicos matemáticos visados.

Esta faceta do seu trabalho concretiza-se muitas vezes na escolha de uma tarefa e toda a reflexão feita em torno dela.

Uma professora do 3° ano de escolaridade queria trabalhar problemas que envolvessem a multiplicação. O problema adaptado da prova de aferição de matemática 2002 (figura 1) parecia-lhe ser interessante, mas envolvia a multiplicação com números decimais, conteúdo que ainda não tinha abordado. Alterar os números do problema, para que só estivessem envolvidos números inteiros, mudando o preço de cada almoço de 1,50€ para 2€, era uma hipótese, mas o facto de os alunos não saberem ainda o algoritmo da multiplicação envolvendo números decimais poderia ser um desafio impulsionador de estratégias alternativas seria interessante observar como é que os alunos lidavam com o problema, que sentido dariam a 1,50€, que justificações mobilizariam. A dinâmica criada no esforço para chegar à solução do problema e o confronto de estratégias poderia proporcionar um momento rico de aprendizagem matemática.

A segunda hipótese era de facto mais desafiante e esta professora empenhou-se completamente em dar espaço aos seus alunos para resolver o problema através da mobilização de processos que fossem para eles relevantes, mesmo que lhe parecessem um pouco longos. À partida pensou que a multiplicação era o processo mais rápido. Estava curiosa para ver se algum aluno a mobilizava espontaneamente, como lidaria com o factor decimal e que interpretação faria do número obtido no produto. E que outras estratégias iriam surgir mais? Será que os seus alunos a iriam surpreender?

Feita a escolha da tarefa, consideradas estas questões e ponderada a forma de a levar para a sala de aula, é altura de ver o que realmente acontece. Neste artigo analisaremos a forma como os alunos desta professora mobilizaram os seus conhecimentos para resolver estes problemas para os quais foram desafiados (figura 1).

Paralelamente trazemos a experiência de uma outra turma do 3° ano cujo professor optou por levar esta tarefa para a sala de aula por a considerar consistente com a sua opção metodológica de adiar a introdução dos algoritmos formais, neste caso a multiplicação com números decimais.

Os nomes dos alunos não correspondem aos verdadeiros.

gura 1

tabela indica o número de almoços servidos, na 2ª semana de bril de 2008, na escola do Paulo.

Dias da semana	Número de almoços servidos
Segunda-feira	100
Terça-feira	75
Quarta-feira	50
Quinta-feira	100
Sexta-feira	125

. Cada almoço custa 1,5 euros. Quanto é que a escola recebeu pelos almoços de quarta-feira?
Regista todos os teus cálculos.

. Já sabes o dinheiro que a escola obteve com os 50 almoços de quarta-feira.
Partindo deste valor, calcula quanto é que a escola fez nessa semana em almoços.
Regista todos os teus cálculos.

Turma A

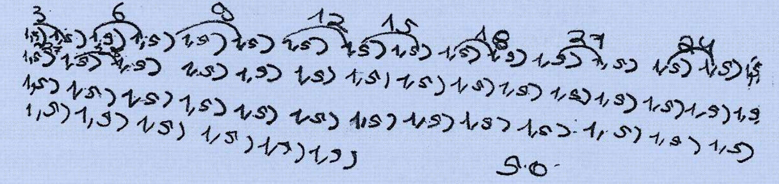
Passada a primeira fase de interpretação do problema no grande grupo, os alunos lançaram-se ao trabalho, podiam trocar impressões com os colegas perto de si. Muitos alunos começaram por adicionar sucessivamente 1,50€, descobrindo quase de imediato que 1,50€ + 1,50€ eram 3€. Mas o processo de escrever 50 parcelas de 1,50€ e contar sucessivamente de 3 em 3 fez com que algumas crianças mudassem de estratégia e optassem por outra mais eficaz, uma vez que a forma como fizeram o registo levava a enganos, como mostra a resolução da Isabel (figura 2).

E o raciocínio começou a mobilizar-se para a resolução do problema.

— Eu podia fazer primeiro dez almoços, que é mais fácil! Depois é só contar de dez em dez até chegar a 50 almoços — disse a Isabel, ao debater-se com a confusão que emergia do facto de ter escrito tudo muito apertado.

Esta mudança de estratégia fez com que evitasse um erro que estava a cometer logo na primeira linha dos seus registos (figura 2), uma vez que associou duas vezes a mesma parcela.

Figura 2. Primeira resolução da Isabel



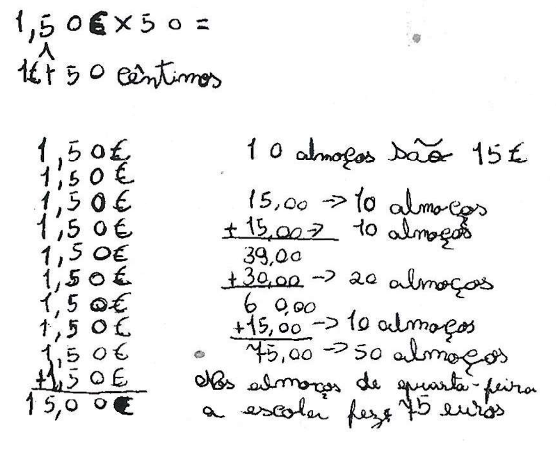


Figura 3. Segunda resolução da Isabel.

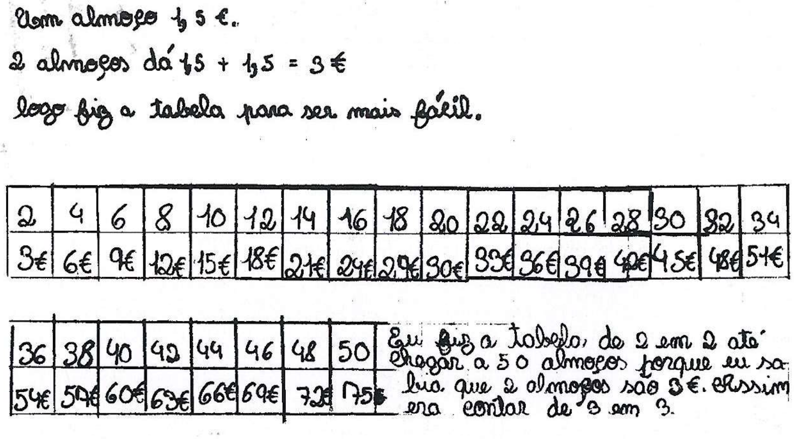


Figura 4. Resolução do Pedro

Na resolução apresentada na figura 3, podemos observar que a Isabel percebeu que este problema podia ser resolvido através de uma multiplicação, pois regista este procedimento logo em primeiro lugar, talvez os primeiros registos com as 50 parcelas (figura 2) a fizessem evoluir na compreensão do problema, mobilizando, de seguida, uma estratégia conceptualmente mais evoluída, mas como ainda não dominava o cálculo através da multiplicação, raciocinou por etapas. Primeiro calculou o preço de 10 almoços e partiu deste dado para chegar ao preço de 50, decompondo-o em 10 + 10 + 20 + 10. A estratégia aditiva prevalece, mas esta resolução, feita com compreensão, permite-lhe criar a pouco e pouco estruturas sólidas para a apropriação da multiplicação com números decimais. Desmontar a sua estratégia e colocar à discussão sobre outra forma de representar a adição de 10 parcelas de 1,5€ poderá ajudá-la a dar o salto para a multiplicação por 10. Proporcionar a análise do produto obtido, 15€, em comparação com o factor 1,5€, também me parece relevante para fazer compreender a transformação dos números quando os multiplicamos por dez. Numa etapa seguinte poder-se-á direccionar a discussão na turma para que percepcione o 50 como 5 × 10 e que, por isso, possa aplicar esta relação multiplicativa ao cálculo do preço de 50 almoços: 10 almoços são 15€, então 50 almoços são 5 × 15€.

O Pedro resolveu o problema construindo uma tabela (figura 4). Como muitos partiu do preço de 2 almoços, fazendo 1,5 + 1,5 = 3€.

No preenchimento da tabela, o Pedro foi fazendo em simultâneo contagens de 2 em 2 e de 3 em 3. A razão da escolha desta estratégia está explícita na sua justificação escrita.

O recurso à construção de uma tabela foi uma estratégia muito útil para si e para os colegas que tiveram a oportunidade de confrontar os seus modos de resolução com este que tão bem estruturou todo o processo de pensamento. Muitos reconheceram que esta estratégia permite calcular de forma mais organizada, evitando-se os enganos que surgiram nas resoluções através da adição de 50 parcelas de 1,5.

Embora o modo de preenchimento da tabela tivesse sido através de adições sucessivas, esta forma de representação permite desenvolver as bases para o raciocínio proporcional, uma vez que a criança teve de lidar simultaneamente com o número de almoços e o respectivo preço, mantendo sempre uma relação constante nas replicações necessárias para chegar ao preço de 50 almoços, que neste caso foi de 2 almoços/3€. O próximo desafio seria verificar se tendo de calcular um número muito superior de almoços usaria a mesma estratégia de construção da tabela.

O Renato da turma B, usou a tabela representada na figura 5 para calcular o preço de 10 almoços.

Este modo de construir uma tabela dá-nos mais evidência da mobilização de relações multiplicativas, uma vez que só são preenchidas algumas colunas. São muitas as questões que o professor pode levantar neste ponto: como será que o aluno preencheu o preço de 5 almoços? É natural que tenha calculado primeiro o preço de 10 almoços e que depois encontrasse a sua metade. E como preencheria 50 almoços? Será que encarava o 50 como sendo 5 vezes maior que 10 e aplicava esta relação criando apenas mais uma coluna, assinalando com setas a relação multiplicativa envolvida, ou tinha de fazer mais 5 colunas, contando de 10 em 10 e de 15 em 15?

A exploração das tabuadas, através do preenchimento de tabelas por saltos ao estabelecer relações de dobro e de metade, em vez de as completarem seguidamente por adições sucessivas, talvez seja um método mais poderoso no desenvolvimento do raciocínio multiplicativo. Será interessante observar se esta abordagem na aprendizagem das tabuadas ajuda os alunos a aplicar estas relações e processos de representação a problemas com a mesma estrutura, como seja, usar tabelas de razão para resolver problemas que envolvem relações proporcionais.

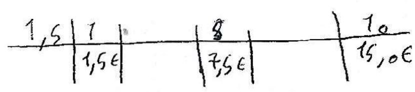


Figura 5. Tabela do Renato.

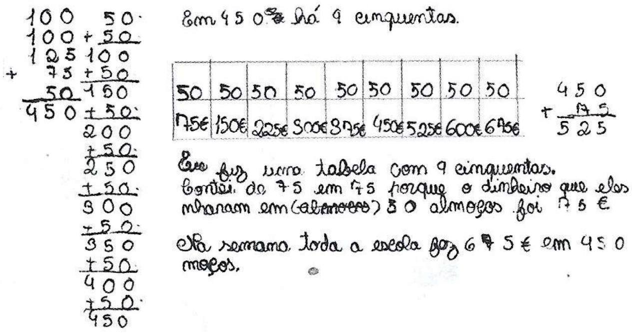


Figura 6. A resolução do Pedro [2° problema].

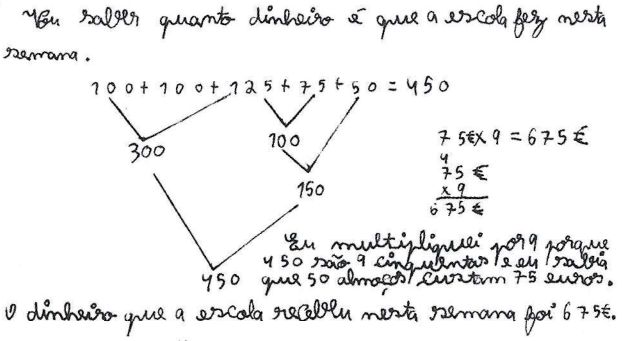


Figura 7. A resolução do Fábio [2° problema].

No segundo problema (ver figura 1), um dos objectivos era que os alunos estabelecessem relações numéricas entre o 50 e o 450. Como já sabiam quanto custavam 50 almoços era interessante verificar se utilizaram este facto para mais rapidamente calcular o preço de 450 almoços, fazendo-o ou através de adições sucessivas ou mobilizando o raciocínio multiplicativo.

Analisemos a resolução que o Pedro fez para este caso (figura 6). Depois de calcular o total de almoços da semana, observamos que parte do preço de 50 almoços, calcula quantos grupos de 50 há em 450, adicionando sucessivamente 50 até encontrar este valor, escreve que em 450 há 9 cinquentas e fez novamente uma tabela com 9 colunas e duas linhas. Podemos reparar pela justificação escrita que apresenta que o preenchimento da segunda linha da tabela foi feito através de contagens de 75 em 75. Na apresentação aos colegas fê-lo do seguinte modo: "50 almoços custam 75€, 100 almoços é 75 + 75 que dá 50 + 50 + 50, 150 euros ..." e assim sucessivamente até chegar ao cálculo de 450 almoços. Foi interessante verificar que ao ter de mostrar oralmente como contou de 75 em 75, estruturou o 75 em saltos de 50 e 25, para lhe facilitar o cálculo, aspecto que não revela no registo escrito. Foi ainda necessário discutir se o que a tabela mostrava correspondia à explicação que estava a expressar oralmente. A pergunta "Então 50 almoços custam 450€?" e a respectiva resposta "Não, isso é este cinqüenta." (apontou para a coluna 6) foram suficientes para poder verificar que em cada coluna, junto do 50, teria de escrever o número de grupos de 50 correspondente, para que a tabela representasse com rigor o seu pensamento (ver figura 6).

Na resolução do segundo problema surgiu nesta turma um processo diferente (figura 7). É de notar como o Fábio contou o número total de almoços da semana. Enquanto no trabalho do Pedro (figura 6) observamos o uso do algoritmo da adição, nesta estratégia o cálculo foi feito horizontalmente, estando subjacente a estrutura do 100 (juntou o 25 do 125 com o 75 para obter um novo grupo de 100). Através da sua justificação escrita sabemos porque é que multiplicou por 9, mas não está explícito como sabe que em 450 há 9 grupos de cinquenta. Oralmente, a sua explicação foi muito rápida, o Fábio apontou para o seu esquema e disse: "Em 300 há 6 e em 150 há 3." "Mas porquê? Como provas que em 300 há 6 grupos de 50?" insistiu a professora. "É fácil, o 300 é 100, 100, 100 e cada cem tem 2 cinquentas... 2, 4, 6". Uma nova questão direccionada para o estabelecimento de relações "Se em 300 há 6 vezes o 50, em 150 há 3 vezes o 50 porquê?" obteve resposta imediata de outro colega: "Metade de 300 são 150.".

Desenvolver a capacidade de argumentação é um aspecto importante do raciocínio, mas muitas vezes os alunos não sentem a necessidade de justificar através da escrita processos que utilizaram, para eles é mais do que evidente o porquê dos procedimentos usados. A discussão oral permite que este processo se aperfeiçoe e gradualmente se reflicta na escrita. As perguntas dos colegas e do professor ajudam a criar um sentido de audiência para aquilo que escrevem e dizem, por isso, vale a pena mostrar como se pensou porque isso é também importante para os outros.

Turma B

Este problema também foi resolvido numa outra turma do 3° ano de escolaridade. O professor desta turma optou por ensinar os algoritmos verticais só depois de sentir que os seus alunos tinham alguma flexibilidade no cálculo, mobilizando processos alternativos. Isto não quer dizer que não tenha ensinado processos estruturantes de cálculo, mas estes focalizaram-se primeiro, e durante um período longo de tempo, na utilização de estratégias de contagens por saltos, por compensação, decomposição e estabelecimento de relações numéricas. Simplificar os cálculos para imprimir maior velocidade ao processo de resolução e encontrar estratégias novas para contar aos colegas e professor tornou-se um desafio permanente. No domínio da multiplicação e divisão, as relações de dobro, de metade e a multiplicação por 10 e por 100 são as estratégias a que mais recorrem espontaneamente e que têm permitido o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo.

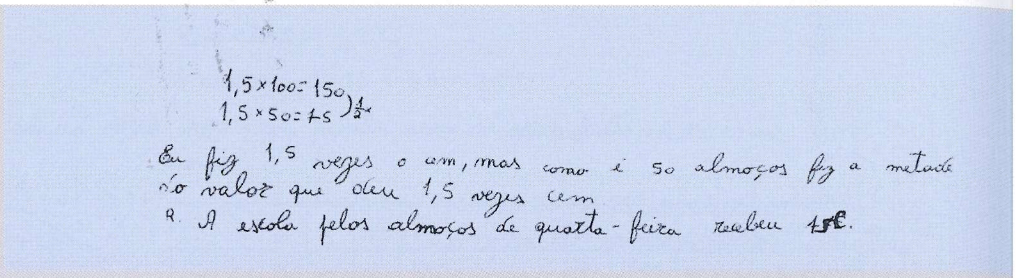
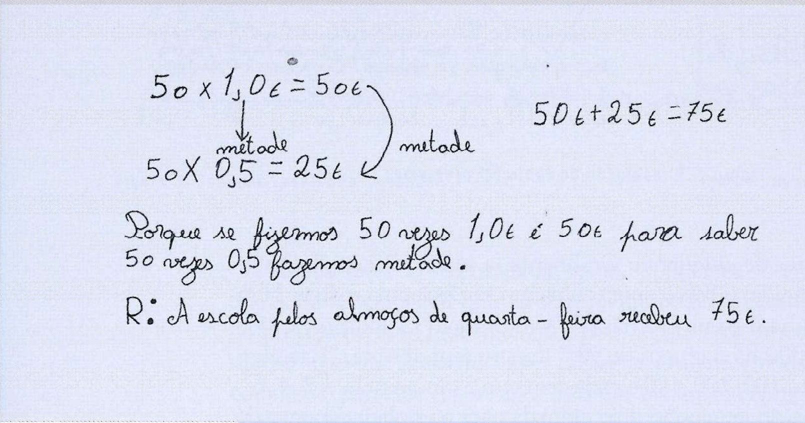


Figura 8. Resolução da Diana [1º problema].

Figura 9. Resolução do Bernardo [1º problema].



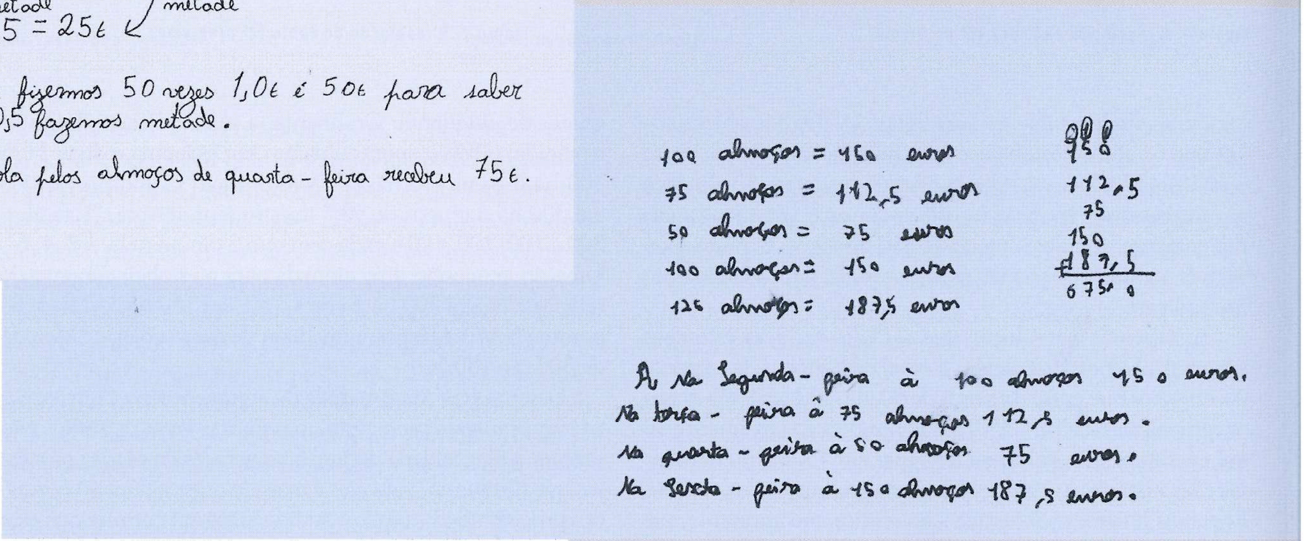


Figura 11. A resolução do Gil [2º problema].

Nos exemplos seguintes, podemos constatar na diversidade de resoluções que surgiram que estas estratégias são usadas para simplificar os cálculos, mas o sentido de número e a capacidade de percepção sobre os efeitos que as operações neles exercem não se perdem, ao contrário do que acontece muitas vezes no cálculo vertical, uma vez que separar o número por ordens compromete o raciocínio sobre os números envolvidos. Se as crianças não tiverem desenvolvido o hábito de criticar e verificar os resultados, estes podem ser completamente desadequados à solução do problema sem que a criança o note de forma autónoma.

Na resolução apresentada na figura 8, constatamos que a Diana tem uma percepção clara de que 1,5€ corresponde a 1 euro mais metade de 1 euro e mobiliza a multiplicação e divisão de forma inter-relacionada. Tem ainda a preocupação de apresentar uma explicação escrita sobre a razão do recurso à metade.

As resoluções representadas nas figuras 9 e 10 diferem da anterior na medida em que o processo escolhido não partiu da decomposição de 1,5€, mas também aqui se observa como a sucessiva aplicação de relações multiplicativas, multiplicar por 100, por 10, o dobro e a metade, imprimem uma grande flexibilidade no cálculo. Na estratégia da figura 9, o Bernardo, para calcular o preço de 50 almoços, parte de cem vezes 1,5€ e depois calcula a metade deste valor, representada simbolicamente por 1/2. Na da figura 10, o Gil parte de 10 vezes 1,5€ e aplica sucessivamente o dobro até ao cálculo do preço de 40 almoços. Ao verificar que só lhe faltava saber o preço de 10 em vez de multiplicar adiciona o valor de 10 almoços. Não apresenta nenhuma explicação escrita, mas a representação simbólica mostra com clareza o encadeamento do seu raciocínio.

No segundo problema (ver figura 1) foram também bastante diversificados os processos utilizados pelos alunos desta turma, sendo a primazia dada à multiplicação.

Foram poucos os alunos que optaram por calcular o dinheiro obtido nos almoços de cada dia da semana e adicionar, de seguida, os 5 totais obtidos para obter o dinheiro que a escola realizou nos almoços da semana. Na figura 11 temos um exemplo dessa estratégia. É de realçar que pertence ao

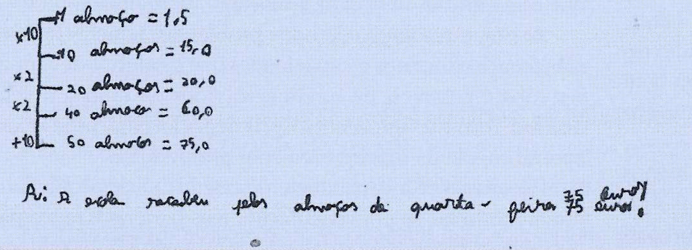


Figura 10. A resolução do Gil [1° problema].

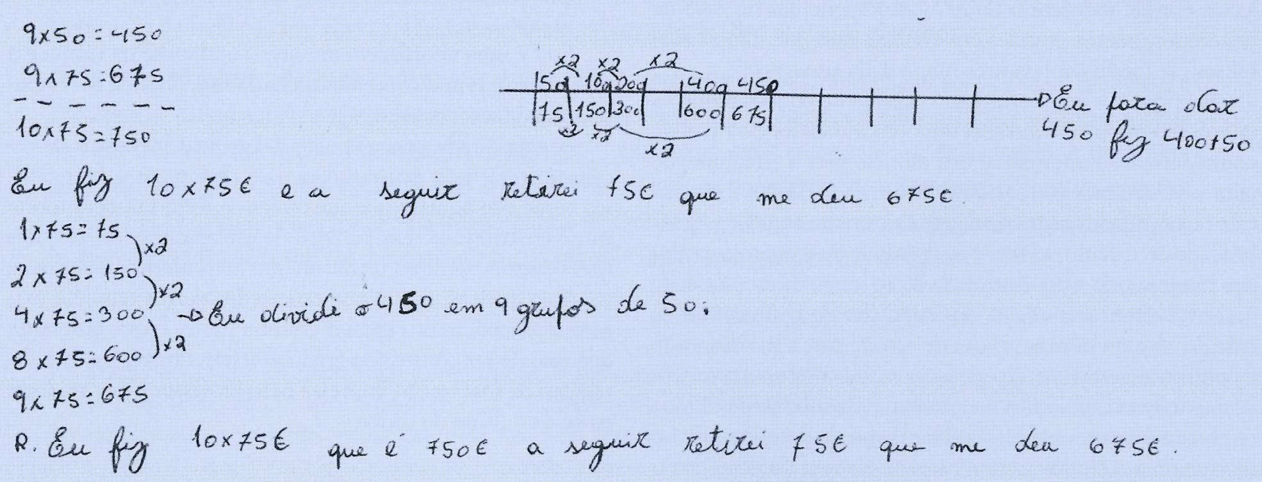


Figura 12. Resolução do Mário [2° problema].

Gil (figura 10), mas aqui não está explícito como é que chegou aos valores apresentados em cada um dos dias da semana. É natural que também tenha estabelecido uma série de relações, recorrendo ao que já sabia do problema anterior, mas não o expressou através de operações ou da escrita. O incentivo para clarificar o seu registo, evidenciando os modos de pensar para chegar aos vários cálculos intermédios, seria uma boa estratégia para continuar a desenvolver a sua capacidade de argumentação e de representação. O algoritmo da adição com números decimais é utilizado correctamente e é pertinente a sua mobilização, uma vez que estão envolvidos números para os quais o cálculo mental se torna mais difícil. No entanto, podia ser incentivada a associação das parcelas para as quais o cálculo mental não oferece dificuldade.

Outros alunos resolveram o 2° problema, partindo do preço de 50 almoços. Para isso, após terem calculado que o número total de almoços da semana era 450, encontraram o número de vezes que o 50 integrava esse número, tal como nos processos apresentados nas figuras 6 e 7 pelos alunos da outra turma do 3° ano.

Destaco a resolução representada na figura 12 por conter várias estratégias de resolução para a mesma solução. A capacidade de representação é um ponto crítico no desenvolvimento do raciocínio, aqui podemos observar a destreza com que o Mário lida com a construção de tabelas e como passa dum modo de resolução para outro. Sabendo que em 450 há 9 grupos de 50, calculou primeiro o preço de 10 grupos de 50 almoços e depois retirou 75€, chegando a 675€. Este parece ter sido o seu primeiro passo. Resolve ainda apresentar outra estratégia: faz uma tabela começando no preço de 50 almoços e, através de dobros sucessivos, chega ao de 400. Na coluna do 450 adiciona 75. A adição foi mobilizada porque o raciocínio multiplicativo usado antes não funcionava neste caso. Podemos constatar que ainda apresenta uma outra forma para resolver o problema: para chegar ao produto de 9 × 75, começa em 1 × 75 e prossegue com sucessivos dobros, tendo o cuidado de registar esse procedimento através de setas. Este é o processo que esta turma utiliza para estudar as tabuadas e que este aluno teve a capacidade de transpor para esta situação.

Síntese

Nas duas turmas do 3° ano de escolaridade verificamos que as crianças lidaram com a resolução deste problema com recurso a processos diversificados, nomeadamente a construção de tabelas, o cálculo por etapas, a contagem por saltos, a aplicação de relações numéricas e explicação por palavras de procedimentos usados. Estes processos reflectem um bom domínio e flexibilidade no cálculo, mesmo quando estão envolvidos números decimais.

As várias representações apresentadas por estes alunos evidenciam uma forte compreensão de procedimentos simbólicos, mas todos eles são alternativos aos algoritmos formais. A aposta é que quando estes forem ensinados, os alunos já tenham desenvolvido as ferramentas necessárias que os torne críticos para optarem por eles se forem mais vantajosos, porque reduzem o tempo gasto a calcular no caso de haverem números grandes envolvidos, mas que não os mobilizem se forem irrelevantes numa dada situação.

A opção por uma estratégia consistente com os números envolvidos no problema será um bom indicador do nível de conhecimento matemático dos alunos, mas a sensibilidade para ver os números e as suas relações de inclusão, e encontrar regularidades numéricas que imprimam rapidez e flexibilidade no cálculo, só terá possibilidade de crescer se os alunos tiverem tido a oportunidade de ao longo da escolaridade desenvolverem estratégias diversificadas de contagem e de cálculo. A experiência no uso de estratégias, a sua discussão e confronto comparativo em termos de maior ou menor eficácia virão a constituir a competência de cálculo do aluno.

Este é um percurso demorado e exigente porque é preciso dar tempo aos alunos para pensarem nas suas próprias estratégias, incentivar a justificação escrita e proporcionar espaços de discussão colectiva de ideias. A colocação de questões mobilizadoras do raciocínio, que permitam desmontar mal-entendidos, completar ideias, provar afirmações, progredir na compreensão dos conceitos é uma tarefa que exige do professor uma constante interacção e uma consciência muito clara do que deseja que os seus alunos aprendam e do que está em causa em cada situação.

Assim, a resolução de bons problemas, aqueles que têm subjacente conceitos e capacidades que os alunos devem desenvolver, passíveis de serem resolvidos de modos diversificados, torna-se um recurso privilegiado para promover a aprendizagem da matemática com profundidade.

Desenvolver a capacidade de resolução de problemas e o raciocínio faz-se em articulação, mas para isso, tanto para o professor como para os alunos, a atenção não estará apenas na resposta ao problema, mas no modo como se pensa, nas estratégias que se usam, nos conceitos e capacidades que se mobilizam e na maneira como são apresentados e discutidos.

Esta é uma abordagem em que o ambiente da turma e a visão que se tem da aprendizagem da matemática desempenham um factor crucial.

A capacidade para explicar e justificar processos de resolução terá mais possibilidades de crescer se o fizer muitas vezes e se aqueles que me ouvem e lêem também forem intervenientes: os seus pedidos de esclarecimento, as questões e outras opiniões tornar-me-ão mais atento, reflexivo e aberto a críticas, mas o que espero dos outros também exige um procedimento igual da minha parte. É este ambiente que tem de ser construído gradualmente, através de uma dinâmica de interacção impressa pelo professor e que irá fazer parte da cultura da turma.

Alice Carvalho

EB1 /JI Orlando Gonçalves — Agrupamento de Alfornelos

Formadora na equipa de Formação Contínua de Matemática para professores do 1° ciclo na ESE de Lisboa

Raciocinar em ... Jornalismo

A primeira página está em branco. Como espelhar nela o dia? Como retratar o que de relevante se passou? E o que é relevante? Porquê? Cruzam-se opiniões e argumentos. Há dois terramotos na Ásia mas a crise financeira atinge mais pessoas. Vamos repetir a ideia de que há pânico nas bolsas? Não, isso já toda a gente sabe. É a segunda-feira mais negra nas bolsas desde 1987? É esse o título. E em Portugal, o que há de novo? A bolsa de Lisboa teve a maior queda desde que foi criada? É um dado significativo, um recorde histórico. Puxar por isso. O governo garante a segurança dos depósitos? Quem diz? É o ministro? Também merece destaque. Aos poucos, alinham-se os títulos. Fiéis à realidade mas, ao mesmo tempo, claros, concisos, atractivos. É preciso escrever com os olhos de quem lê, escolher as imagens que gostaríamos de ver se não as tivéssemos escolhido. A pouco e pouco, as páginas são preenchidas neste jogo tenso. A ideia faz-se ao papel, o papel à banca. E há um novo jornal na rua, feito já a pensar no seguinte. É assim que, todos os dias, de forma quase automática, mobilizo o meu raciocínio.

Nuno Pacheco **[Jornalista]**
Director-adjunto, PÚBLICO