

O Problema do ProfMat 2008

O concurso apresentado aos participantes no ProfMat 2008 de Elvas consistiu na resolução do problema 2008 Caixas de Rebuçados:

Temos 2008 caixas, cada uma delas contendo respectivamente 1, 2, 3, 4, ..., 2007 e 2008 rebuçados. Uma operação consiste em escolher um conjunto de caixas e retirar de cada caixa o mesmo número de rebuçados. Qual é o número mínimo de operações necessárias para esvaziar todas as caixas?

Dos quinze concorrentes, doze indicaram correctamente o número mínimo de operações: 11 (um número bastante baixo, para surpresa de alguns).

Houve abordagens distintas. A Lénia, o Daniel, o Eduardo, a Iva & Angelino, a Jonita e o Raul começaram por analisar o problema para casos mais simples, com poucas caixas, para daí tentar generalizar. Os resultados obtidos encontram-se representados na tabela 1.

Analisando a tabela, vemos que o número de operações n aumenta de uma unidade sempre que o número de caixas C chega a uma potência de 2. Assim, é de prever que n seja a solução da condição $2^{n-1} < 2^n$. No nosso problema, $C = 2008$ e $2^{10} \leq 2008 < 2^{11}$. Logo, seriam precisas 11 operações.

O Eduardo apresentou este resultado de forma diferente: $n = \text{int}(\log 2C) + 1$.

Para levar a cabo estas 11 operações é preciso definir, em cada uma delas, que caixas escolher e quantos rebuçados tirar. Há muitas possibilidades, embora parecidas entre si ou até equivalentes (mesmas operações mas por ordem diferente). Algumas respostas apresentam a sucessão de operações, sem indicação explícita da estratégia seguida, mas outras indicam-na. Gostámos da que a Jonita e o Avelino indicaram. Ei-la, por palavras ligeiramente diferentes:

Número r de rebuçados a retirar: metade dos que estão na caixa mais cheia (se ela tiver um número ímpar, r é metade arredondado por excesso).

Caixas a escolher: todas as que tiverem r ou mais rebuçados.

Teremos então a seguinte evolução da situação expressa na tabela 2.

Tabela 1

Nº de caixas C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nº de operações n	1	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	

Tabela 2

Operação	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Rebuçados na caixa mais cheia	2008	1004	502	251	125	62	31	15	7	3	1
Rebuçados a retirar	1004	502	251	126	63	31	16	8	4	2	1

Mas, como salientam Iva & Nuno Angelino, o número de rebuçados a retirar não tem de ser sempre o indicado. Com efeito, na primeira operação, poderíamos retirar entre 985 e 1024 rebuçados.

Parabéns ao Raul e ao Nelson que acrescentaram demonstrações (muito parecidas) de que o valor mínimo do número de operações é 11. Não são fáceis e ocupam bastante espaço.

Uma curiosidade: as respostas da Sara e do Francisco foram entregues numa bela caixa, a caixa 2009, cheia de rebuçados! Bela ideia, que a organização agradeceu...

Terminamos com a frase com que a Sara concluía a sua resolução:

Como podemos observar, no final todas as caixas estão vazias (e quem comeu os rebuçados está muito, muito cheio...).

Lista de participantes

Individuais: Avelino Sousa; Cláudia Vieira; Daniel Castanho; Eduardo Cunha; Fausto da Silva; Francisco Estorninho; Jonita Ralha; Lénia Mestre; Nelson Sousa; Patrícia Sampaio; Raul Aparício Gonçalves; Sara Gil.

Em equipa: Iva & Nuno Angelino; João Oliveira & Berta Alves; Ricardo Poças & Margarida Abreu.

Premiados e Prémios

- 1º. Raul Aparício Gonçalves (*Unidade TI-nSpire, oferta Texas Instruments*)
- 2º. Jonita Ralha (*Calculadora Gráfica Casio CFX9750, oferta Beltrão Coelho*)
- 3º. Nelson Sousa (*Jogo Timberr, oferta AFR*)
- 4º. Avelino Sousa (*Livro "O Assassino das meias verdes", oferta Gradiva*)
- 5º. João Oliveira & Berta Alves (*Livro "Desafios 10", oferta Afrontamento*)

Atenção: Os prémios devem ser levantados até 30 de Julho de 2009. Por favor, contactar a sede da APM em Lisboa.