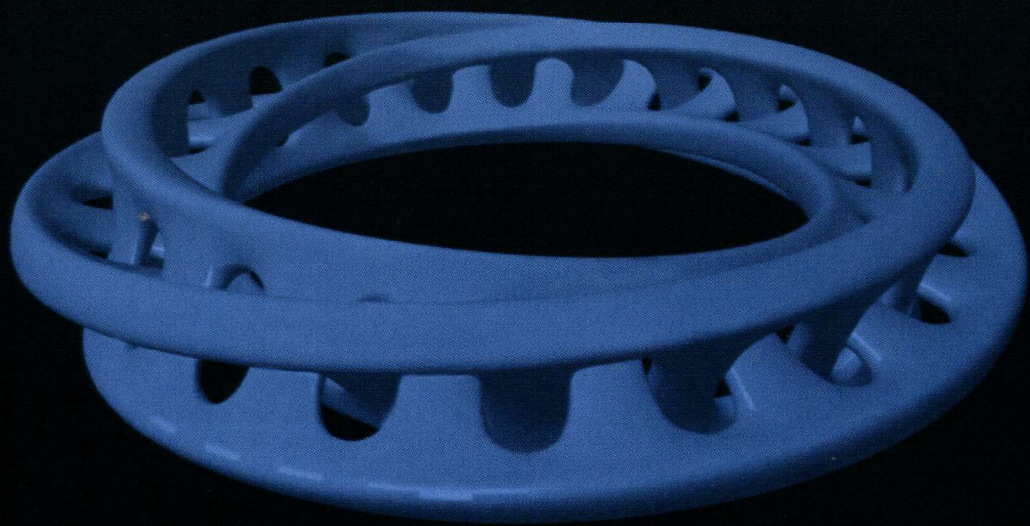


eflexões sobre a geometria (1)[1]

duardo Veloso

'alvez a melhor maneira de caracterizar este artigo seja dizer ue tenta responder a questões do tipo:

- o que fazem os geómetras?
- de que problemas se ocupam?
- que métodos usam para resolver esses problemas ou para provar as suas afirmações?

)uem leu o livro *Experiência Matemática* de Reuben e Hersh irá imediatamente que se trata então de uma espécie de escrição da experiência geométrica, e não estará a errar uito... No entanto, desde já deve ser dito que a descrição ue vai ser esboçada diz respeito mais à própria geometria do ue ao ensino da geometria, embora seja natural que nesta evista os dois aspectos sejam sempre considerados.[2]

Para facilidade de organização, tomaremos dois aspec- os da experiência geométrica — construções geométricas transformações geométricas — como focos da nossa reflexão. Em qualquer caso, o nosso campo de reflexão será o da eometria elementar.[3]

1. Construções geométricas

As construções geométricas que fazemos desde a nossa infância são tão naturais que somos levados facilmente a pensar que é um conceito que não precisa de envolver qualquer reflexão... é qualquer coisa pela qual podemos passar rapidamente, para abordar depois noções mais complexas. No entanto, se considerarmos que os *Elementos* de Euclides — que se tornaram, com o decorrer do tempo, num paradigma da apresentação (e mesmo quase da construção) das teorias matemáticas — são constituídos, em grande parte, por problemas e resultados relativos a construções geométricas, e que alguns dos mais célebres resultados no campo da geometria são teoremas que afirmam a impossibilidade de certas construções geométricas, como a trissecção do ângulo, chegaremos à conclusão que esse conceito merece um esforço de análise e de reflexão. A melhor maneira de o fazer é de resto consultar os *Elementos* e ver com cuidado o que, em termos modernos, está subjacente, numa proposição relativa a uma construção geométrica, ao enunciado, à construção e à demonstração que Euclides apresenta.

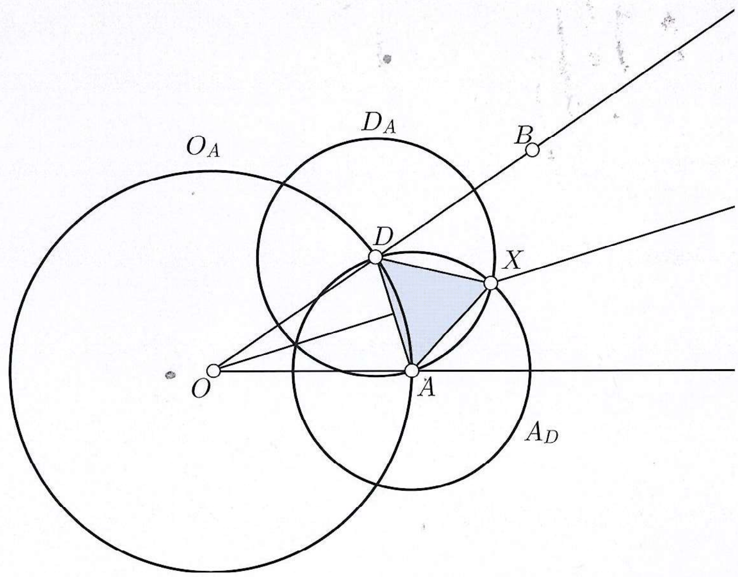


Figura 1

Escolherei a proposição I.9 (proposição 9 do livro I), referente à construção da bissectriz de um ângulo dado.[4]

Numa proposição deste tipo existem sempre três partes:

- o enunciado, que é a proposta de um problema de construção;
- a construção, que é a descrição em sequência dos passos da construção geométrica, incluindo a validação de cada um deles;
- a demonstração, ou seja a prova de que o objecto que resultou da nossa construção verifica as condições do enunciado; trata-se de uma sequência de afirmações e da sua justificação.

Vejamos, no caso da Prop. I.9, em que consiste cada uma dessas três partes.

Enunciado

PROP. I.9. *Bissectar um ângulo rectilíneo dado*

Embora a definição de Euclides não seja nestes termos, podemos partir da definição de ângulo usual, ou seja como conjunto de duas semirectas OA e OB com a mesma origem. Assim, supomos dado o ângulo AOB (veja a figura 1).

Construção

A construção é constituída por uma sequência finita de acções permitidas. As acções permitidas nos *Elementos* de Euclides estão expressas nos três primeiros postulados, que reescrevemos da seguinte forma:

POST. I. *Dados dois pontos, é permitido unir um ao outro com um segmento de recta.*

POST. II. *Dado um segmento de recta, é permitido prolongar o segmento, de forma contínua, numa recta [ou semirecta].*

POST. III. *Dados dois pontos, é permitido traçar uma circunferência tendo um dos pontos como centro e passando pelo outro.*

São ainda acções permitidas a construção de pontos como intersecção de figuras resultantes de acções permitidas anteriores.

A *sequência de acções* é então a seguinte (designamos em geral por XY a circunferência de centro X e passando por Y e colocamos entre parênteses rectos os postulados que permitem cada acção:

- traçar a circunferência O_A [Post. III], e construir o ponto D como intersecção da semirecta OB com O_A;
- traçar a circunferência A_D [Post. III];
- traçar a circunferência D_A [Post. III], e construir o ponto X como intersecção de A_D com D_A, de modo que OX intersecte o segmento D_A;
- unir o ponto O e o ponto X pelo segmento OX [Post. I], prolongar o segmento OX [Post. II], e construir assim a semirecta OX.

Neste ponto, Euclides anuncia implicitamente que a construção está concluída, ao afirmar que OX bissecta AOB, o que equivale a afirmar que o ângulo AOX é igual ao ângulo XOB.

Segue-se como dissemos a

Demonstração

A demonstração é uma sequência de afirmações, cada uma seguida da sua justificação:

- os dois lados OA e OX (do triângulo OAX) são iguais aos dois lados OD e OX (do triângulo ODX) [OA e OD são raios de c_1 e OX é comum];
- a base AX é igual à base DX [o triângulo AXD é equilátero, pela proposição I.1[5]], logo os ângulos AOX e DOX são iguais [pela prop I.8[6]], portanto OX bissecta o ângulo AOB.

O que é importante compreender é que, em suma, esta construção geométrica consiste em:

- partir de um conjunto de pontos — neste caso A, O e B —, a que poderíamos chamar os *pontos base* da construção;
- obter uma sequência finita de pontos — neste caso $AOBDX$ — cada um dos quais está numa das duas condições seguintes:
- ou é um ponto base
- ou pode ser construído a partir dos pontos anteriores da sucessão por meio de *acções permitidas*.

Aos pontos assim obtidos chamaremos *e-construtíveis* (o prefixo e significa "na geometria euclidiana"). E diremos ainda

Compasso euclidiano e compasso "moderno"

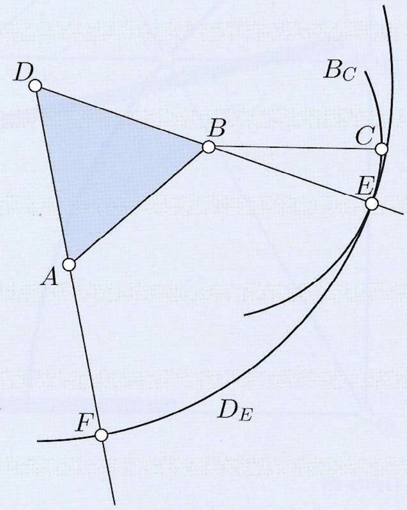
De acordo com os postulados dos *Elementos*, a acção permitida ao compasso é o traçado de uma circunferência, dados o centro e um ponto por onde passe. O transporte de segmentos, útil em tantas construções geométricas, não é permitido. No entanto, Euclides ultrapassa esta limitação (que tinha imposto a si próprio!) com as suas duas primeiras proposições: a primeira (Prop. I.1) diz respeito à construção do triângulo equilátero e a segunda (Prop. I.2) é uma demonstração maravilhosa de que, afinal, com o seu compasso e a sua régua não graduada, é capaz de transportar segmentos:

Prop. I.2. Construir um segmento igual a um segmento dado e com uma das extremidades num ponto dado.

Sejam BC e A o segmento e ponto dados.

Construção: segmento AB [Post. I]; triângulo equilátero ABD sobre segmento AB [Prop. I.1]; semirectas DB e DA [Post. II]; circunferência B_C [Post. III], e ponto de intersecção E; circunferência D_E [Post. III], e ponto de intersecção F; AF é o segmento pedido na Prop. I.2.

Demonstração: uma das extremidades de AF é A; BC igual a BE [raios de B_C]; DE igual a DF [raios de D_E]; DA igual a DB [ABD é um triângulo equilátero]; mas então $AF = DF - AB$ e $BE = DE - AB$ são iguais, e portanto $AF = BC$.



que uma circunferência é *e-construtível* se o seu centro e o ponto por onde passa são e-construtíveis, e que uma recta é *e-construtível* se passa por dois pontos e-construtíveis.

George Martin, no livro *Geometric Constructions*, compara as construções geométricas a um jogo. Na realidade, as *acções permitidas* que enunciámos são as *regras do jogo* das construções geométricas euclidianas, tal como os movimentos permitidos aos diferentes tipos de peças do xadrez constituem as regras do xadrez.

Note-se que existem diferentes modos de exprimir as regras no jogo das construções geométricas. No caso da geometria euclidiana, dizemos muitas vezes que é a geometria da régua não graduada e do compasso euclidiano, ou seja, as regras são dadas em termos dos instrumentos que permitem realizar as acções permitidas. Mas é óbvio que não basta apresentar os instrumentos, teremos também que esclarecer com precisão o que é permitido fazer com esses instrumentos (veja caixa *Compasso euclidiano e compasso "moderno"*).

1.1. Mudando as regras do jogo

O "jogo" das construções geométricas permite analisar bons exemplos de um dos modos como se processa o desenvolvimento da geometria (de resto, o da matemática em geral). Em termos dos instrumentos que podemos utilizar, podem por exemplo existir problemas que resistem às nossas tentativas de resolução com os instrumentos permitidos, e seremos assim levados a inventar ou descobrir — se preferirem — outros instrumentos/processos para os resolver. Por outro lado, a nossa curiosidade intelectual pode levar-nos a colocar questões do tipo seguinte: perderemos muitas possibilidades, se usarmos apenas o compasso e abdicarmos de utilizar a régua não graduada?

Vemos assim aparecer naturalmente duas direcções de desenvolvimento que também têm expressão em outros domínios da matemática, e que no caso das construções geométricas foram percorridas com resultados ricos e muitas vezes surpreendentes. Vamos exemplificar brevemente estes dois caminhos, esperando abrir a curiosidade dos leitores para outras leituras mais completas.

1.2. Inventando instrumentos ou novos processos

Deve ter sido com alguma surpresa que os gregos, depois de verem como era fácil a bissecção de um ângulo com régua não graduada e compasso (como explicado por Euclides na Prop. I.9 que acabamos de ver), depararam com grandes dificuldades ao querer trissectar um ângulo utilizando os mesmos instrumentos. Há até quem especule que os gregos talvez tivessem já a convicção da impossibilidade da trissecção nestas condições, e fosse por isso que recorreram à utilização de outros processos, em particular de curvas especiais para a resolver.

Hippias de Elis (segunda metade do séc V a.C.) inventou a *quadratriz* para resolver a trissecção do ângulo. O nome quadratriz deriva do facto da curva poder ser também utilizada na resolução de outro problema clássico da geometria grega, a quadratura do círculo (dado um círculo de raio r, determinar um segmento a tal que o quadrado de lado a tenha a área igual à do círculo).

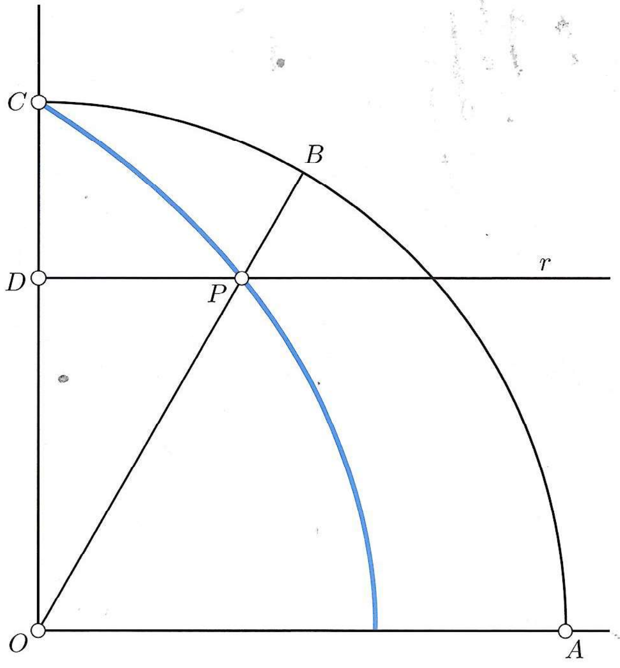


Figura 2A

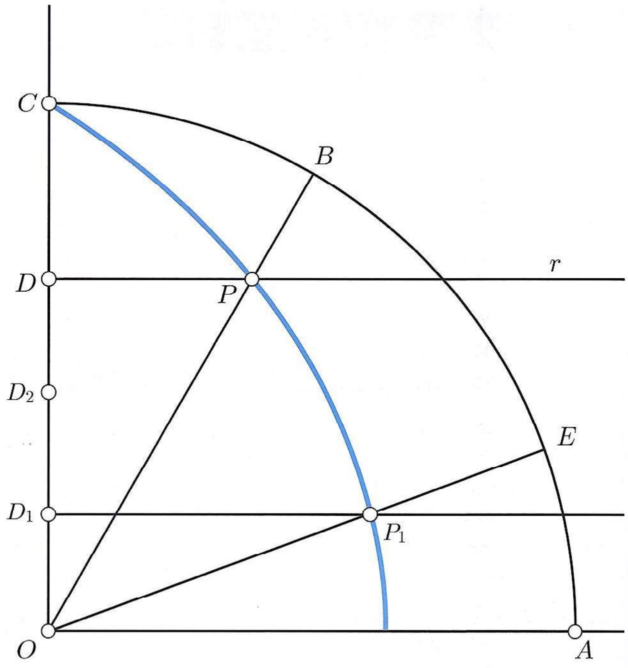


Figura 2B

A quadratriz admite a seguinte definição (ver figura 2A):

- OAC é um quarto de circunferência; D é um ponto do segmento OC e B um ponto do arco de circunferência AC; r é uma semirecta com origem em D e paralela a OA;
- D e B partem simultaneamente de C e movem-se com movimentos uniformes sobre o segmento CO e o arco CA, atingindo simultaneamente O e A;
- a quadratriz é a curva descrita pelo ponto P, intersecção da semirecta r e do segmento OB.

Vê-se imediatamente como a quadratriz resolve o problema da trissecção do ângulo (e mesmo a divisão de um ângulo em qualquer número de partes iguais).

Seja AOB o ângulo a trissectar (figura 2B).

Pelo teorema de Tales, trissecta-se o segmento OD, obtendo-se assim os pontos D_1 e D_2. Obtém-se o ponto P_1 como intersecção da quadratriz com a semirecta passando por D_1 e paralela a OA. E depois o ponto E como intersecção da semirecta OP_1 com a arco de circunferência CA. O ângulo AOE tem uma amplitude igual a 1/3 da de AOB.

Note-se um processo de trabalho muito característico em geometria, que foi utilizado nesta solução da trissecção, e que retomaremos mais tarde na parte deste artigo relativa às transformações geométricas:

Em termos breves, o que fizemos foi o seguinte:

- sabemos dividir um segmento de recta em três partes iguais, mas não sabemos fazer essa construção para um ângulo;
- a quadratriz estabelece uma correspondência biunívoca entre um segmento e um arco de circunferência;
- aproveitando esta correspondência, transferimos o problema do arco de circunferência para o segmento, resolvemos o problema no segmento, e depois transferimos a solução para o arco de circunferência.

A invenção da quadratriz é um exemplo típico da primeira direcção de desenvolvimento da geometria que apontámos: a criação de novos instrumentos/processos para resolver problemas insolúveis com os instrumentos da geometria euclidiana.

Outros curvas que resolvem a trissecção são por exemplo a concóide de Nicomedes (c. 200 a.C.), a hipérbole, utilizada por Papo de Alexandria (c. 290–350 a.C.), o caracol de Étienne Pascal (c. 1650), a parábola (intersecção com uma circunferência), solução de Descartes no livro *La Géométrie* (1637), e a *cycloidum anomalarum* de Tommaso Ceva (1648–1737).[7]

No mesmo sentido, e relativamente à trissecção e aos outros problemas clássicos, a duplicação do cubo e a quadratura do círculo, outras curvas foram inventadas e/ou utilizadas, como por exemplo na duplicação do cubo duas parábolas ou uma parábola e uma hipérbole, por Menecmo (c. 375–325 a.C.) e a cissóide de Diocles (c. 240–c. 180 a.C.). Na quadratura do círculo talvez o exemplo mais notável seja a espiral de Arquimedes (280–212 a.C.).

Ainda no sentido de alargar os processos para resolver problemas que resistem ao compasso e à régua não graduada, podemos referir a invenção de novos instrumentos, como por exemplo a *régua graduada* (uma régua com duas marcas

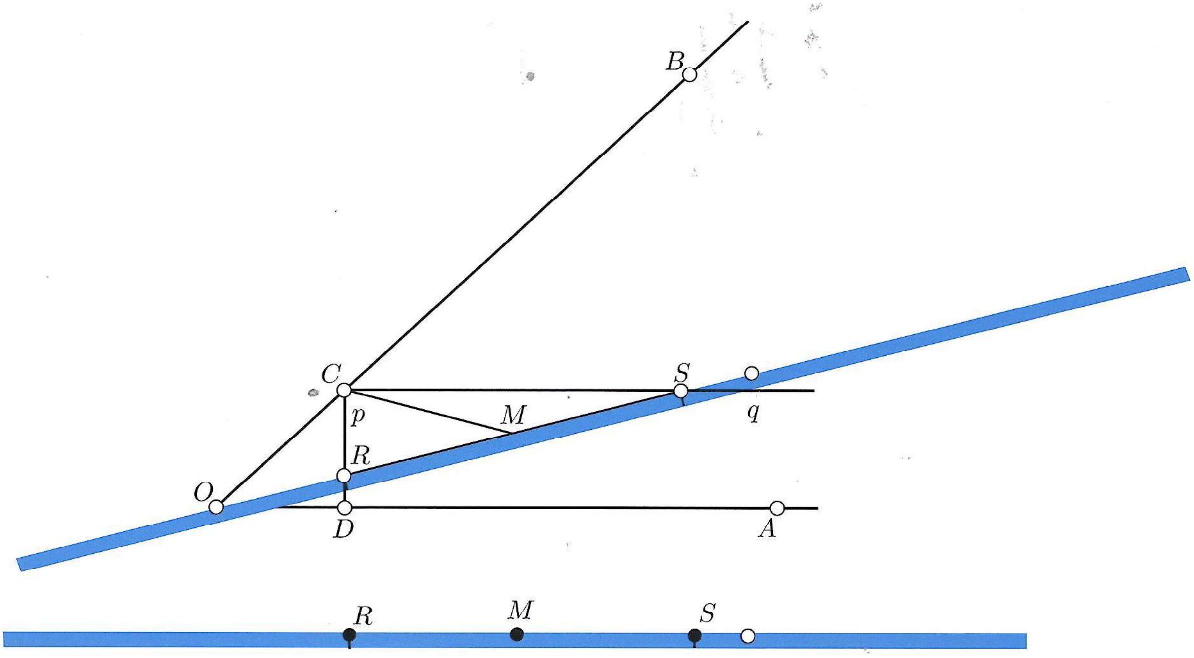


Figura 3

num dos bordos). Naturalmente, é preciso especificar — tal como Euclides fez para o compasso e a régua não graduada —, que construções são admissíveis com o novo instrumento. De maneira intuitiva[8], podemos dizer que a *acção permitida* com a régua graduada consiste em traçar uma recta, de modo que as duas marcas estejam sobre dois pontos em duas rectas já construídas e a recta passe por um ponto também já construído. Na figura 3 mostramos como Papo, o último grande matemático grego da antiguidade, resolveu a trissecção com a régua graduada.[9]

Sendo dado o ângulo AOB a trissectar, e sendo R e S as duas marcas na régua, marca-se a partir de O e no lado OB do ângulo o segmento OC, de comprimento igual a metade do segmento RS. Traçam-se a perpendicular e a paralela a OA passando por C (representadas na figura pelo segmento p e pela semirecta q, respectivamente). Ajusta-se a régua de modo a que os pontos R e S fiquem sobre p e q e que R, S e O sejam colineares (utilizando a acção permitida com a régua graduada). Como o leitor concluirá facilmente, os triângulos OMC e CMS, em que o ponto M é o ponto médio do segmento RS, são isósceles, e daí concluirá que o ângulo SOC tem uma amplitude dupla da do ângulo OSC, que é igual a AOS (alternos-internos).

Portanto, a semirecta OS trissecta o ângulo AOB.

No livro de Yates referido na nota 7 encontrará numerosos instrumentos e mecanismos para a trissecção (um *instrumento de três hastes* usado por Étienne Pascal para traçar o seu caracol, o pantógrafo de Tommaso Ceva, o esquadro do carpinteiro, o trissector de Kempe, e muitos outros). Alguns destes instrumentos utilizam, de formas diversas, o mesmo princípio da inserção[10] da régua graduada.

Assim, observámos neste ponto, e relativamente às construções geométricas, uma linha de desenvolvimento da geometria que consiste em responder a desafios e problemas criando novos objectos, instrumentos e processos, expandindo assim a geometria. Historicamente, esta linha de desenvolvimento enriqueceu a geometria com numerosos novos objectos, cujo interesse e importância ultrapassou depois, em muitos casos, a razão inicial da sua consideração. O melhor e mais claro exemplo disto é a invenção das cónicas por Menecmo, utilizadas inicialmente "apenas" para resolver o problema da duplicação do cubo.

1.3. Restringindo as acções permitidas

Esta é uma segunda linha de desenvolvimento da geometria, no âmbito das construções geométricas. Iremos apenas estudar dois exemplos mais significativos, embora o leitor que fique interessado possa encontrar outros, no livro de George Martin já referido.

A. Só com o compasso

Imagine o leitor que se apresenta numa sessão de formação contínua em geometria apenas com o seu compasso. pois se esquece de levar a régua (não graduada). Estava previsto que nessa sessão o formador iria propôr problemas de construções geométricas extraídos dos *Elementos* de Euclides. O formador resolve aproveitar o seu esquecimento para propôr a todos que abdiquem da régua e utilizem apenas o compasso. No entanto, o formador enuncia o que é, nas novas condições, uma construção geométrica permitida:

Uma construção geométrica — na *geometria do compasso* — consiste em partir de um conjunto de pontos base (sejam

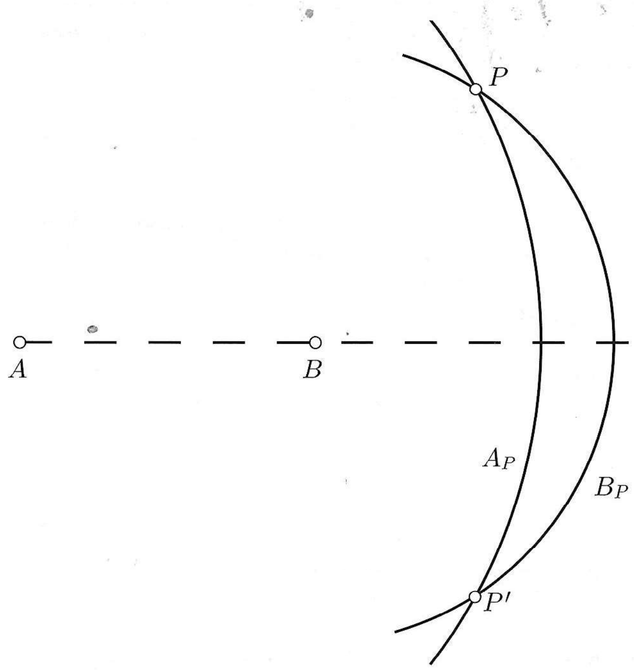


Figura 4

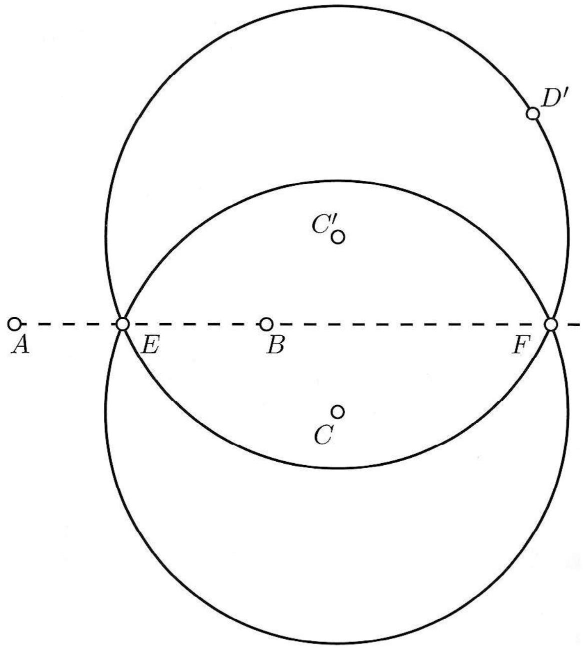


Figura 5

por exemplo A e B) e formar uma sequência finita de pontos $ABP_1P_2P_3\ldots, P_n$ em que cada um dos pontos

- ou pertence ao conjunto base
- ou é um ponto de intersecção de duas circunferências, cada uma das quais tem como centro um ponto anterior da sequência e passa por um ponto anterior da sequência.

Aos pontos da sequência chamaremos *c–construtíveis* (o prefixo c significa "na geometria do compasso"). Uma circunferência será *c–construtível* se tiver como centro um ponto c–construtível e passar por um ponto c–construtível. Uma recta será *c–construtível* se passar por dois pontos c–construtíveis.

O leitor deve ter neste momento uma dúvida... Se não tenho régua, como posso desenhar rectas? O que acontece é que, segundo estas regras do jogo, eu não tenho que *desenhar* as rectas, tenho apenas que construí-las, e isso significa encontrar para cada uma 2 pontos c–construtíveis por onde ela passe (em imaginação, está claro, mas não estamos nós em matemática?!).

Como muito provavelmente o leitor nunca teve oportunidade de abordar este assunto, irei apresentar brevemente duas construções geométricas nesta "geometria do compasso":

I. A imagem de um ponto c-construtível por meio de uma reflexão, cujo eixo é c-construtível, é um ponto c-construtível.
II. Se A, B, C e D são pontos c-construtíveis, e a recta AB intersecta a circunferência C_D mas não passa por C, então os pontos de intersecção da recta AB com a circunferência C_D são c-construtíveis.

Construção I.
Sejam A, B e P os três pontos base (por definição c-construtíveis), e seja AB o eixo da reflexão (ver figura 4; a recta AB está a tracejado porque é apenas uma recta imaginada, do ponto de vista do desenho). Se P pertencer à recta AB, a sua imagem P' coincide com P e portanto é c-construtível. Se P não pertence a AB, consideremos as circunferências c-construtíveis A_P e B_P. Designemos por P' a sua intersecção diferente de P. O ponto P' é a reflexão de P por meio da reflexão de eixo AB, porque A e B são equidistantes de P e de P'. Por outro lado, P' é c-construtível porque é intersecção de A_P com B_P.

Construção II.
Ver figura 5. Sejam C' e D' as imagens dos pontos C e D por meio da reflexão de eixo AB. De acordo com a construção anterior, C' e D' são pontos c-construtíveis e portanto a circunferência $C'_{D'}$ é c-construtível, do que resulta que E e F são c-construtíveis.

É possível demonstrar que todos os pontos e-construtíveis são c-construtíveis, e que portanto todas as construções da geometria euclidiana podem ser feitas apenas com o compasso (excepto no facto de não podermos "desenhar" as rectas...). É o chamado *teorema de Mohr-Mascheroni*.

O matemático George Mohr (1640–1697) nasceu na Dinamarca mas viveu a maior parte da sua vida na Holanda. Publicou em 1672 o livro *Euclides Danicus* que contém o resultado que acabámos de referir.

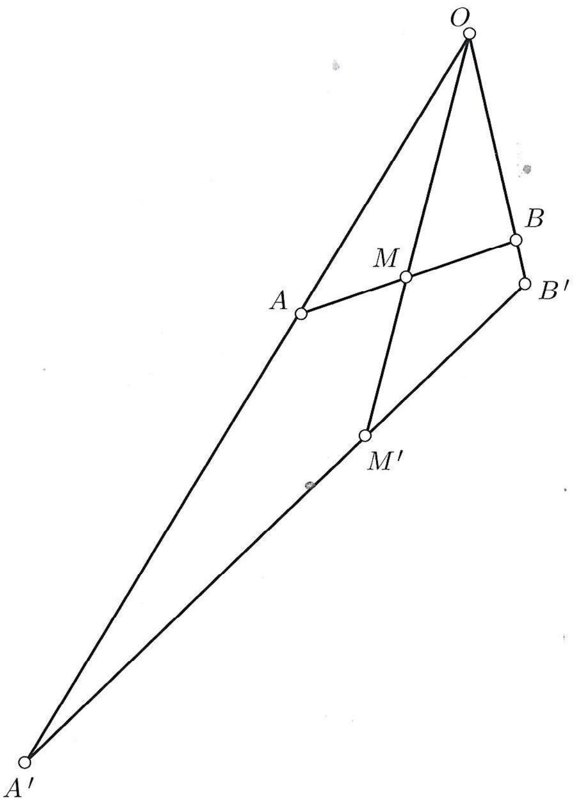


Figura 6

O livro ficou ignorado até ser descoberto por acaso e republicado em 1928. Entretanto Lorenzo Mascheroni (1750–1800), professor na Universidade de Pádua, demonstrou o mesmo resultado, independentemente de Mohr, e publicou-o no livro *Geometria del Compasso*, em 1797 (125 anos depois de Mohr).

Portanto, como acabámos de ver, se deixar a régua em casa e levar apenas o compasso para a sessão de formação contínua, pode divertir-se a fazer todas as construções clássicas da geometria euclidiana apenas com o compasso. Se quiser mesmo traçar os segmentos e as rectas, siga o conselho de George Martin: pegue numa folha de papel e faça uma dobragem bem vincada— fica imediatamente com uma régua não graduada.

Ocorre perguntar: e se levar apenas a régua, esquecendo-se do compasso? É o que vamos ver no ponto B.

B. Só com a régua

Que construções podemos levar a cabo, na geometria euclidiana, se dispomos apenas da régua não graduada? É natural termos poucas expectativas, mas note-se que temos tido algumas surpresas...

Um teorema do geómetra Jacob Steiner (1795–1863) afirma que não é possível constuir o centro de uma circunferência dada utilizando apenas a régua não graduada. A ideia de David Hilbert (1862–1943) para demonstrar este teorema é um exemplo de um processo interessantíssimo de demonstração em geometria, e por isso tem interesse referi-lo aqui. Mas vamos fazê-lo numa situação ainda mais simples.[11]

Mesmo algo tão elementar como a construção do ponto médio de um segmento dado AB não pode ser realizada apenas com a régua não graduada. Como provaria Hilbert esta afirmação? Sigamos o seu método:

- São dados os pontos A e B (pontos base da construção) e daí o segmento AB [Post. I]. Suponhamos (por absurdo) que existia um *processo de construção* do ponto médio do segmento AB, seja M. De acordo com a ideia que vimos de construção geométrica, isso significava que existia uma sequência finita de pontos M_1, M_2, ..., M, que terminava no ponto M e em que cada ponto ou pertencia ao conjunto dos pontos base (neste caso A e B) ou podia ser obtido a partir dos pontos anteriores por meio de construções permitidas pelos postulados I e II (os que dizem respeito apenas à régua). Trata-se portanto de um conjunto finito C de rectas (ou segmentos de recta) e das suas intersecções (terminando no ponto M). A ideia genial de Hilbert surge agora:
- Imaginemos um ponto O, exterior ao plano (seja α) onde fizemos esta construção do ponto M, e um outro plano (seja β), não passando por O, e efectuemos uma projecção central, de centro O, de α sobre β.
- As rectas e pontos do conjunto C têm por imagem um conjunto C' de rectas e pontos (em particular A', B' e M'), que descrevem exactamente o mesmo processo de construção do ponto médio de $A'B'$, a saber M'. Mas, nas condições indicadas, M' pode não ser o ponto médio de $A'B'$ (figura 6). Portanto não existe um processo de construção do ponto médio de um segmento dado, utilizando apenas a régua não graduada.

De acordo com Howard Eves, o matemático árabe Abû'l-Wefâ (940–998) considerou construções feitas com régua não graduada e um compasso enferrujado, ou seja, um compasso com uma única abertura (mas que se podia especificar para cada construção). Matemáticos italianos, no séc. XVI, consideraram uma hipótese mais restrita, em que a abertura do compasso enferrujado era dada uma vez por todas, e mostraram que todas as construções dos *Elementos* de Euclides podiam ser realizadas nessas condições. Mas o resultado definitivo foi alcançado pelos dois geómetras mais famosos do séc. XIX, J. V. Poncelet (1788–1867) e Steiner. Poncelet enunciou o teorema (agora designado por teorema de *Poncelet-Steiner*) e indicou um processo de demonstração e Steiner demonstrou-o completamente. O resultado é o seguinte:

Todas as construções da Geometria Euclidiana podem ser realizadas com régua não graduada, se for dada uma circunferência e o seu centro.[12]

1.4. Algebrizando, para demonstrar impossibilidades

Temos vindo a referir, neste artigo, por diversas vezes, os três famosos problemas de construções geométricas da antiguidade clássica. Naturalmente, os problemas eram propostos para serem resolvidos no âmbito da geometria euclidiana.

Mas, como é conhecido e foi referido, (muito provavelmente) a convicção de que eram insolúveis utilizando apenas os instrumentos e regras euclidianas levou à procura de soluções por assim dizer não ortodoxas, que resultaram num enorme enriquecimento da geometria.

Uma outra direcção de desenvolvimento e enriquecimento da geometria e da matemática em geral foi a procura da demonstração daquela impossibilidade. Como afirmou Felix Klein (1849–1925)[13]

> Que construções geométricas são, ou não, teoricamente possíveis? [...] Um aspecto singular relativo a esta questão é o facto da geometria elementar não fornecer qualquer resposta a esta questão. Temos que recorrer à álgebra [...]. Este novo método de ataque tornou-se necessário devido ao facto da geometria elementar não possuir um método geral, um algoritmo, [como é o caso da álgebra].

Não podemos descrever, mesmo sucintamente, por absoluta falta de espaço, em que consistiu esta linha de desenvolvimento da matemática e que processos de raciocínio foram assim criados e utilizados com êxito. Remetemos por isso para um artigo anterior (ver nota 4) que faz uma introdução, com profusa indicação de leituras, para o processo de algebrização das construções geométricas e para a sua aplicação com inteiro êxito nas demonstrações de impossibilidade.

Notas

1 a) Dedico este texto aos colegas do Grupo de Trabalho de Geometria da APM (GTG), dado que é também o resultado de muitos projectos em comum e de numerosas discussões. O GTG não é um grupo "perfeito" e temos muita dificuldade em levar rapidamente até ao fim todos ou mesmo a maior parte dos projectos que nascem da nossa imaginação. Mas é um ambiente de trabalho muito agradável, e é sempre com prazer que antevemos os sábados de manhã das nossas reuniões mensais.
b) Este artigo será publicado em duas partes (em números sucessivos da revista), sendo a presente referente às construções geométricas e a segunda às transformações geométricas.

2 No ProfMat 2008, em Elvas, o GTG, representado por três dos seus elementos, fez uma conferência, intitulada *Dez ideias para o ensino da geometria*, que consistiu essencialmente na descrição e exemplificação da experiência geométrica que o GTG entende dever ser a base da aprendizagem da geometria nos ensinos básico e secundário. Um documento PDF com as projecções feitas durante a conferência pode ser solicitado ao autor.

3 O leitor interessado em conhecer (muito) melhor a história dos métodos em geometria, e não apenas na geometria elementar, poderá ler com proveito o livro de Coolidge indicado na bibliografia deste artigo.

4 Já utilizei esta mesma proposição num artigo anterior, (E&M n°85, Nov–Dez 2005, *O triunfo da Álgebra*) e assim poderei referir alguns desenvolvimentos remetendo o leitor para esse artigo.

5 Prop. I.1. Construir um triângulo equilátero sobre um segmento dado. *Elementos* de Euclides na web:
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

6 Prop. I.8. Se em dois triângulos dois lados de um deles são iguais a dois lados do outro, e se as bases [isto é, os terceiros lados] são iguais, então os ângulos relativos aos pares de lados iguais são iguais.

7 Para a trissecção do ângulo, o livro a consultar é um detalhado trabalho de Robert Yates, *The Trisection Problem*. Sobre os problemas clássicos, consultar *Geometria: temas actuais*. No que se refere a curvas especiais, além da obra de Gomes Teixeira (ver bibliografia), consultar o livro muito completo *A Book of Curves*, de Lockwood.

8 Ver Martin, *Geometric Constructions*, cap. 9 (The marked ruler) para uma apresentação rigorosa deste ponto. O livro de George Martin — minha principal fonte de informações sobre este assunto —, é o livro a utilizar por quem queira estudar com alguma profundidade o tema das construções geométricas.

9 Note-se que o instrumento da régua graduada é usado em conjunto com o compasso. Deveríamos sempre dizer *compasso e régua graduada*, o que inclui portanto *o compasso e a régua não graduada* de Euclides.

10 Sobre este tipo de construção, denominado *neusis* (*verging* em inglês), será proveitoso completar estas informações demasiado breves com uma consulta da *História da Matemática* da Universidade Aberta (págs. 280 a 283, ver bibliografia).

11 Exemplo dado por Howard Eves, no livro *College Geometry*, pág. 180.

12 Demonstração na obra citada de Howard Eves, pag. 181–185 ou George Martin, obra citada, cap. VI.

13 No livro *Famous Problems of Elementary Geometry*.

Bibliografia

Coolidge, Julian Lowell. *A History of Geometrical Methods*. New York: Dover Publications Inc., 1968

Estrada, M. Fernanda et al. *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

Eves, Howard. *College Geometry*, Boston, Jones and Bartlett Oublishers, 1995

Gomes Teixeira, F. *Obras de Matemática*. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1915.

Klein, Felix. *Famous Problems of Elementary Geometry*. New York: Dover Publications Inc, 2003.

Lockwood, E. H. *A book of curves*. Cambridge: Cambridge University Press, 1961.

Martin, George. *Geometric Constructions*. New York: Springer, 1998.

Veloso, Eduardo. *Geometria: temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

Yates, Robert C. *The Trisection Problem*. Reston: NCTM, 1971.

Eduardo Veloso