A discutir também se desenvolve o raciocínio

Organizar uma discussão na sala de aula não é tarefa fácil, mesmo numa turma dita sem problemas de indisciplina, pelo menos dignos de registo. Ensinar a raciocinar é algo que não é nem simples nem linear. Parece-me ser consensual que em Matemática se deve desenvolver o raciocínio, porém julgo não ser consensual a forma como tal deve ser feito. A minha experiência, que venho aqui partilhar, é que tal pode ser feito através de discussões colectivas, ou seja, discussões com toda a turma.Vou contar um episódio que se passou com uma turma de 8° ano, a propósito de uma tarefa que se inspirou nas orientações metodológicas do Programa de Matemática (1) para o capítulo Semelhança de Triângulos do 8° ano "provar que a figura que se obtém unindo os pontos médios dos lados de qualquer quadrilátero convexo é sempre um paralelogramo" (p. 39). Os alunos realizaram, no *GSP* (em 45 minutos), uma tarefa que consistia em investigar o que observavam quando uniam os pontos médios de lados consecutivos de um quadrilátero qualquer. Durante a realização desta tarefa, formularam diversas conjecturas, além da sugerida no Programa de Matemática. Estas conjecturas foram discutidas no grupo turma na aula seguinte (90 minutos). No seguinte extracto (2) está em discussão o facto de em Matemática só se poder considerar um resultado demonstrado se os resultados que usamos nessa demonstração já tiverem sido demonstrados:

Lara — Se dividirmos o quadrilátero maior pelo interior e der dois. Então, quer dizer que as áreas dos outros triângulos vai ter de ser obrigatoriamente igual à do quadrilátero interior.

Professora — Escutem lá o que a Lara está a dizer que é importante.

Joana — Oh stôra, mas para isso tínhamos de demonstrar a conjectura, a' primeira que ela disse. Ainda não está demonstrada.

Professora — Ouviram o que a Joana disse?

Madalena — É verdade Joana.

Vários alunos ao mesmo tempo — É verdade Joana.

Aluna — Eu concordo com o que a Joana disse.

Aluna — Eu também.

Lara — Oh stôra. Mas...

Professora — Um de cada vez. Mas o que a Lara disse foi extremamente importante e o que a Joana disse também.

Aluna — Eu não ouvi o que a Lara disse.

Professora — Diz lá Lara, outra vez, para eles ouvirem.

Joana — Mas tens que conseguir demonstrar a outra.

Lara — Se a área do quadrilátero maior a dividir pela do quadrilátero menor é dois. Se conseguirmos demonstrar essa conjectura, então obrigatoriamente a área dos triângulos somada vai ter de ser igual à do quadrilátero interior.

Joana — Isso se demonstrares a outra.

Lara — Mas se demonstrarmos uma conseguimos demonstrar as duas.

Madalena — Mas primeiro tens de demonstrar aquela.

Joana — Exactamente.

Este episódio ilustra como as discussões colectivas podem desempenhar um papel importante no desenvolvimento do raciocínio. É aqui nítido que a Joana percebeu que a partir do momento em que demonstra uma conjectura já a pode usar para demonstrar outras e faz questão que os seus colegas também o percebam, o que parece ter acontecido. A professora interveio para chamar à atenção dos outros alunos para a posição destas alunas, reforçando a importância do que diziam. Está aqui presente uma das principais características do raciocínio dedutivo: todos os resultados que são deduzidos têm de o ser a partir de resultados já aceites como verdadeiros. Além disso, estas alunas admitem poder considerar um resultado verdadeiro, se conseguirem demonstrar outro, como ocorre com os matemáticos. A seguinte afirmação (3) de Andrew Wiles, a propósito de como começou seriamente a tentar demonstrar o Último Teorema de Fermat ilustra como tal acontece:"(...) ele contou-me que Ken Ribet tinha provado a ligação entre Taniyama-Shimura e o Último Teorema de Fermat. Fiquei electrizado. Sabia, nesse instante, que o curso da minha vida mudara, e que tudo o que tinha de fazer era provar a conjectura de Tanyama–Shimura." (p.223).

Notas

1. DGEBS (1991). *Programa de Matemática — Plano de organização do ensino-aprendizagem, Ensino Básico. 3°ciclo* (II). Lisboa: Ministério da Educação.
2. Retirado de Machado, S. (2005). *A demonstração matemática no 8° ano no contexto de utilização do Geometer's Sketchpad* (tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).
3. Retirada de Singh, S. (1998). *A solução do último teorema de Fermat.* Lisboa: Relógio d'Água.

Sílvia Zuzarte Machado
Escola Secundária de Casquilhos

Avaliar a capacidade de raciocinar matematicamente em questões de escolha múltipla, é possível?

Os alunos devem ser capazes de *raciocinar matematicamente* usando os conceitos, as representações e os procedimentos matemáticos. Isto é, no ensino básico devem ser capazes de: seleccionar e usar fórmulas e métodos matemáticos para processar informação; reconhecer e apresentar generalizações matemáticas bem como exemplos e contra-exemplos de uma afirmação; justificar os raciocínios que elaboram e as conclusões a que chegam; compreender o que constitui uma justificação e uma demonstração em Matemática e, também, usar vários tipos de raciocínio e formas de demonstração; desenvolver e discutir argumentos matemáticos; e formular e investigar conjecturas matemáticas (DGIDC, 2007). No ensino secundário, devem ser capazes de justificar processos de resolução, encadear raciocínios, confirmar conjecturas e demonstrar fórmulas e alguns teoremas (ME, 2001). Será possível avaliar estas capacidades através de questões de escolha múltipla?

A capacidade de raciocinar matematicamente desenvolve-se através de experiências que proporcionem aos alunos oportunidades que incentivem a reflexão sobre o seu próprio pensamento. Assim, devem ser confrontados com questões do tipo: *Porquê? Porque será que isso acontece? O que acontece se…? A resposta está bem justificada? Haveria outras justificações?* Estas questões têm por objectivo levantar dúvidas e criar incertezas para que os alunos clarifiquem, desenvolvam e organizem os seus raciocínios. Será possível proporcionar estas oportunidades quando nos limitamos a solicitar a indicação da letra identificativa da alternativa correcta, como acontece, por exemplo, no exame nacional do ensino secundário, 12° ano, Prova Escrita de Matemática A? Ou quando se pede aos alunos para colocarem o símbolo "X" em questões do tipo *Qual das quatro igualdades…* ou *Qual dos seguintes gráficos…*, como podemos encontrar no exame nacional de Matemática do 3° ciclo? Analisemos estas questões a partir de dois exemplos:

i) Na 1ª chamada de 2008 do exame do 3° ciclo, a partir da leitura de um gráfico era solicitada a indicação de *qual das quatro igualdades que se seguem permite calcular a diagonal do ecrã de um televisor, em centímetros (c), dado o seu comprimento em polegadas (p)?*

   + c = 1,27p; + c = 2,54 p;
   + c = (1÷1,27)p; + c = (1÷2,54)p.

ii) Na 2ª fase (versão 1) de 2008 da Prova de Matemática A pedia-se aos alunos para escolherem uma das quatro opções, apresentadas em seguida, para a tarefa: *uma caixa A contém duas bolas verdes e uma bola amarela. Outra caixa B contém uma bola verde e três bolas amarelas. As bolas colocadas nas caixas A e B são indistinguíveis ao tacto. Lança-se um dado cúbico perfeito, com as faces numeradas de 1 a 6. Se sair o número 5, tira-se uma bola da caixa A; caso contrário, tira-se uma bola da caixa B. Qual é a probabilidade de a bola retirada ser verde, sabendo que saiu o número 5 no lançamento do dado?* (A) 1/3; (B) 1/4; (C) 3/7; (D) 2/3.

Em qualquer uma destas tarefas poderíamos ir para além do pedido de indicação do resultado correcto. Quando o aluno se limita a indicar uma resposta que considera ser a certa, não ficamos a saber se a correcção da resposta se deve a uma escolha feita ao acaso ou se se baseou na aplicação dos conhecimentos que adquiriu. Ao limitarmo-nos à observação da resposta, não acedemos aos processos de raciocínio do aluno, à forma de organização do seu pensamento. É sabido que avaliar para classificar, para seleccionar ou para certificar são os objectivos dos exames nacionais e que as questões de escolha múltipla pretendem a diminuição da influência do corrector no resultado final da prova. No entanto, o suposto aumento de fidelidade do resultado levanta algumas dúvidas ao nível da validade destas questões.

Como devem ser entendíveis da mesma forma por todos os alunos, ao nível da interpretação e da resolução, este tipo de questões não fomenta a conexão de conteúdos e inclui conhecimentos fragmentados; limita-se a recair sobre pormenores e sobre fórmulas ou propriedades elementares; faz muitas vezes apelo à memória, muito mais do que à lógica, o que induz o aluno a desenvolver estratégias de preparação de acordo com o solicitado. Mas, outro problema se levanta. O trabalho que o aluno realiza para dar resposta a uma questão de escolha múltipla não é o *trabalho de produção* (Noizet & Caverni, 1985). A resposta acertada do aluno não significa que detém determinado conhecimento. Para responder, o aluno desenvolve estratégias que podem passar ou pela mobilização das ferramentas correctas para obtenção da resposta, se as dominar, ou pela selecção aleatória de uma opção, quando não consegue mobilizar os conhecimentos solicitados. O objectivo primordial é fazer a escolha certa.

Uma vez que os exames afectam as práticas da sala de aula (Stiggins, 2004), e que o suposto aumento de fidelidade do resultado da prova é questionável, é de equacionar a reformulação do tipo de itens que se colocam em provas nacionais. Uma possibilidade é solicitar a justificação da resposta correcta, ou a justificação das alternativas que não estão correctas. Por esta via, poder-se-á aceder a informações múltiplas acerca dos conhecimentos e capacidades do aluno, assim como classificar as provas através de níveis de desempenho. Além disso, a necessidade de redigir uma resposta, suscita no aluno uma reflexão sobre a acção para a qual é necessária a sistematização, a interpretação e a tomada de consciência de alguns erros, podendo melhorar a sua prestação na realização da tarefa.

Referências

DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.*

(http://sitio.dgidc.min-edu.pt/basico/Paginas/default.aspx, retirado em 23 Janeiro, 2008)

Noizet, G. & Caverni, J. (1985). *Psicologia da avaliação escolar.* Coimbra: Coimbra Editora.

Ministério da Educação (2001). Programa de Matemática A.

Stiggins, R. (2004). New assessment beliefs for a new school mission. *Phi Delta Kappa*, 86 (1), p. 22–27.

Paulo Dias

Escola Secundária da Moita

Raciocinar e conjecturar usando uma Ilha de Sonho

Uma das principais finalidades do ensino da Matemática é os alunos desenvolverem a sua capacidade de raciocínio (ME/DEB, 2001). Neste âmbito, qual deverá ser o meu papel enquanto professora? O que deverei considerar um bom raciocínio matemático? Será que um aluno só pode raciocinar matematicamente sobre uma situação quando já é capaz de dominar ferramentas matemáticas abstractas que lhe permitam expressar o que pensou com rigor e formalismo? Estas são algumas das questões com que nos confrontamos quando procuramos equacionar modos de ajudar os alunos a desenvolverem a sua capacidade de raciocinar em Matemática.

Procuremos reflectir sobre estas questões focando-nos nas actividades de formulação, teste e prova de conjecturas incluindo aqui a procura de argumentos matemáticos que permitam compreender a razão pela qual uma conjectura parece resistir a tentativas de refutação. Todos estes aspectos prendem-se com a natureza específica do raciocínio matemático, pelo que importa dedicar-lhes uma atenção particular.

Para formular conjecturas é necessário perceber as condições matemáticas a que devem atender os exemplos a considerar e decidir sobre o tipo de variações dos exemplos. Ou seja, há que fazer uma análise matemática criteriosa pois só é profícua uma "busca informada" (raciocínio indutivo fundamentado). Por exemplo, para testar a conjectura "qualquer fracção unitária com denominador par origina uma dízima finita", os alunos devem seguir um critério matemático como "só me interessa estudar fracções em que o denominador seja múltiplo de 2 e o numerador 1". Ao adoptarem-no estão a trabalhar com restrições ao conjunto de números relativamente ao qual faz sentido considerar o numerador e o denominador. Da análise apoiada nas condições matemáticas surge, neste caso, um contra-exemplo, nova análise e reformulação da conjectura, novo teste e reformulação, sempre que necessário (Gomes, 2005).

Os alunos ao desenvolverem uma actividade em que está em jogo formular e testar conjecturas têm oportunidade de lidar com o raciocínio indutivo, mas também com as suas limitações. É importante propor-lhes casos em que as aparentes regularidades observadas a partir de poucos exemplos, ou de exemplos pouco diversificados, falhem. Contraria-se assim, a noção frequentemente cimentada de que a análise de alguns exemplos basta para obter conclusões matemáticas generalizáveis.

Há algum tempo, propus aos alunos a realização, com recurso ao *GeoGebra*, da tarefa *A ilha de sonho* (adaptada de Junqueira e Valente, 1997) em que, resumidamente, se pretende que localizem uma casa numa ilha, que tem a forma de um triângulo equilátero, de tal modo que a soma das distâncias da casa a cada uma das três praias que cercam a ilha seja mínima. Neste âmbito, formularam diversas conjecturas, integrando vários conhecimentos matemáticos. Observemos alguns aspectos da actividade desenvolvida:

Conjectura 1: "Pode construir [a casa] no "(in)centro" do triângulo". Uns alunos acham que é verdadeira, outros que é falsa. Falsa porque podia ser em qualquer lugar do triângulo. "Verdadeira, porque também dá aí". Discute-se se *em qualquer lugar* também abrange o poder ficar no "incentro". Consenso estabelecido: "Não refutada pelas experiências, embora pareça não traduzir todas as possibilidades existentes".

Conjectura 2: "Tem que construir no incentro". Falsa pela descoberta de um contra-exemplo: conseguimos pelo menos encontrar mais um caso/local em que a casa não se encontrava no incentro e verificava as condições pedidas.

Conjectura 3: "Pode construir em qualquer local da ilha". Não foi refutada. Alguns alunos acham que é verdadeira. Mas, será sempre verdadeira? Porquê? Se for sempre verdade deve existir uma razão... É introduzida a procura da justificação/prova no grupo turma.

Como procurei ilustrar, a discussão das conjecturas incluiu a sua comparação, a análise da validade de cada uma e a colocação de questões que serviram de incentivo à procura de uma prova. Por vezes, pedimos aos alunos para comentarem afirmações de cariz matemático e eles ficam sem saber o que dizer, ou mal conseguem diferenciar duas afirmações semelhantes que se distinguem, por exemplo, quanto à sua abrangência ou generalidade. Esta pode ser uma potencialidade da discussão de conjecturas. A prova surgiu da procura de por que é que a conjectura 3 resiste a tentativas de falsificação e foi construída, em interacção com a turma, a partir das sugestões "Dividir o triângulo original em 3 triângulos, como mostra a figura 1" e, mais tarde, "Considerem as áreas dos vários triângulos e a decomposição de figuras": $A = A_1 + A_2 + A_3$ e sejam h_1, h_2 e h_3 as alturas dos triângulos A_1, A_2 e A_3 relativas aos lados das praias,

$$\frac{l \times h}{2} = \frac{l \times h_1}{2} + \frac{l \times h_2}{2} + \frac{l \times h_3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{l \times h}{2} = \frac{l(h_1 + h_2 + h_3)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h = h_1 + h_2 + h_3$$

Discutiu-se, entre outros aspectos, o significado de cada uma das alturas tendo em conta o contexto do problema e, portanto, face à conclusão visada. Analisou-se, ainda, o facto da validade da terceira conjectura implicar a da primeira. Além disso, a prova surgiu, de um modo integrado e natural, como um instrumento de compreensão e não apenas como uma manipulação simbólica abstracta, e/ou argumentação matemática elaborada em factos anteriormente aceites e algo estranha e paralela ao que os alunos estão mais habituados a fazer em Matemática.

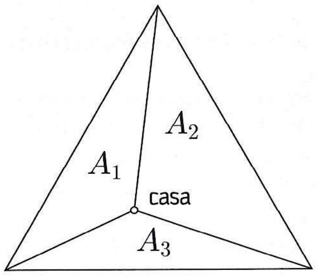

Figura 1

Do meu ponto de vista, o raciocínio matemático envolve a interpretação de situações, a análise de condições, a identificação de ferramentas matemáticas apropriadas e a capacidade de as usar, a tomada de decisões informadas sobre a aceitabilidade/razoabilidade da(s) solução(ões) encontradas e estabelecer conexões matemáticas. A manipulação numérica e algébrica é, entre outros, um aspecto importante da Matemática que não deve ser descurado, pois além de constituir uma forma eficaz e elegante de resolver certos problemas, é de reconhecida importância o domínio de mecanismos que, após uma fase de apropriação e algum treino, se convertem em automatismos. Todavia, a construção de argumentos matemáticos encadeados, ainda que por vezes expressos de forma menos abstracta de acordo com o ano de escolaridade, apoiada, por exemplo, em argumentos não simbólicos ou num formato misto (simbólico e não simbólico), parece-me também um recurso fundamental à construção progressiva do modo mais simbólico e ao desenvolvimento do raciocínio matemático.

Referências

Gomes, A. (2005). Auto-Avaliação das aprendizagens dos alunos e investimento na apropriação de critérios. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa.

Junqueira, M. & Valente, S. (1997). Conjecturas e provas em Geometria. Uma nova visita à ilha do triângulo equilátero. Educação e Matemática 45, 44-48.

ME/DEB (2001). Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais. Lisboa: ME/DEB.

Anabela Gomes

Escola Básica 2, 3 D. Luís de Mendonça Furtado