Os quatro filhos da família Canelas

O casal Canelas tem quatro filhos, nenhum deles gémeo de outro. Fui visitá-los e, a certa altura, disse-me a mais velha, a Ana:

— *Já reparou que o produto da minha idade pela da minha irmã Carla é seis vezes maior agora do que era há seis anos atrás?*

O Bruno, o segundo dos irmãos, estava ao lado e reparou:

— *Olha, é curioso, o mesmo acontece com a minha idade e a do meu irmão Daniel.*

Que idades têm os quatro filhos da família Canelas?

(Respostas até 19 de Fevereiro para zepaulo@armail.pt)

Múltiplos de 9 em quadrado mágico

O problema proposto no número 98 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Num quadrado de 3 por 3, colocar os algarismos de 1 a 9, um em cada casa, de tal modo que os três números lidos na horizontal, os três números lidos na vertical e os dois números lidos nas diagonais principais sejam todos eles múltiplos de 9.

Pelos vistos, são muitos os entusiastas dos quadrados mágicos. É que, desta vez, o número de leitores a responder ao problema excedeu largamente o que é habitual. Foram 21: Alberto Canelas (Queluz), Alice Bárrios (Odivelas), Ana Paulino, Armando Fernandes (Aveiro), Catarina Ferreira (Pontinha), Cristina Ortins (Angra do Heroísmo), Fátima Cardoso (Moimenta da Beira), Francisco Estorninho (Lisboa), Joana Sobreira (Madeira), João Barata (Castelo Branco), Patrícia Marques (Lisboa), Patrícia Sampaio (Guimarães), Paula Portela (V. F. Xira), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Regina Veríssimo, Ricardo Poças (Viseu), Rute Cipriano (Lisboa), Sónia Abrantes (Portalegre), Susana Anacleto (Arrouquelas), Teresa Quinta (Cantanhede) e a resposta colectiva de Daniel Meneses, Diogo Castanheira, Gabriel Lomba, Laura Soares, Luís Figueiredo e Nuno Soares (alunos do 9º ano da EBI de Oliveira de Frades).

Nove das respostas limitam-se a apresentar simplesmente uma solução, que deve ter sido obtida por tentativas, sem explicar qualquer metodologia seguida. No entanto, a maioria dos *solucionistas* vai mais longe, alguns começando por fazer a lista dos múltiplos de 9 com algarismos diferentes e sem usar o 0, enquanto outros simplificam o trabalho, fazendo apenas a lista do conjunto de três algarismos que somam 9 ou 18 (condição para formarem um múltiplo de 9). Temos então:

Com algarismos a somar 9:

126 135 234

Com algarismos a somar 18:

189 279 369 378 459 468 567

O Francisco chama a atenção para o facto de haver "algarismos incompatíveis", isto é, que não podem fazer parte do mesmo número: 1 e 4; 1 e 7; 4 e 7; 2 e 5; 2 e 8; 5 e 8.

É agora que é preciso dar um passo importante para quem quiser encontrar todas as soluções sem ter de tentar um enorme número de casos. Foi o que fizeram o Ricardo, o João, a Cristina, a Catarina, a Alice e o Alberto:

— Na lista anterior, cada algarismo aparece três vezes, excepto o 3, o 6 e o 9, que aparecem quatro. Ora, no quadrado, o algarismo central terá de fazer parte de quatro números (uma linha, uma coluna e duas diagonais). Logo, a casa central só pode ser ocupada por 3, 6 ou 9.

Vejamos com o 3 na casa central. Escolhemos um número para uma das diagonais, por exemplo 135. Não é difícil encontrar uma solução. A partir dela, obtemos mais três por rotações sucessivas de 90°. Trocando a linha de cima com a de baixo e fazendo novas rotações, encontramos mais quatro soluções (ver figura).

1	2	6
8	3	7
9	4	5

9	8	1
4	3	2
5	7	6

5	4	9
7	3	8
6	2	1

6	7	5
2	3	4
1	8	9

9	4	5
8	3	7
1	2	6

1	8	9
2	3	4
6	7	5

6	2	1
7	3	8
5	4	9

5	7	6
4	3	2
9	8	1

Partimos agora da diagonal 234 e, pelo mesmo processo, obtemos mais oito soluções.

O mesmo acontece com a diagonal 378: oito soluções mais.

Em todos estes 24 casos a outra diagonal é 639, pelo que estão esgotadas as soluções em que o 3 está na casa central.

Se escolhermos o 6 para casa do meio, iremos obter também 24 casos, 8 para cada diagonal possível (162, 468 ou 567).

O mesmo acontece com o 9 no centro e respectivas diagonais possíveis: 198, 297 e 495.

Há então, como muito bem concluiram o Francisco e o Alberto, 72 soluções. No entanto, podemos talvez dizer que o número de soluções é 9, cada uma delas desdobrando-se em 8 por rotações e simetrias.