Medindo a incerteza...

Paulo Correia

"Pão de pobre quando cai, cai com a manteiga voltada para baixo". A sabedoria popular esconde, por vezes, verdadeira sabedoria... haverá nesta constatação verdadeira sabedoria? Será superstição?

O lançamento de uma moeda ilustra o nosso imaginário como retrato da sorte, do imprevisível ou da incerteza. A experiência validou esta percepção como sendo um fenómeno *aleatório* no sentido de que é impossível prever qual é a face da moeda que ocorrerá num dado lançamento. De forma complementar, a capacidade de fazer previsões sobre a globalidade de um conjunto de lançamentos, *suficientemente* grande, contribui favoravelmente para um conceito de probabilidade em que a incerteza e o conhecimento se complementam em escalas de observação diferentes.

Historicamente, em várias civilizações, o recurso ao lançamento de dados e moedas, ou a realização de outras experiências aleatórias para a tomada de decisões, era tido como a hipótese de que a divindade manifestasse um veredicto. Ainda hoje, a decisão da posição das equipas no campo, num jogo de futebol, é decidida com recurso ao lançamento de uma moeda. A maioria das pessoas não verá aqui a manifestação da vontade divina, mas sim um processo eficaz de decisão isenta, assente no conceito de probabilidade do domínio do senso comum.

Dificuldades com convicções espontâneas

O senso comum é uma boa ferramenta para a análise de alguns fenómenos aleatórios — é consensual que as hipóteses de chover no Verão (em Portugal) são relativamente reduzidas, embora não seja um acontecimento impossível. Formulações como esta são sustentadas por um grande número de observações — a maioria das pessoas já viveu um número significativo de dias de Verão, e mesmo sem registos explícitos, sabe que apenas numa pequena parte desses dias choveu. Contudo, a tentativa de raciocinar por processos semelhantes, por exemplo, ver um jogo da selecção de futebol na casa de um amigo, como aconteceu anteriormente, só porque a selecção ganhou nestas condições, — gera superstições sem validade matemática. Tirar conclusões a partir da análise da experiência é um procedimento formalmente correcto, mas as falhas neste tipo de análise consistem essencialmente em serem sustentadas num número de experiências insuficientemente grande ou em fenómenos de memória selectiva em que se ignoram (de forma inconsciente) as experiências que não contribuíram para o resultado esperado.

A investigação tem apontado outras concepções erróneas, mal-entendidos, concepções *primitivas*, falácias ou raciocínios incorrectos sobre algumas designações relacionadas com o pensamento probabilístico:

i) A denominada heurística da representatividade sustenta que as pessoas estimam a probabilidade de um acontecimento com base na análise de quão bem esse acontecimento representa a população que lhe está associada. Por exemplo, numa caixa com 50% de bolas brancas e 50% de bolas pretas, a probabilidade de retirar 7 bolas brancas em dez extracções é estimada como sendo igual à probabilidade de retirar 70 bolas brancas em 100 extracções; ou ainda, acreditam que numa sequência de lançamentos de uma moeda em que ocorreram muitas faces do mesmo tipo, a probabilidade de ocorrer a outra face aumenta (Shaughnessy, 1992).

ii) Outro raciocínio incorrecto típico é designado por heurística da disponibilidade e consiste em estimar probabilidades de acontecimentos com base no grau de facilidade de trazerem à sua memória aspectos particulares do acontecimento, como podemos constatar nos dois exemplos seguintes: se vários amigos de um indivíduo se divorciaram recentemente, ele acreditará que a taxa de divórcios local está a aumentar quando, de facto, permanece inalterada; se questionarmos indivíduos, sem aprendizagem de técnicas de contagem, sobre o número de comissões que se podem fazer num grupo de 10 pessoas, se existem mais comissões de 2 pessoas ou de 8 pessoas, a resposta é maioritariamente de 2 pessoas, por ser mais fácil fazer a representação mental de grupos de 2 do que de 8 (Shaughnessy, 1992).

iii) A falácia da conjunção sustenta que pessoas com e sem aprendizagem em probabilidades tendem a considerar mais provável a conjunção de dois acontecimentos do que um deles isoladamente. Por exemplo, os alunos consideraram maior a percentagem de pessoas com 55 anos e que tinham tido um ataque cardíaco do que a percentagem de pessoas que tinham tido um ataque cardíaco (Shaughnessy, 1992).

iv) A confusão entre conjunção e condicionamento pode surgir também por dificuldades relacionadas com a linguagem ou o contexto dos problemas que envolvem condicionamento. As dificuldades com a compreensão da probabilidade condicionada podem ainda resultar da dificuldade em identificar o acontecimento que condiciona. Será a confusão entre os acontecimentos condicionante e condicionado em virtude da crença de que a ordem cronológica impede o condicionamento de um acontecimento anterior por outro posterior. Por exemplo, considere-se o seguinte problema: uma urna contém duas bolas brancas e duas bolas pretas; retira-se uma bola ao acaso e omite-se a sua cor, retirando-se uma segunda bola — sem repor a primeira — que se verifica ser branca; muitas pessoas tem dificuldade em aceitar que a probabilidade da primeira bola ser branca diminui pelo facto de se saber que a segunda bola também o é — ver caixa.

Konold, citado por Shaughnessy, 1992, conseguiu evidências de que apesar de parecer que os alunos estão a raciocinar numa base de independência, se aprofundarmos, podemos descobrir que são inconsistentes nas suas respostas. Segundo este investigador, muitas pessoas tomam decisões em tarefas de probabilidades baseadas no que ele denomina por *abordagem superveniente* (*outcome approach*); algumas respostas de indivíduos a tarefas de estimação de probabilidades não são facilmente categorizáveis como concepções erróneas baseadas em heurísticas. A *abordagem superveniente* é a forma como alguns indivíduos encaram um acontecimento, como sendo um fenómeno isolado, não como uma amostra de um todo de acontecimentos semelhantes. Konold concluiu que os indivíduos que recorrem à *abordagem superveniente* fazem-no quando os acontecimentos possíveis não são equiprováveis e se trata de uma experiência que não é repetível.

Os alunos não esperam passivamente uma teoria de probabilidade fornecida pelo professor. Constroem as suas próprias heurísticas, critérios e crenças sobre probabilidades de forma espontânea, mesmo antes de as aprender. Cabe à escola a validação dos bons raciocínios e a explicitação das falácias dos outros.

A importância do desenvolvimento do pensamento probabilístico reside no facto de todas as pessoas o usarem — talvez mais do que em qualquer outra área da Matemática — independentemente do facto de lhe ter sido ensinado ou não (Shaughnessy, 1992).

Simulações e o método frequencista

Em 1991, num programa de divulgação científica inglês tentou-se perceber se o pão cairia sempre com a manteiga virada para baixo. Foram atiradas ao ar 300 torradas e o resultado observado foi semelhante ao lançamento de uma moeda. O método frequencista para a determinação de probabili-

O Concurso da TV

No final de um concurso de televisão, o concorrente tem perante si três portas fechadas. Atrás de uma delas está o «fabuloso» prémio, o automóvel. O concorrente escolhe uma das portas. Antes de a abrir, diz-lhe o apresentador:

— Eu sei onde está o carro e, tal como prevê o regulamento, vou abrir uma porta que não tem prémio.

Abre uma das portas, que está efectivamente vazia, e pergunta:

— Quer manter a sua aposta ou trocar de porta?

Qual a atitude que pode dar maior vantagem ao concorrente:
Manter a porta escolhida inicialmente?
Mudar para a outra porta ainda fechada?
É indiferente (e atira-se uma moeda ao ar para que o acaso decida).

Figura 1. O concurso da TV (Veloso e Viana, 1992).

dades — ou para a confirmação de resultados obtidos experimentalmente — tem tido um papel secundário no desenvolvimento do raciocínio probabilístico. A modelação de problemas de probabilidades com recurso a simulações é uma técnica promissora para ultrapassar concepções erróneas. O reconhecimento de que um raciocínio não é o correcto pode ser difícil de aceitar. No pólo oposto da análise deste método está a argumentação de que esta estratégia pode revestir-se de uma técnica para a procura de um número sem dar indicações para a justificação do valor encontrado, ou que a técnica pode consistir numa tarefa mecânica desprovida de raciocínio. Assim, importa garantir que o processo de simulação constitui uma forma de apropriação da experiência aleatória pelo aluno (ou professor), permitindo que possa depois modelá-la melhor.

A utilização de computadores para modelar uma experiência aleatória, quando se procura a determinação de probabilidades, tem sido usada por matemáticos para decidir sobre o valor da probabilidade, quando a razão não se revelou suficiente. Por exemplo, muitos matemáticos, entre os quais o célebre Paul Erdös, recusaram a solução correcta do problema de Monty Hall até observarem uma simulação computacional do problema. Este problema, conhecido entre nós por *O concurso da TV* (figura 1) tem três etapas. Numa primeira fase um concorrente escolhe uma de três portas com o objectivo de conseguir um prémio; na segunda o apresentador abre uma das portas restantes que não contém o prémio; e na terceira fase é dado ao concorrente uma oportunidade para alterar a sua escolha inicial.

Não é evidente para um número significativo de pessoas se alterar a escolha ou não é relevante e as implicações que a alteração tem na probabilidade de ganhar o prémio. No entanto, hoje, os meios computacionais colocam ao nosso dispor muitas possibilidades de, num reduzido intervalo de tempo, obter um número elevado de experiências.

Na Internet existem várias simulações computacionais deste problema. Por exemplo no endereço

`http://www.shodor.org/interactivate/activities/SimpleMontyHall/`

podem seleccionar-se as portas com um clique do rato e observar o que acontece. A programação do computador, recorrendo a linguagens de programação para simular um problema é outra possibilidade. Esta tarefa pode, no entanto, estar fora do alcance dos alunos porque é necessário o domínio de ferramentas informáticas mas a utilização de geradores de números aleatórios em calculadoras gráficas ou folhas de cálculo (por exemplo) é acessível a indivíduos sem competências especiais de programação e constituem uma forma eficaz de fazer simulações computacionais. Na figura 2 apresenta-se a ilustração de uma simulação do problema *Concurso da TV* obtida a partir de uma folha de cálculo.

Este tipo de abordagem permite a análise de problemas de probabilidades inacessíveis ou demasiados complicados para um tratamento analítico. Também em outras ciências, quando a incerteza ou o acaso têm um papel relevante, e a análise teórica não consegue dar respostas suficientes, esta forma de realizar experiências aleatórias com recurso a simulações reveste-se de grande importância, tendo a designação genérica de métodos de Monte Carlo.

O desenvolvimento de uma cultura de dúvida razoável ou de questionamento de intuições e de preconcepções não faz parte da nossa tradição de ensino, mas é uma parte essencial do raciocínio probabilístico. A formação dos professores (e as concepções erróneas destes) foi também já apontada com parcialmente responsável por algumas fragilidades das aprendizagens dos alunos. Seria importante uma intervenção de fundo, relembrando a importância da renovação do ensino e aprendizagem das probabilidades (como tem acontecido em outras áreas da Matemática), uma vez que um

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2						O CONCURSO DA TV - Desafios 2, Problema 59								
3														
4			Paulo Correia 2005 mat.absolutamente.net			Nº de Experiências		Porta escolhida	Porta do Prémio	Porta Aberta	Não muda	Muda P/ Porta	Muda	Moeda ao ar
5						20		1	3	2	perde	3	GANHA	GANHA
6								2	2	1	GANHA	3	perde	GANHA
7			NÃO MUDA			Ganhos se N/Muda		3	2	1	perde	2	GANHA	GANHA
8						8		1	3	2	perde	3	GANHA	perde
9		p=	8					1	1	2	GANHA	3	perde	GANHA
10			20					1	2	3	perde	2	GANHA	GANHA
11								2	1	3	perde	1	GANHA	GANHA
12		=	0,4					1	2	3	perde	2	GANHA	perde
13								3	3	2	GANHA	1	perde	GANHA
14								3	2	1	perde	2	GANHA	GANHA
15			MUDA			Ganhos se Muda		2	2	1	GANHA	3	perde	perde
16						12		1	2	3	perde	2	GANHA	perde
17		p=	12					3	2	1	perde	2	GANHA	perde
18			20					1	1	2	GANHA	3	perde	GANHA
19								2	1	3	perde	1	GANHA	GANHA
20		=	0,6					1	1	2	GANHA	3	perde	perde
21								1	2	3	perde	2	GANHA	GANHA
22								1	1	2	GANHA	3	perde	GANHA
23								3	3	2	GANHA	1	perde	GANHA
24								2	3	1	perde	3	GANHA	perde
25														

Figura 2. Simulação do Problema Concurso da TV feita numa folha de cálculo [http://mat.absolutamente.net/recursos/problem/excel/portas.xls]

currículo adequado não é suficiente para uma aprendizagem eficaz e as necessidades adicionais são difíceis de definir e de colmatar.

Incertezas incomensuráveis

Existem, ainda, experiências aleatórias relativamente às quais não é possível determinar ou calcular a probabilidade de cada um dos acontecimentos. Num jogo de futebol não se pode quantificar a probabilidade de um empate (embora seja defendido por alguns que este valor existe — apenas não o sabemos calcular). A impossibilidade de levar em consideração todos os elementos que influenciam o resultado, por um lado, e a impossibilidade de repetir muitas vezes a experiência nas mesmas condições, por outro, tornam esta experiência imune a uma quantificação objectiva das probabilidades dos acontecimentos associados.

O papel da escola torna-se ainda mais difícil quando alargamos a esfera do pensamento probabilístico a tomadas de decisão e reacções de todos os dias que mobilizam raciocínios probabilísticos e que se misturam, de forma subtil, com experiências e outras convicções de níveis conscientes e inconscientes, impossibilitando desta forma teses abrangentes e análises consistentes. Também a multiplicidade de experiências que envolvem incerteza ou o acaso, e as diferentes naturezas da incerteza trazem o raciocínio probabilístico para uma esfera diferente daquela em que moedas ou dados permitem uma medição da incerteza. A conjugação de um universo probabilístico povoado por experiências aleatórias bem estudadas e definidas, com um outro mundo onde a incerteza advém de emoções humanas e processos sociais ou ainda da singularidade de cada situação, torna difícil a definição do raciocínio que usamos para processar informações em que a incerteza ou o aleatório têm relevância. Felizmente, nada disto é tão simples como analisar o lançamento de uma moeda ao ar…

Em 1995, Robert Matthews voltou a pensar sobre o pão com manteiga… verificou que quando o pão cai, não é lançado ao ar como uma moeda, cai de um intervalo de alturas razoavelmente definido, e nunca tem a manteiga voltada para baixo antes de cair (a bem da limpeza das toalhas de mesa). Com estas condicionantes e recorrendo a argumentos da física, foi possível verificar que a probabilidade de uma torrada cair com a manteiga voltada para baixo é substancialmente grande. Também as simulações podem falhar…

Bibliografia

Buescu, J. (2001). O Mistério do Bilhete de Identidade e Outras Histórias. Lisboa: Gradiva.

Shaughnessy, J.M. (1992). Research in probability and statistics: Reflexions and directions. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan Publishing Company.

Veloso, E., Viana, J., (1992), Desafio 2, Porto: Edições Afrontamento.

Sítios na Internet

http://www.shodor.org/interactivate/activities/SimpleMontyHall/

http://mat.absolutamente.net/
(página do autor deste artigo)

Paulo Correia

Escola Secundária de Alcácer do Sal