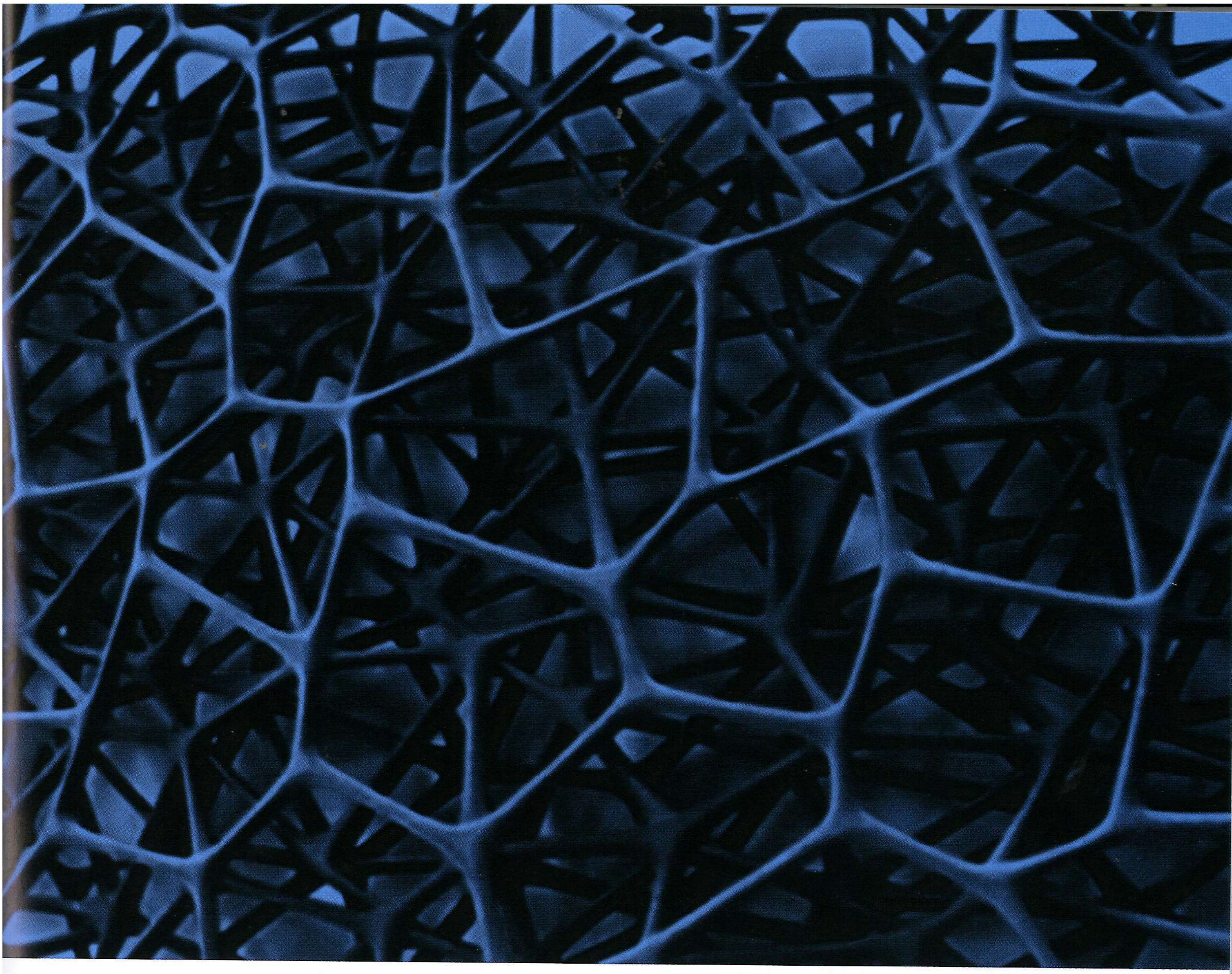


Construir, experimentar, descobrir, provar...

Adelina Precatado

Raciocinar em Matemática: como é que um professor interpreta esta questão tendo em conta os programas do secundário? Foi mais ou menos esta a proposta que a equipa desta revista temática me colocou. Não respondendo certamente à questão colocada, vou tentar, ao longo deste artigo deixar algum testemunho, algumas ideias, algumas interrogações sobre o assunto. O artigo está dividido em três partes, na primeira farei um resumo rápido do que, na minha perspectiva, refere o programa do ensino secundário no que respeita ao *raciocínio em Matemática*. Na segunda, mostro um exemplo recente da minha prática lectiva e na terceira debruçar-me-ei sobre as condições necessárias para o desenvolvimento do trabalho que proponho.

O que referem os programas do ensino secundário

Lógica e Raciocínio Matemático é um dos temas transversais do programa do ensino secundário (ME, 2001). Neste tema, refere-se nomeadamente que "na aprendizagem da matemática são absolutamente necessárias as demonstrações Matemáticas, mas estas não podem confundir-se com demonstrações formalizadas (...)" (p. 19). Nas indicações metodológicas diz-se, no que respeita aos métodos de demonstração, que "eles devem ser referidos à medida que vão sendo usados ou após os estudantes terem já utilizado os vários métodos em pequenas demonstrações informais" (p. 21) e ainda que "o hábito de pensar correctamente, que é afinal o que está em causa, deve ser acompanhado do hábito de argumentar oralmente e por escrito" (p. 21).

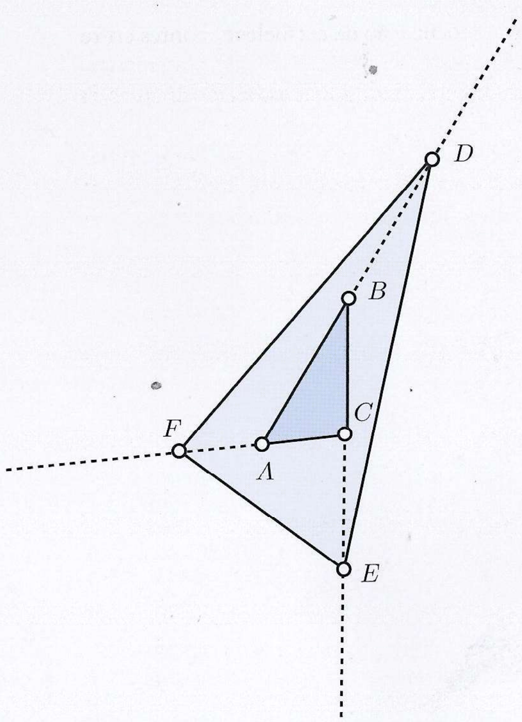


Figura 1. Problema Triângulo Duplicado

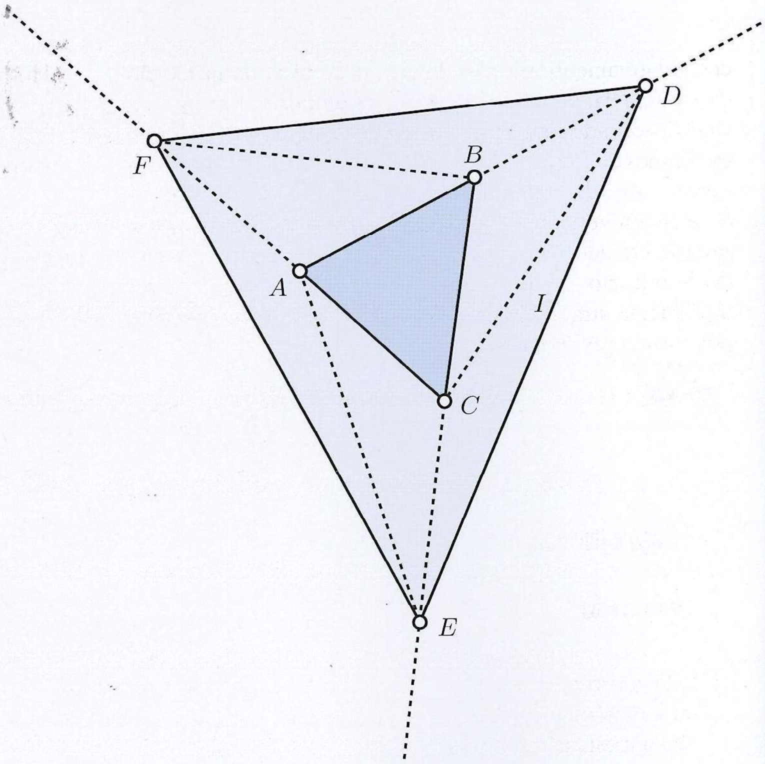


Figura 2. Sugestão para iniciar a prova

Mas as referências ao raciocínio/demonstração aparecem em outros locais do programa. No quadro resumo de objectivos e competências gerais pode ler-se na coluna das capacidades/aptidões: "formular hipóteses e prever resultados; descobrir relações entre conceitos de Matemática; formular generalizações a partir de experiências; validar conjecturas; fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados" (p. 4) e, nas sugestões metodológicas gerais, com o subtítulo Raciocínio dedutivo, refere-se que "o estudante deverá ser solicitado frequentemente a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios, a confirmar conjecturas, a demonstrar fórmulas e alguns teoremas" (p. 11), na avaliação recomenda-se que em cada período "mais do que um dos elementos de avaliação seja obrigatoriamente uma redacção matemática sob a forma de resolução de problemas, demonstrações " (p. 13).

Sem esquecer que a resolução de problemas é apontada como "a contribuição fundamental para desenvolver a capacidade dos alunos de raciocinar matematicamente" (p. 7).

Construir, experimentar, descobrir, provar... uma experiência recente

A experiência que vou relatar desenvolveu-se, talvez, porque eu estava envolvida num projecto com computadores portáteis, tinha uma turma do 10° ano de Matemática A e gostava de experimentar o uso mais regular de um programa de geometria dinâmica na sala de aula para resolver problemas.

Parti de alguns pressupostos facilitadores do trabalho:

1. os alunos em geral motivam-se mais com problemas que lhes suscitam curiosidade ou em saber o resultado ou naqueles em que o resultado parecendo evidente afinal não é o que parecia;
2. tinha disponível um conjunto de computadores portáteis e o facto de estar integrada num projecto *Desafios Sem Fios* permitia-me ir discutindo com algumas colegas de grupo o assunto;
3. era Directora desta turma a que me vou referir, o que me facilitava o esclarecimento dos pais relativamente ao trabalho que estávamos a fazer;
4. tinha um bloco de 90 minutos (componente não lectiva) atribuído para apoio a esta turma, com alguma liberdade para gerir como entendesse.

Por isso, resolvi fazer a proposta aos alunos e aos pais, o apoio seria encarado de uma forma preventiva e para todos. O trabalho seria desenvolvido com computadores e com um programa de Geometria Dinâmica. A turma, de 28 alunos, foi dividida em dois grupos de 14, que teriam aula de apoio de 15 em 15 dias. A ideia era partir de problemas geométricos, relativamente simples do ponto de vista da utilização da tecnologia, de modo que todos os alunos se fossem sentindo à vontade com o programa usado. Os problemas foram escolhidos de forma a que não intimidassem os alunos mais fracos e que, de preferência, desafiassem a intuição ajudando a criar a vontade de perceber porque é que determinada solução era adequada. Havia também a intenção, explicita desde o início, de que pretendíamos, por um lado resolver o problema através de uma construção e experimentação e por outro, provar/demonstrar o que se tinha descoberto.

Houve ainda a preocupação de estabelecer pontes entre o que ia acontecendo neste espaço e a aula de Matemática. Este era um espaço complementar mas associado às aulas da componente lectiva.

Alguns dos problemas que resolvemos são bem conhecidos, outros talvez um pouco menos. Apresento de seguida alguns dos problemas propostos aos alunos, para clarificar melhor o trabalho feito.

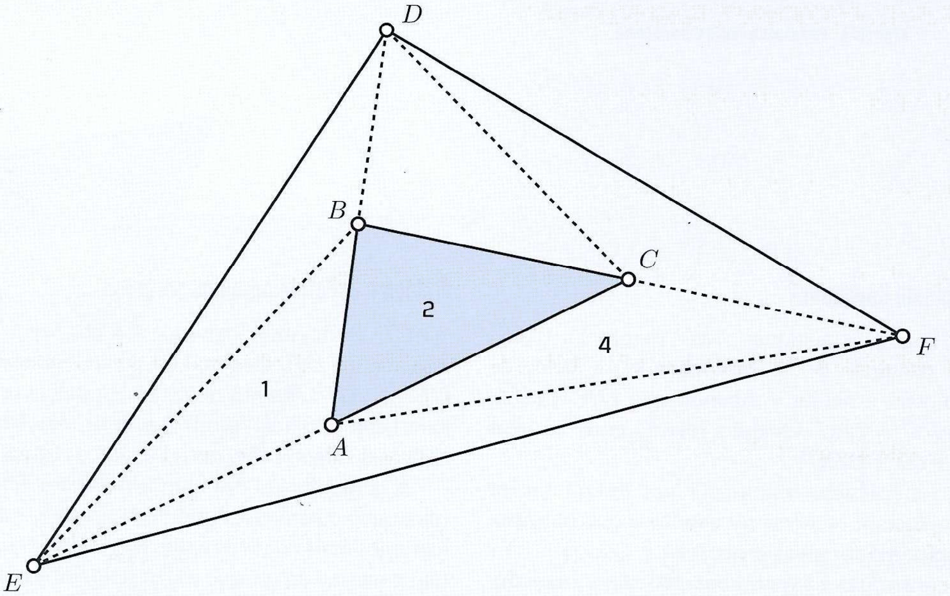
Triângulo Duplicado

Demonstração

Pela construção inicial, os triângulos 1 e 2 têm bases iguais $\overline{EA} = \overline{AC}$ e, a sua altura relativa a estas bases parte do mesmo vértice (ponto B), o que significa que é comum aos dois triângulos. Assim se prova que os triângulos 1 e 2 têm a mesma área.

Pela construção inicial, os triângulos 2 e 4 têm bases iguais $\overline{BC} = \overline{CF}$ e, a sua altura relativa a estas bases parte do mesmo vértice (ponto A), o que significa que é comum aos dois triângulos. Assim se prova que os triângulos 2 e 4 têm a mesma área.

Se a área do triângulo 1 é igual à área do triângulo 2 e se a área do triângulo 2 é igual à área do triângulo 4, logo, a área do triângulo 1 é igual à área do triângulo 4.



Da mesma forma se prova que as áreas dos restantes triângulos são iguais às áreas dos triângulos 1, 2 e 4. Portanto a área do triângulo $[EFD]$ é sete vezes a área do triângulo $[ABC]$.

Quadro 1. Prova apresentada pela aluna A

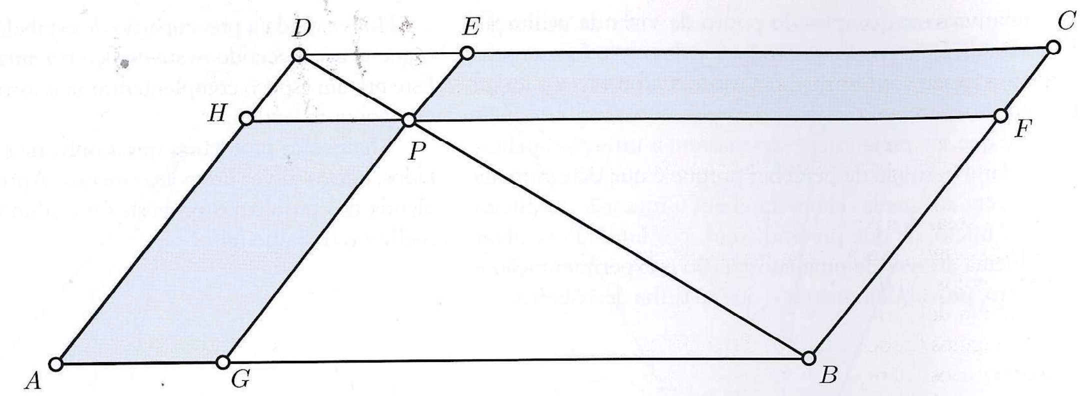


Figura 3. Problema paralelogramos surpresa

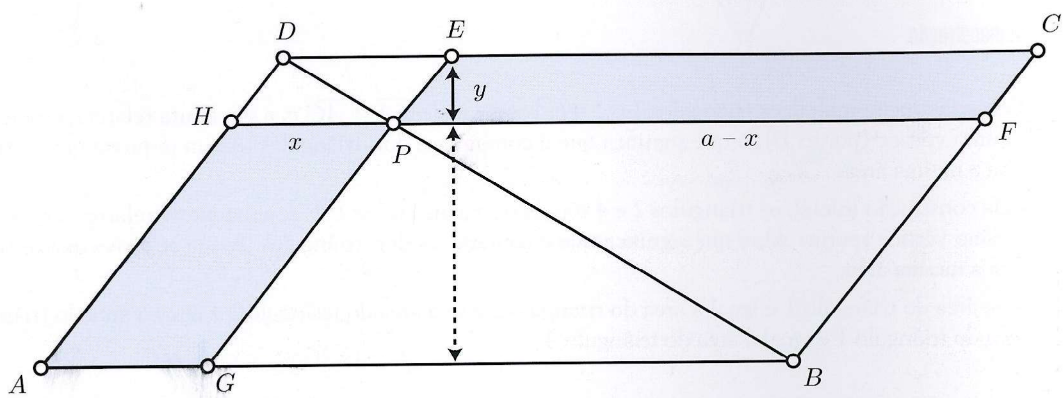


Figura 4. Paralelogramos surpresa

Problema 1: Triângulo Duplicado?

Considera um triângulo qualquer ABC (figura 1). Constrói um novo triângulo FDE prolongando os lados de ABC, como mostra a figura, e sabendo que $\overline{DA} = 2\overline{BA}$, $\overline{EB} = 2\overline{CB}$ e $\overline{FC} = 2\overline{AC}$. Qual é a relação entre as áreas dos triângulos FDE e ABC?

No início, começávamos sempre por ler e interpretar em conjunto o problema e escrever no quadro o que imaginavam ser a solução (4,5 foram as propostas).

Depois da construção e experimentação não sobram dúvidas: a área do triângulo DEF é sete vezes a área do triângulo ABC, mas a prova não se apresentou muito fácil. A sugestão: experimentem dividir o triângulo DEF como indica a figura 2 permitiu que, com mais ou menos tempo, muitos alunos conseguissem organizar o raciocínio que prova o que descobriram. Afinal os sete triângulos têm a mesma área. No quadro 1 está a prova apresentada por uma aluna.

Problema 2: Paralelogramos surpresa

$ABCD$ é um paralelogramo. P é um ponto qualquer sobre o segmento DB, diagonal do paralelogramo. HF // AB e GE // AD. Observa os vários paralelogramos em que a figura ficou dividida. Tenta descobrir relações entre características de alguns dos paralelogramos (figura 3).

A generalidade dos alunos não teve dificuldade em verificar que o paralelogramo ficou dividido em quatro paralelogramos mais pequenos, que os paralelogramos sombreados têm a mesma área e que os paralelogramos brancos não têm a mesma área, mas são semelhantes.

Menos evidente foi a propriedade: o produto das áreas dos paralelogramos sombreados é igual ao produto das áreas dos paralelogramos brancos. Mesmo assim, porque este não foi um dos primeiros problemas e na altura em que foi proposto já havia quem experimentasse muito, um grupo de alunos descobriu esta propriedade no final da primeira aula de 90 minutos em que trabalharam este problema (figura 4). Partindo da figura pode justificar-se que os paralelogramos brancos são semelhantes a partir da semelhança dos triângulos que os compõem. Daí resulta que

$$\frac{x}{y} = \frac{a-x}{h-y}, x(h-y) = y(a-x),$$

ou seja as áreas dos paralelogramos sombreados são iguais.

Outra demonstração pode ser feita a partir da igualdade dos triângulos ADB e BDC. A diagonal divide o paralelogramo em dois triângulos iguais ADB e BDC. Como os dois triângulos brancos, dentro de ADB são iguais, respectivamente, aos triângulos brancos dentro de BDC, logo as áreas dos paralelogramos sombreados também são iguais. A partir daqui é quase trivial a prova de que o produto das áreas dos paralelogramos brancos é igual ao produto das áreas dos sombreados.

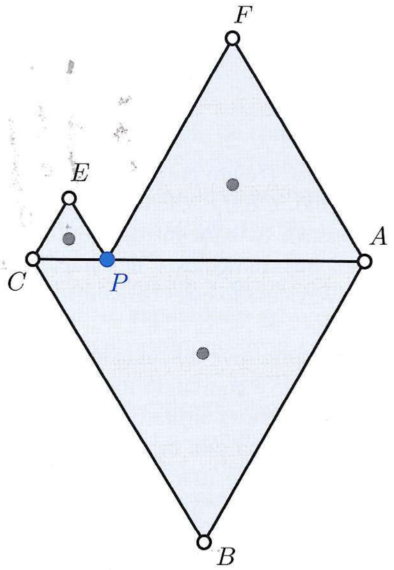
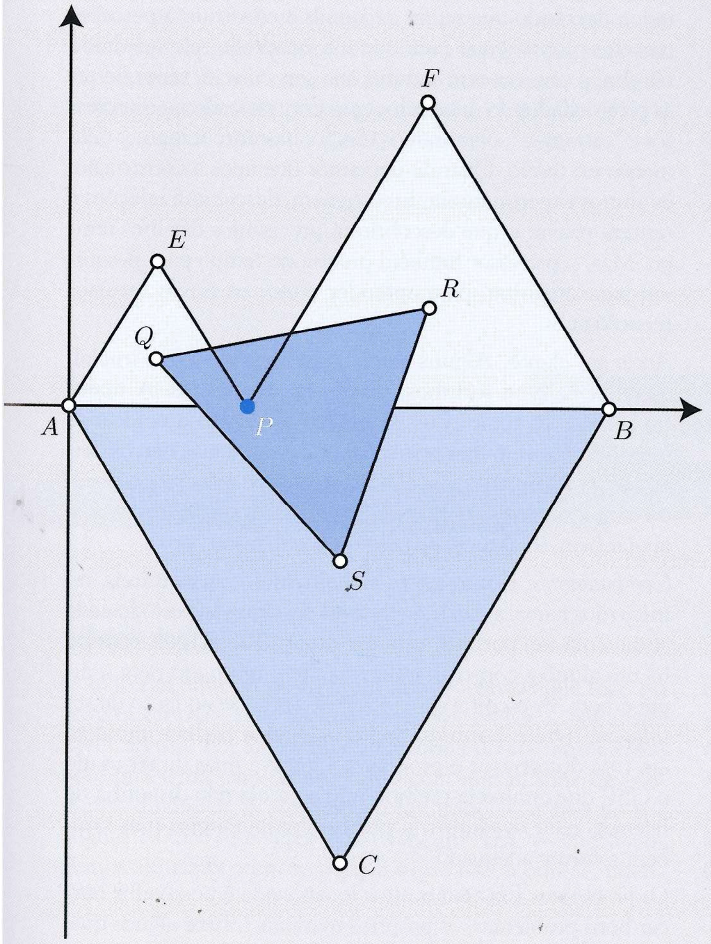


Figura 5. Problema Chapéu de Napoleão

4 Triângulos Equiláteros — Caso Geral



Considero o referencial com origem em A.

$A(0,0)$ $P(x,0)$ $B(x+y,0)$.

Nota: o baricentro encontra-se a 1/3 da altura do triângulo, a partir da sua base.

Altura (h) de $[APE]$: $h^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

Altura (h) de $[PBF]$: $h^2 = y^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}y$

Altura (h) de $[ABC]$: $h^2 = (x+y)^2 - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$

Então $Q\left(\frac{x}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}x\right)$, $R\left(x+\frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}y\right)$ e $S\left(\frac{x+y}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}(x+y)\right)$.

Defino os vectores $QR\left(\frac{x+y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}(y-x)\right)$;

$QS\left(\frac{y}{2}, \frac{2\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{6}\right)$ e $RS\left(\frac{-x}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{6}(x+2y)\right)$.

$$\| \overrightarrow{QR} \| = \| \overrightarrow{QS} \| = \| \overrightarrow{RS} \| = \sqrt{\frac{x^2+y^2+xy}{3}}$$

(Cálculos feitos à parte)

Assim é possível dizer que o triângulo $[QRS]$ é também equilátero.

Quadro 2. Prova apresentada pelo aluno J

Problema 3: Chapéu de Napoleão

ABC é um triângulo equilátero. P é um ponto qualquer sobre um dos lados do triângulo. CEP e PFA são também triângulos equiláteros. Constrói os baricentros (ponto de encontro das medianas) dos três triângulos. Que características tem o triângulo cujos vértices são estes baricentros?

Feita a construção, nenhum aluno teve dificuldade em perceber que o triângulo encontrado é equilátero independentemente da posição do ponto P. Nesta altura tínhamos tratado o tema Geometria analítica na sala de aula, por isso, alguns lembraram-se rapidamente de usar um referencial. Um aluno lembrou-se da propriedade "o baricentro divide a mediana na razão de 1/3 por 2/3", os outros foram informados e alguns provaram também esta propriedade. Os cálculos não foram muito fáceis para alguns. No quadro 2 está uma prova apresentada por um aluno.

Problema 4: A ilha Triangular

Considera uma ilha com a forma de um triângulo equilátero. Onde deve ser construída uma casa (C) de modo que a soma das distâncias aos três lados do triângulo (três praias) seja a menor possível?

Este é um velho problema apresentado por Margarida Junqueira e Sérgio Valente na *Educação e Matemática* n° 45. É velho mas sempre interessante, foi um dos primeiros que coloquei aos alunos e ainda muitos se lembram dele, mais tarde voltámos a abordá-lo, numa perspectiva um pouco diferente: será que é possível generalizar a conclusão a que chegámos para a ilha triangular? Ou seja, se a ilha tivesse a forma quadrada? E, se fosse um hexágono regular? E um octógono regular? ... um polígono qualquer com um n° par de lados? E com um n° ímpar de lados? E, em que região, no interior do polígono, é possível colocar o ponto (*C*asa) de modo que seja possível deslocar-se, na perpendicular, a todos os lados (ou seja sem sair da ilha)?

Fica o desafio, experimentem e provem... No entanto, se quiserem podem consultar o livro *Geometria — Temas Actuais*, de Eduardo Veloso, (p. 60) onde encontram várias perspectivas para a resolução da primeira parte deste problema e, para a segunda, podem consultar

```
http://illuminations.nctm.org/Activities.
aspx?grade=all&srchstr=triangula%20Island
```

Estes foram alguns dos problemas que trabalhei com esta turma do 10° ano na aula de apoio — um bloco de 90 minutos de componente não lectiva, de 15 em 15 dias com cada turno. Tal como referi no início, em diversos momentos foram estabelecidas pontes entre os problemas e os temas tratados nas aulas, por exemplo, foi possível aprofundar um pouco mais as cónicas enquanto lugares geométricos, recorrendo ao Geogebra, quando este tema (lugares geométricos) foi tratado na aula.

Como era evidente a aula não podia ser obrigatória, tratava-se de uma aula de apoio, no entanto, no final do primeiro período só uma aluna nunca tinha comparecido e os restantes praticamente não faltaram. Esta aluna a partir do 2° período passou, também, a ir sempre. Fomos em cada período fazendo o balanço do trabalho realizado e comunicando-o aos pais nas reuniões de pais. As condições que descrevi, no início do artigo, foram fundamentais para o desenvolvimento do trabalho e as características da turma também.

A palavra de ordem foi percebida por todos: era resolver o problema em primeiro lugar, todos deviam ser capazes... depois a prova, a justificação porque é que a conclusão era sempre aquela a que tinham chegado, não era obrigatória mas desejável. Cada vez mais alunos foram conseguindo fazer. É evidente que alguns tomam a dianteira, mas a verdade é que a maioria tentou escrever o raciocínio que fez, mesmo quando foi ajudado no processo pelo vizinho do lado.

Aos poucos quiseram aperfeiçoar-se, uns na forma de apresentar as construções com o Geogebra, outros no modo como escreviam. Tentei que os alunos, ao lado do computador, tivessem também um papel e um lápis para apoiar o raciocínio que iam fazendo, mas esta é a minha batalha perdida, será que têm razão?

As condições

Tempo. Quando trabalhamos na sala de aula, com computador, deixando que sejam os alunos a construir, a perceber por eles próprios que para que um quadrado seja quadrado não basta parecer tem mesmo que ser, ou seja, tem que ter as propriedades do quadrado, caso contrário chega o professor e "estraga-o", demoramos tempo, bastante tempo... pelo menos no início. Quando deixamos que após a construção, os alunos experimentem, investiguem, descubram relações e tentem provar o que descobriram precisamos dar-lhes tempo. Mas, o professor também precisa de tempo para pesquisar, para organizar, para aprender e usar os novos recursos tecnológicos.

Apoio aos alunos. Alguns alunos, ultrapassada a fase inicial, quase trabalham sozinhos, mas esses são poucos. A maioria precisa de apoio. Precisa que os ajudemos a colocar-se questões, que sem lhes resolvermos os problemas não os deixemos ficar inactivos e convencidos que não são capazes ou simplesmente a copiar pelo vizinho. É quase impossível apoiar bem 28 alunos, eu pelo menos não sou capaz.

Computadores. Como referi, trabalhámos com portáteis, no início aos pares, a partir de meados do segundo período cada aluno com um portátil. Esta é a situação ideal, pois quando há um aluno a construir e outro a ver o resultado nem sempre é bom. A escolha do Geogebra deveu-se ao facto de ser *software* livre e portanto todos os alunos podiam também em casa descarregar o programa. Gostava mais de ter usado o GSP, que conhecia melhor, mas a escola não dispunha de licenças para os alunos. É preciso computadores mas também *software* adequado.

Os problemas. Existem muitos locais onde é possível ir buscar bons problemas, os próprios manuais trazem alguns que, com vantagem, podem ser resolvidos com apoio de *software* de Geometria Dinâmica. Para além da Educação e Matemática, indico dois locais na internet onde podem encontrar problemas bastante interessantes e de onde tirei alguns dos que resolvi com os alunos, `http://illuminations.nctm.org` e `http://nrich.maths.org`. Digamos que esta condição é a mais garantida à partida.

Conclusão

Esta não é, evidentemente, a única nem a principal forma de dar cumprimento ao programa de Matemática A, no que respeita ao raciocínio. Aliás esta forma de trabalho não devia sequer existir, porque afinal usei um bloco de componente não lectiva como sendo praticamente lectiva. Mas não há dúvida que os programas de Geometria Dinâmica facilitam a resolução de muitos problemas, a descoberta de regularidades, a verificação de conjecturas, logo não há hoje razões para que não sejam usados na sala de aula, de forma mais ou menos sistemática, foi isso que tentei experimentar e é apenas a este tipo de trabalho com uma parte "meio clandestina" que aqui me estou a referir. Em segundo lugar, associar a prova a um desafio que consiste em justificar, com argumentos matemáticos, porque é que o que se descobriu antes é válido para todos os casos, é para muitos alunos mais motivador do que provar por provar. Se voltarmos ao problema *Triângulo Duplicado*, será completamente diferente deixarmos que o aluno descubra, contra a sua intuição, que a área do triângulo maior é sete vezes a do mais pequeno e só depois tente provar porque é que isto acontece do que apresentar-lhe a questão: prova que a área do triângulo EDF é sete vezes a do triângulo ABC.

Mas a utilização de computadores, principalmente a realização de actividades matemáticas em que o aluno tenha oportunidade de construir, experimentar, recolher dados, estabelecer conjecturas, provar, ... exige algumas condições. Há uns tempos diríamos que não tínhamos computadores, mas eles começam a aparecer, o problema é que não basta distribuir computadores ou quadros interactivos, é preciso equacionar o mínimo de condições para que determinado tipo de trabalho seja possível em sala de aula e isso passa também pela capacidade/possibilidade real de interacção do professor com cada aluno, passa também por deixar ao professor algum tempo de componente não lectiva ou individual verdadeiras, para pensar, preparar, tirar partido das novas ferramentas (*Moodle*, por exemplo) que começam a estar disponíveis. Por tudo isto eu, também até hoje, não percebo porque é que ao contrário do que acontece com a Física e Química ou com a Biologia e Geologia em Matemática acabou a aula desdobrada, enquanto o número de alunos por turma não pára de aumentar.

Referências

Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática — A*. `http://sitio.dgidc.min-edu.pt/`.

Veloso, E. (2000). *Geometria: temas actuais*. IIE.

Adelina Precatado
Escola Secundária de Camões

Materiais para a aula de Matemática

Triângulo duplicado?!

O material aqui proposto é um dos problemas que foco no artigo *Construir, experimentar, descobrir, provar...* publicado nesta revista. Foi aplicado a uma turma do 10° ano e é um bom problema para ser resolvido com um *software* de geometria dinâmica. A surpresa do resultado — a área do triângulo FDE é sete vezes a do triângulo ABC — motiva os alunos a interrogarem-se porque é que isso acontece, fazendo sentido pedir-lhes que provem o que descobriram. A sugestão referida no artigo da divisão do triângulo em sete triângulos pode ser indispensável para que os alunos cheguem a uma prova.

Adelina Precatado
Escola Secundária de Camões