



## Raciocinar em Matemática com imagens visuais vagas e com intuição

Manuel Joaquim Saraiva

A interpretação do que é o raciocínio matemático varia bastante. Ela depende da perspectiva que cada um tem sobre o que é a Matemática. Para uns, o raciocínio matemático é o raciocínio axiomático: da dedução lógica e da inferência formal. Para outros, o raciocínio matemático assinala uma vasta capacidade geométrica e quantitativa que mistura análise e intuição com raciocínio e inferência, ambos rigorosos e sugestivos (Steen, 1999).

Temos a perspectiva da Matemática como uma ciência onde as afirmações têm significado, que deve ser encontrado no conhecimento partilhado pelos seres humanos e não numa realidade externa, não humana. Tal como afirmam Hersh e Davis (1995), a Matemática trabalha com significados humanos e é inteligível apenas no contexto da cultura — é uma actividade humana e é encontrada na prática dos matemáticos: Assim, para falar sobre o raciocínio matemático, nada melhor do que ter em conta aquilo que dizem os matemáticos sobre o seu próprio raciocínio quando estão a trabalhar e a criar Matemática.

### Como pensam os matemáticos

Hadamard (1996), à pergunta *Como pensam os matemáticos ao longo do seu processo de trabalho?* afirmou que, em geral, todos aqueles com quem contactou evitam quer o uso de palavras mentais, quer a utilização mental de sinais claros ou algébricos. Com base na sua experiência, afirma que as palavras ou a linguagem, tal como são escritas ou faladas, não parecem desempenhar qualquer papel no seu mecanismo de pensamento. As entidades físicas que parecem servir de elementos do pensamento são certos sinais e imagens, mais ou menos claros, que podem ser reproduzidos e combinados «voluntariamente». Os elementos atrás mencionados são, no seu caso, de tipo visual e, por vezes, muscular. As palavras convencionais ou outros sinais têm de ser procurados com grande esforço só numa segunda fase.

Vão, também, neste sentido, as palavras de Feferman (citado em Davis & Hersh, 1995), para quem o matemático, no seu trabalho, confia em intuições surpreendentemente

te vagas e avança em passos atabalhoados e intermitentes, com recuos frequentes.

No processo de criação matemática, e para Hadamard (1996), há quatro etapas cronológicas: 1ª. Preparação; 2ª. Incubação; 3ª. Iluminação e 4ª. Verificação. Na sua perspectiva, os caminhos da criatividade residem não no consciente mas no longo trabalho do inconsciente de incubação e na selecção estética inconsciente de ideias que depois passam para o consciente. Defende, ainda, que emoções poderosas podem favorecer tipos diferentes da criação mental. Concorda com Poincaré (1996), para quem, na criação matemática, há uma intervenção do acaso mas também um trabalho do inconsciente, que não implica nem contradiz o primeiro — a invenção toma lugar pela combinação de ideias; criar consiste em não fazer combinações inúteis e em examinar apenas aquelas que são úteis, e que são apenas uma minoria. A invenção é discernimento, é escolha que, para Poincaré, é governada imperativamente pelo sentimento de beleza científica. Ao inconsciente pertence não apenas a complicada tarefa de construção do volume das várias combinações de ideias, mas também a tarefa mais delicada e essencial de seleccionar aquelas que satisfazem o nosso sentido de beleza e que, conseqüentemente, poderão ser úteis. Hadamard, também, defende que a invenção depende necessariamente de uma acção preliminar e mais ou menos intensa do consciente. No entanto, este não está subordinado ao inconsciente, antes pelo contrário, ele começa a sua acção e define, numa maior ou menor extensão, a direcção geral na qual o inconsciente deve trabalhar — o que implica elementos afectivos, onde a escolha é direccionada pelo sentido de beleza.

Muitos outros autores testemunharam o apelo estético da Matemática tanto na contemplação passiva como na própria actividade de investigação. Para Flato (1994), em Matemática estamos sempre a inovar e a generalizar e o processo de criação matemática apresenta semelhanças com o da criação artística.

Há, assim, e como resultado da informação recolhida sobre a prática dos matemáticos, uma associação clara da invenção matemática a uma componente estética e a imagens visuais vagas e imprecisas, onde o inconsciente desempenha um papel fundamental — a par e direccionado pelo consciente.

### **Representações concretas e sinais pessoais no pensamento matemático**

Relativamente à ajuda que é oferecida ao pensamento através das representações matemáticas concretas, Hadamard (1996) afirma:

Acontece-me muitas vezes que depois de ter trabalhado duramente e ter chegado a resultados que estão perfeitamente claros e são satisfatórios para mim, quando tento colocá-los em linguagem sinto que tenho de me colocar num outro plano intelectual. Tenho de traduzir os meus pensamentos numa linguagem que não corre equilibradamente com eles. Por isso passo um vasto período de tempo a encontrar as palavras e as frases apropriadas.

Para este matemático, uma transição do pensamento para a linguagem exige sempre da sua parte uma maior ou menor dificuldade e esforço. O pensamento pode ser acompanhado por representações concretas para além das palavras, e as palavras estão ausentes da sua mente quando ele pensa; e, mesmo depois de ler e ouvir uma questão, toda a palavra desaparece no instante em que ele começa a pensar no assunto — as palavras não reaparecem no seu consciente antes de ter dado por terminada a investigação. Os pensamentos morrem no momento em que eles são embebidos por palavras. Hadamard afirma, ainda, que é essencial realçar que ele se comporta desta forma não apenas com as palavras mas também com os sinais (símbolos) algébricos: utiliza-os em cálculos fáceis; mas, quando o assunto parece mais difícil, os cálculos tornam-se demasiado pesados para si. Usa representações concretas, mas de uma natureza completamente diferente.

Este matemático dá o seu exemplo na demonstração do teorema de que a sequência dos números primos é ilimitada. Para ele, as figuras mentais são «uma massa confusa»; «um ponto muito remoto da massa confusa»; «um segundo ponto um pouco por baixo do primeiro»; «um local algures entre a massa confusa e o primeiro ponto». Afirma, ainda, que toda a investigação matemática o compele para a construção de um tal esquema, que é sempre, e que deve ser, de carácter vago, de modo a não ser enganador.

Hadamard apresenta, ainda, um outro exemplo da sua investigação — o da sua tese, em que ele tinha de considerar a soma de uma infinidade de termos para calcular a sua ordem de grandeza. Afirma que não viu a fórmula em si mesma, mas o local onde ela estaria se fosse escrita: uma espécie de fita, que é mais estreita ou mais escura no local correspondente aos termos possivelmente importantes; noutros momentos, viu alguma coisa parecida com uma fórmula, mas não através de alguma legibilidade (sendo fortemente longa e luminosa), como se ele não tivesse óculos, com letras parecendo mais notórias (embora ainda não legíveis) no local onde é suposto ser importante.

Porém, Hadamard faz referência a algumas excepções. Birkhoff estava acostumado a visualizar símbolos algébricos e a trabalhar com eles mentalmente. Pólya afirma que a ideia decisiva que traz a solução de um problema está, muitas vezes, ligada a uma palavra ou afirmação que ilumina a situação; ela pode vir antes de uma pequena ideia decisiva ou a seguir a ela ou talvez nasça ao mesmo tempo; a palavra certa ajuda-nos a recordar a ideia matemática, talvez menos completamente e menos objectivamente do que um diagrama ou uma notação matemática, mas, de uma forma análoga, pode contribuir para fixá-la na mente. Segundo Hadamard, Pólya não usa as palavras como equivalentes a ideias, uma vez que utiliza uma palavra ou duas letras para simbolizar uma linha completa de pensamento.

Apesar de todas estas excepções, para Hadamard as imagens mentais que os matemáticos usam são frequentemente visuais, podendo também ser de outro tipo, por exemplo, cinéticas e auditivas. Dreyfus (1991) defende, também, que a visualização desempenha um papel essencial no trabalho de muitos matemáticos.

Ainda sobre o papel dos símbolos no pensamento, Hadamard socorre-se das palavras de um especialista em linguística, Prof. Roman Jakobson. Para este autor, os sinais são um suporte necessário para o pensamento. Para o pensamento socializado (etapa da comunicação) e para o pensamento que está a ser socializado (etapa da formulação), o sistema mais usual de sinais é a linguagem propriamente dita; mas, o pensamento interno, especialmente quando criativo, usa de bom grado outros sistemas de sinais que são mais flexíveis, menos padronizados do que a linguagem e deixam mais liberdade e mais dinamismo ao pensamento criativo. De entre estes sinais ou símbolos, podemos distinguir entre os sinais convencionais, pedidos emprestados à convenção social, e, por outro lado, sinais pessoais, pertencentes aos hábitos gerais, ao modelo individual da pessoa considerada e em símbolos episódicos, que são estabelecidos *ad hoc* e só participam num acto criativo simples.

Vão muito neste sentido as afirmações de Dreyfus (1991) para quem as representações simbólicas das entidades matemáticas desempenham um papel essencial em Matemática. As representações recorrem a sinais que apenas podem ser usados quando ligados a um conhecimento pessoal implícito, isto é, a um significado. Quando falamos de qualquer objecto matemático cada um de nós relaciona-o com uma representação mental do mesmo. Embora se espere que os matemáticos produzam definições mais ou menos semelhantes para o mesmo conceito, as suas representações mentais desse conceito podem variar bastante. Uma representação simbólica é escrita ou falada normalmente com a finalidade de facilitar a comunicação sobre o conceito. Uma representação mental refere-se a esquemas internos que uma pessoa usa para interagir com o mundo exterior (e consigo próprio, muito essencialmente). Também Matos e Serrazina (1996) afirmam que uma capacidade matemática produtiva está associada a representações mentais ricas, ou seja, que contém muitos aspectos relacionados com cada conceito.

Há, deste modo, que realçar a importância das representações concretas no pensamento matemático. No entanto, é necessário distinguir claramente o papel dos sinais e dos símbolos. Eles assumem uma forte relevância ao nível das etapas da comunicação e da formalização, mas ao nível do pensamento interno, particularmente na fase de criação, são os sinais pessoais que permitem a ligação a um conhecimento pessoal com sentido.

### **Raciocinar em Matemática: intuir, generalizar, justificar**

A Matemática é uma disciplina que trata com entidades abstractas e o raciocínio é a ferramenta para compreender a abstracção (NCTM, 1999). É o que usamos para pensar sobre as propriedades dos objectos matemáticos e desenvolver generalizações que aplicamos a todas as classes de objectos — números, operações, objectos geométricos, ou conjuntos de dados. O raciocínio matemático é essencialmente sobre o desenvolvimento, a justificação e o uso de generalizações matemáticas. Dreyfus (1991), por sua vez, ao referir-se à abstracção, faz a distinção de dois processos que, conjuntamente com a representação, formam a sua base: a generalização e

a síntese. Para aquele autor, generalizar é derivar ou induzir a partir de especificidades, identificar características comuns ou expandir domínios de validade; sintetizar é combinar ou compor partes de modo que formem um todo, uma entidade que muitas vezes é mais do que a soma das partes. Concorrente com estas afirmações, Fischbein (1987) afirma que a actividade matemática envolve três componentes: a formal, a algorítmica e a intuitiva. A primeira envolve os axiomas, as definições, os teoremas e as demonstrações. A segunda é composta de competências que podem ser adquiridas através de uma prática e de um treino sistemático. O recurso a algoritmos é fundamental no raciocínio matemático. São eles que nos permitem uma economia de pensamento adaptando um conjunto de procedimentos-tipo a situações problemáticas. A terceira envolve cognições que nos aparecem como evidentes por si próprias. Para este autor, embora possa parecer surpreendente falar-se de uma componente intuitiva no pensamento matemático, o modo como o raciocínio matemático faz uso da imaginação, da visualização, de todas as nossas vivências, e mesmo das nossas características biológicas, tem vindo a ser referido cada vez com mais frequência.

Esta componente intuitiva é referida por muitos autores. Para Malcolm (2007), a intuição é a apreensão imediata pela mente, sem o raciocínio. A intuição, por definição, é diferente da razão: acontece sem raciocinar; é imediata, holística, estética, reveladora, inspirada; é sentir, é conhecer tudo de uma vez; ela pode ir aonde a razão não pode. No entanto, a seu ver, na prática, a intuição e a razão trabalham em conjunto numa constante acção combinada. A intuição produz uma ideia, e a razão esforça-se para a testar ou desenvolver. A intuição é sobre a criatividade, a imaginação, a inspiração e a revelação. Ela está ligada à razão, mas não é a razão. Segundo Malcolm, no ocidente olha-se para a intuição como sendo um processo de geração de conhecimento e assegura-se que o conhecimento é testado através da razão. Isto faz com que a razão seja o árbitro final merecedor do conhecimento e, nesse sentido, superior à intuição, o que dá à Matemática um papel especial, como um modelo de raciocínio e como uma representação abstracta e elegante da verdade. Porém, acrescenta que a razão sem a intuição tem pouco trabalho e não encontrará uma orientação.

Poincaré (1987) foi um dos matemáticos que escreveu sobre a ligação entre a intuição e a lógica em Matemática. Para ele, as duas tinham o seu papel na criação matemática, pois a produção da Aritmética, da Geometria, ou de qualquer outra ciência, necessita *algo mais* do que a Lógica Pura. A este *algo mais*, Poincaré designou por Intuição.

Para Davis e Hersh (1995), os aspectos não verbais, espaciais e holísticos do pensamento são importantes naquilo que a maior parte dos bons matemáticos fazem na realidade, embora não o sejam tanto naquilo que dizem que fazem. Para estes autores, é razoável pensar que uma cultura matemática que despreza explicitamente os aspectos espaciais, visuais cinestésicos e não verbais do pensamento não utiliza totalmente as capacidades do cérebro. Não dar importância aos elementos analógicos da Matemática representa o fe-

cho de um canal da consciência e experiência matemática. Seria decerto melhor desenvolver e usar todos os talentos e capacidades especiais dos nossos cérebros, em vez de suprimir alguns pela educação e preconceitos profissionais. Davis e Hersh sugerem que, em Matemática, seria melhor que as duas metades do cérebro cooperassem, se completassem e se desenvolvessem uma à outra, em vez de interferirem e estarem em conflito. Há, da parte destes autores, e de maneira clara e frontal, um apelo para que se viva a Matemática de forma total e não parcial.

Porém, e dentro da actividade matemática, o caminho estreito e delicado do cálculo formal leva-nos muitas vezes directamente contra um muro de mistério (Davis & Hersh, 1995). Por exemplo, em 1545, Cardano indica a seguinte solução para a equação

$$x^3 + mx = n : x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}}.$$

Este resultado origina uma enorme dúvida e inquietação — que significado atribuir a  $\sqrt{-121}$  (naquela época, as raízes quadradas de números negativos não tinham qualquer legitimidade; a teoria dos números complexos não existia; como interpretar este símbolo sem sentido?). Para Davis e Hersh (1995), o que se tem aqui é incompletude e enigma. As necessidades internas da Matemática criam pressões para que se procurem explicações. Somos curiosos. Queremos compreender. A nossa metodologia conduziu-nos a um novo problema.

Em Matemática cruzam-se, assim, duas actividades fundamentais — o uso e a criação de novas ideias. A utilização de conceitos, de resultados e de técnicas para resolver um problema concreto envolve normalmente um ciclo de matematização (identificação dos aspectos matemáticos da situação), manipulação (transformação das relações matemáticas anteriores noutras mais adequadas ao fim em vista) e interpretação (estudo dos resultados obtidos com vista a obter uma solução para o problema inicial). A transformação dos conceitos e representações matemáticas — a partir de problemas e questões não resolvidas — dá origem a novos conceitos, relações e procedimentos que podem tomar o seu lugar no corpo do conhecimento matemático (Ponte e Serrazina, 2000). Tal como estes autores afirmam, o raciocínio matemático tem uma dupla natureza — por um lado apoia-se na intuição e, por outro, visa uma progressiva formalização.

### A concluir

Os matemáticos quando falam sobre a sua actividade de investigação fazem referência, com frequência, ao seu sentido estético. Associam fortemente à invenção matemática um conjunto de imagens visuais vagas e imprecisas, reconhecendo, também, o papel muito importante que nela tem o trabalho do inconsciente. Para além da importância das representações concretas no pensamento matemático, é real-

çada a relevância dos sinais pessoais ao nível do pensamento interno de cada um — são estes sinais que dão significado ao conhecimento matemático.

Em Matemática identificam-se duas actividades fundamentais — o uso das ideias matemáticas e a sua criação apresentando-se o raciocínio matemático com duas vertentes essenciais: a intuição e a formalização. A prática dos matemáticos leva-nos, assim, a interpretar o raciocínio matemático como aquele que contempla uma vasta componente geométrica e quantitativa que mistura intuição e análise com inferência e dedução.

A Matemática escolar deve, por tudo isto, promover o uso do raciocínio para fazer conjecturas e aplicar o raciocínio intuitivo e dedutivo. O ensino da Matemática escolar deve também ter em conta os aspectos não verbais, espaciais e holísticos do pensamento, para além dos aspectos mais analíticos e formais, pois é isso que os matemáticos fazem, de facto.

### Referências

- Davis, P. J. & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25–41). Dordrecht: Kluwer.
- Flato, M. (1994). *O poder da Matemática*. Lisboa: Terramar.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. An educational approach. Dordrecht: D. Reidel.
- Hadamard, J. (1996). *The Mathematician's Mind*. New Jersey: Princeton University Press.
- Malcolm, C. (2007). Dividing the kingdom. Em Gellert, U & Jablonka, E. (Eds.), *Mathematisation and Demathematisation — Social, Philosophical and Educational Ramifications*. pp. 107–122. Roterdão: Sense Publishers.
- Matos, J. M. & Serrazina, M. L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- National Council of Teachers of Mathematics (1999). *Developing mathematical reasoning in grades K–12*. NCTM.
- Poincaré, H. (1987). Intuição e Lógica em Matemática. Em APM (ed.), *Cadernos de Educação Matemática 1*, pp. 7–16. Lisboa: APM.
- Poincaré, H. (1996). A invenção matemática. Em APM (Ed.), *Investigar para aprender matemática*, pp. 7–13. Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Steen, L. A. (1999). Twenty Questions about Mathematical Reasoning. Em NCTM (Ed.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K–12*, pp. 270–285. NCTM.

Manuel Joaquim Saraiva

Departamento de Matemática da UBI e CIEFCUL