Resolvo problemas, logo penso

Leonor Moreira

O tema deste número da revista é o Raciocínio Matemático (RM) e supõe-se que eu discorra acerca do mesmo. Mas de que estamos a falar? Ao que parece, o RM não se deixa encaixar em nenhuma definição, isto é, não é possível atribuir-lhe significado, pelo menos de acordo com a ideia clássica de significado usado na teoria semântica. De facto, o RM não tem um conjunto de características definidoras necessárias e suficientes. Se, por um lado, tem semelhanças com outros tipos de raciocínio, por outro, há evidência de que, por exemplo, um bom solucionador de problemas de geometria pode ser um desastre na resolução de problemas de cálculo combinatório, não tanto porque os conteúdos são diferentes, mas, essencialmente, porque os processos subjacentes são completamente distintos[1].

Rodeemos então a dificuldade. Toda a gente sabe o que é resolver um problema: é o que se tem de fazer quando não se sabe o que se tem de fazer. Ou, de um modo mais académico, estamos perante uma situação problemática quando conhecemos um estádio da situação, pretendemos atingir um outro e não encontramos forma de o fazer. Duncker[2], em 1945, estabeleceu que se não conseguimos, por meio da acção, passar de uma situação dada para uma situação/objectivo, então temos de recorrer ao *raciocínio*. Logo, se a situação tiver um cariz matemático, teremos de recorrer ao *raciocínio matemático*, concluo eu. Portanto, falar de raciocínio matemático é falar de resolução de problemas matemáticos.

Parece haver consenso na ideia de que só se aprende a resolver problemas, resolvendo problemas (pelo menos, esta é a frase mais citada de George Pólya[3]) ou, como diz Seymour Papert, num âmbito mais alargado, aprende-se metendo as mãos na massa[4]. Aliás, uma ideia já anteriormente introduzida pelo médico e psicólogo suíço Édouard Claparède (1873–1940), um dos mais influentes europeus da escola da psicologia funcionalista que incentiva a atitude participante do educando.

Partindo destes pressupostos, e no sentido de propiciar aos alunos, mais oportunidades de desenvolverem o raciocínio matemático, a Escola Superior de Educação de Lisboa vem promovendo um concurso de problemas via internet, o Eureka, com duas vertentes: uma para o quarto ano de escolaridade e outra para o segundo ciclo[5]. É desse trabalho — e da experiência acumulada, ao longo dos anos — que resultam as observações e as reflexões que aqui vos deixo.

Na resolução de situações problemáticas, coexistem dois processos: a representação mental da situação e a resolução propriamente dita. Contudo, estes processos não são estanques nem se sucedem, inexoravelmente, um a seguir ao outro, antes se interpenetram e confundem[6]. O processo de resolução de um problema é como uma espiral em que cada volta representa uma representação mais rica, mais elaborada do que a anterior; cada volta corresponde a um passo em frente na compreensão da situação, mesmo que, por vezes, o suposto solucionador tenha de rejeitar a ideia, o procedimento, a conjectura que formulou, para recomeçar com algo diferente[7].

Quando confrontadas com um problema, as pessoas, têm dois tipos diferentes de comportamento. Umas tentam descobrir pistas, palavras como «mais», «menos», «vezes», «pobrezinhos»[8] porque pensam que estas as guiarão na selecção da operação ou operações a efectuar; de seguida, seleccionam números com os quais encetam as operações escolhidas. Isto é, calculam primeiro e pensam depois[9]. É o que alguns autores chamam de *estratégia da tradução directa.* A alternativa — *estratégia da construção de uma representação do problema* — consiste em dar sentido às diferentes asserções e combiná-las numa representação qualitativa do problema para, só depois, começar a seleccionar estratégias de resolução[10]. Neste tipo de estratégia, as pessoas averiguam da pertinência do que se pergunta em relação ao que sabe, identificam a informação relevante, dão sentido às relações entre as diferentes variáveis em presença, conjugam distintas condições do problema, em suma, constroem uma primeira representação mental do problema para, só depois, passarem à fase de resolução.

Larkin, citado por Silver (obra citada) contrastou as abordagens feitas por peritos e neófitos na resolução de problemas e notou que os primeiros, antes de tentarem qualquer estratégia de resolução, substituem o problema original por uma versão abstracta que retém a estrutura e as características do original e é esta versão que os guia na resolução do problema. Pelo contrário, os principiantes iniciam, imediatamente, uma análise quantitativa.

Para exemplificar o que acabo de afirmar, consideremos um dos problemas que os concorrentes do Eureka — 1.º ciclo tiveram de resolver em 2007:

Grande pescaria!

O João e a Rita foram pescar. E que tal foi a pescaria, apanharam 95 peixes! A Rita pescou quatro vezes mais peixes do que o João.

Quantos peixes pescou cada um?

Os alunos que usaram a estratégia de tradução «pescaram» o 4 *vezes* e dividiram o 95 por 4 (23,75), porque «quando diz vezes é para dividir». Os concorrentes que responderam desta forma, com ou sem justificação, nem sequer se aperceberam que não é normal pescar pedaços de peixes, sinal de que não construíram, nem *a posteriori*, uma representação da situação.

Muitos concorrentes resolveram o problema por tentativas, entre eles, o Pedro[11]:

(...) ou seja pegava num número e multiplicava por 4 e ao resultado somava-lhe o mesmo número até chegar ao total dos 95 peixes.

Exemplifico a partir do 15 (que foi onde comecei):

$15 \times 4 = 60; 60 + 15 = 75 \rightarrow$ Palpite errado
$17 \times 4 = 68; 68 + 17 = 85 \rightarrow$ Palpite errado
$18 \times 4 = 72; 72 + 18 = 90 \rightarrow$ Palpite errado
$19 \times 4 = 76; 76 + 19 = 95 \rightarrow$ Palpite certo

Isto é, este concorrente construiu uma representação mental da situação em que deu sentido às duas condições separadamente, impondo uma delas a partir de um número ao acaso, e verificando, em seguida, se a segunda condição do problema era, ou não, satisfeita. Um processo legítimo, mas que não assegura, por si só, se a solução é única. O concorrente deveria ter continuado a demanda da solução — o que lhe foi explicado — para ter a certeza de que não havia outra solução. De facto, na segunda resposta o concorrente justificou a não existência de mais nenhuma solução:

(...) à medida que os meus palpites aumentam, o valor da soma cresce cada vez mais e portanto vai-se afastando cada vez mais do 95.

Os concorrentes que construíram uma representação do problema mais refinada, conjugando as duas condições, precisaram de um suporte mais real, usando objectos do quotidiano para concretizarem a relação entre as partes e a relação destas com o todo. E, assim, começaram a construir o conceito de fracção. Vejamos uma dessas respostas, a do Paulo:

Para ficar mais fácil, pensei que se a Rita pescou 4 vezes mais peixes que o João, era como se ela tivesse 4 baldes cheios de peixe e o João, 1 balde. Assim, dividi o total por 5, o que dá o número de peixes por balde. Como o João só tem 1 balde, só tem 19 peixes. A Rita tem 4 baldes, ou seja, $4 \times 19 = 76$ peixes.

Ainda que a um nível elementar, esta atitude é consistente com os resultados de várias investigações em que se afirma que, no processo de resolução de problemas, as pessoas se envolvem em processos metafóricos para construírem representações mentais do problema, isto é, procuram analogias entre o problema e situações que lhes são familiares e usam essas analogias para construírem representações do problema[12].

Um problema com estrutura idêntica apareceu na final do Eureka — 2.º ciclo (2008)[13]:

Alguém anda a dormir pouco

Durante a noite, ouviu-se uma coruja a piar. O lobo Esfaimado dorme quando a coruja Sabichona está acordada e está acordado quando a Sabichona dorme. O Esfaimado dorme tanto numa semana quanto a Sabichona dorme num dia.

De acordo com estas informações, quantas horas por dia dorme cada um desses animais?

Este enunciado é mais elaborado, pois enquanto no problema anterior as condições estão explícitas, neste outro é necessário interpretar o enunciado para extrair as várias condições do problema: 1) a soma do número de horas dormidas por cada animal é 24; 2) o lobo dorme um sétimo do tempo que a coruja passa a dormir.

Vejamos, então, a resposta do mesmo Paulo, já com dois anos de experiência:

Se o Lobo só consegue dormir o que a coruja dorme ao fim de 7 dias então é porque num dia só dorme 1/7 do que dorme a coruja.

Para já, se utilizarmos a sétima parte vamos dividir o dia em 8 partes para ficarem 7 para a coruja e uma para o Lobo e, assim, a coruja fica a dormir 7× mas:

$$24 \div 8 = 3 \xleftrightarrow{3+3+3+3+3+3+3} +3$$

coruja lobo

R: A coruja dorme 21h por dia e o lobo 3h.

Verificação: 3 é a sétima parte de 21, como tal, o Lobo precisará de 7 dias (uma semana) para dormir tanto como a coruja num dia.

O concorrente, numa única frase, sintetiza as duas condições e não precisa de qualquer suporte para construir uma representação mental do problema, relacionando, imediatamente, as partes entre si e estas com o todo.

De notar, ainda, que o aluno termina com uma verificação, um dos aspectos que procurei incutir ao longo de todo o concurso.

No concurso Eureka, também não se aceitam respostas não explicadas. Pretendo com isso: 1) fomentar a reflexão sobre o que se faz e, assim, trazer a níveis superiores de consciência o que muitas vezes é feito quase inconscientemente; 2) aprender a convencer-se a si mesmo (e aos outros) da razoabilidade do que se faz e dos resultados a que se chega; 3) «fotografar» mentalmente estes momentos para que constituam uma reserva de experiência matemática. Esta actividade, de carácter metacognitivo — falar do que se pensou e fez — é, por ventura, uma das mais importantes para melhorar o raciocínio matemático.

Um outro problema da mesma final consistia em transformar uma mesa:

De rectângulo para quadrado?!

As refeições são servidas em mesas rectangulares cuja dimensão maior (comprimento) é o triplo da sua menor dimensão (largura).

Se a mesa tivesse menos 3 metros de comprimento e mais 3 metros de largura então o seu tampo teria a forma de um quadrado.

Quais são as dimensões da mesa?

Vejamos os dois tipos de resposta certa, completamente diferentes no estilo. Primeiro, a do Pedro, na tabela 1.

Na primeira tabela estão várias mesas rectangulares em que o comprimento é triplo da largura. Na segunda tabela estão as mesas que se obtêm tirando 3 metros ao comprimento e acrescentando 3 metros à largura. Olhando para as duas tabelas vi que a mesa inicial só podia ter 9 metros de comprimento e 3 metros de largura, pois só assim obtenho uma mesa quadrada.

Rectângulo

Comprimento	Largura
3	1
6	2
9	3
12	4
15	5

Quadrado

Comprimento	Largura
$3-3=0$	$1+3=4$
$6-3=3$	$2+3=5$
$9-3=6$	$3+3=6$
$12-3=9$	$4+3=7$
$15-3=12$	$5+3=8$

Tabela 1.

Também sei que não há mais nenhuma solução, porque a diferença entre o comprimento e a largura começou por ser 4, depois 2, depois obtive uma mesa quadrada e a seguir a diferença volta a ser 2 e a seguir 4 e vai aumentando.

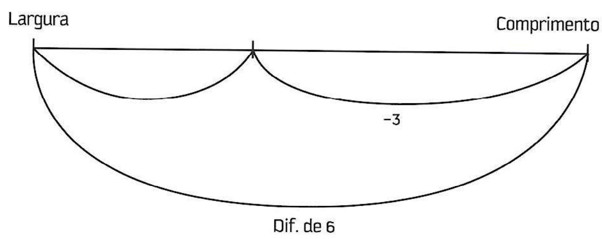
Passados dois anos, o Pedro já aprendeu que tem de mostrar que a solução que encontrou é única, mas continua a trabalhar as condições do problema separadamente.

Agora, prestem atenção à resposta do Paulo:

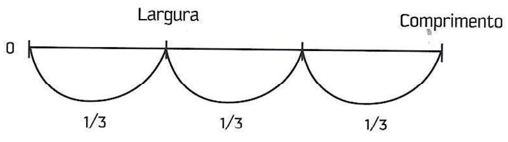
Para a segunda condição do problema é necessário que:

$$\text{Comprimento} - 3 \text{ metros} = \text{largura} + 3 \text{ metros}$$

Ora, se retirarmos 3 metros ao comprimento e ainda colocarmos 3 metros na largura, a diferença entre as duas medidas é 6 metros:



Agora, se o comprimento é o triplo da largura (1.ª condição), significa que a largura é 1 dos terços do comprimento:



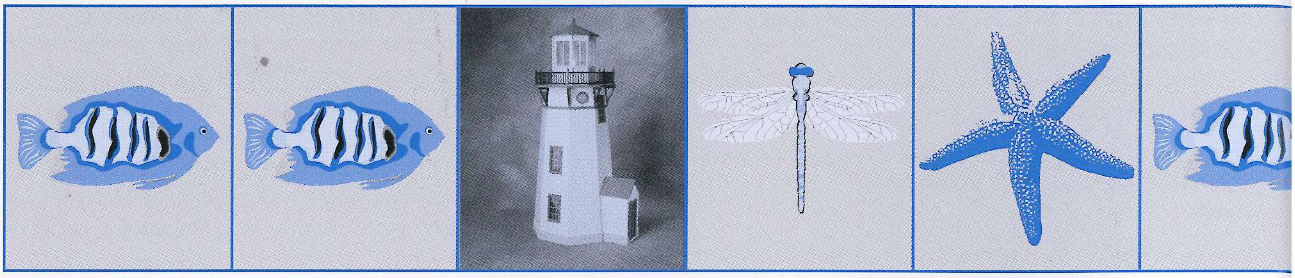


Figura 1

E também já sabemos que a diferença entre as duas dimensões é seis e acabamos de ver que a diferença entre as duas dimensões equivale a 2/3 do comprimento.

Então se 2/3 do comprimento é 6, 1/3 é 3 (o que equivale à largura) e o total é 9, que equivale ao comprimento.

R: O comprimento é 9 m e a largura é 3 m.

Verificação: 1.ª condição: 9 é o triplo de 3
2.ª condição: $9 - 3 = 6$ e $3 + 3 = 6$

Bom, o raciocínio deste miúdo e a capacidade de o explicar são impressionantes. Começa por combinar duas operações numa só: subtrair 3 a uma das variáveis e adicionar 3 à outra é o mesmo que adicionar 6 a esta última. Implicitamente, está a resolver uma equação. Depois, considerando o comprimento como a totalidade, não só relaciona a largura com aquele — invertendo a relação explícita no texto — como deduz a relação/diferença entre as duas medidas. E, finalmente, deduz, a partir do valor dos 2/3, o valor da totalidade. Tudo isto acompanhado de esquemas, não vá o professor/corrector não perceber o que ele está a dizer! Pode-se dizer que este aluno já desenvolveu uma compreensão de fracção a um nível conceptual e não, meramente, procedimental. Fiquei boquiaberta quando o chamei ao palco para receber o primeiro prémio, nunca o imaginei tão rapazinho, tal a qualidade das suas respostas! Afinal, ele acabava de completar o quinto ano de escolaridade e, no ano anterior, nem sequer tinha ficado colocado entre os cinco primeiros classificados!

No Eureka não descuramos os aspectos emocionais e psicológicos. Os concorrentes têm, sempre, uma segunda oportunidade de resposta — como já devem ter percebido — e recebem dicas para melhorarem as suas respostas ou ultrapassarem eventuais bloqueios.

Um dos problemas do Eureka (2.° ciclo) em 2008 era o seguinte.

Match Point

Um campeonato de ténis é disputado de acordo com o sistema *knock-out*, ou seja, o jogador fica fora do torneio quando perde uma partida.

Quantos jogadores participaram do campeonato se foram disputadas 31 partidas no total?

Quantas partidas serão disputadas num torneio se 55 jogadores estiverem inscritos?

Aos alunos que bloquearam apontei a seguinte pista: Por que não começas por pensar num problema mais simples?

Se fossem só dois jogadores, quantas partidas seriam precisas para apurar o vencedor?

E se fossem três? E no caso de quatro? E se fossem 5?

Esta sugestão ajuda a formular uma conjectura, isto é, a formular uma afirmação cuja veracidade parece razoável. Trata-se de particularizar, num primeiro momento, para depois generalizar. Averiguar da validade da generalização e, finalmente, aplicar ao caso concreto. Este processo completo constitui a essência do raciocínio matemático.

Atentemos numa resposta que usou a pista dada:

1. Ora, para chegar à resposta deste problema tem de se pensar em vários outros exemplos, os quais são:
   1 partida = 2 jogadores
   2 partidas = 3 jogadores
   3 partidas = 4 jogadores
   4 partidas = 5 jogadores
   Etc.
   Reparamos então que o número de jogadores é sempre igual ao número de partidas + 1.

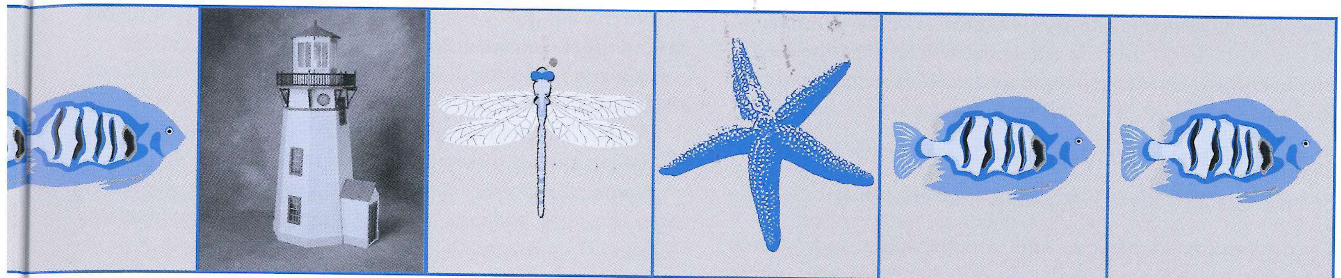
R: Participaram neste campeonato 32 jogadores.

2. A mesma coisa que o primeiro, só que desta vez:
   1 jogador = 0 partidas
   2 jogadores = 1 partida
   3 jogadores = 2 partidas
   4 jogadores = 3 partidas
   Etc.
   Concluímos que o número de partidas é sempre igual ao número de jogadores − 1.

R: Serão disputadas 54 partidas.

É claro que não foi provada, nesta resposta, a conjectura que o número de jogadores é igual ao número de partidas mais um. Talvez não tenha conseguido passar a ideia de que 4, 5, 30, 1000 casos que sejam, não são suficientes para se ter a certeza de que uma conjectura é válida e pode ser instituída como teorema.

Para confirmar a conjectura, a Sofia apresentou uma prova a que eu chamaria prática. Ela aproveitou uma suges-



tão já dada noutro momento e, por isso, começou o torneio do fim para o princípio:

Na final era só uma partida, por isso, participaram 2 jogadores.

Na 1\2 final, eram 2 partidas, logo 4 jogadores.
Nos 1\4 de final, havia 4 partidas, logo 8 jogadores.
Nos 1\8 de final, eram 8 partidas e por isso 16 jogadores.
Nos 1\16 de final, havia 16 partidas e 32 jogadores.

Ou seja, se somarmos o número total de partidas, vai dar 31 partidas, que era o número de partidas disputadas no campeonato, e, por isso, a resposta é 32 jogadores.

A Joana surpreendeu com uma resposta concisa que demonstra uma compreensão notável do problema e um raciocínio lógico inesperado, dada a idade dos concorrentes. Vejamos:

Se há 55 jogadores e só um ganha é porque perdem 54. Como só se pode perder uma vez, cada um dos 54 perde uma partida ou seja são necessárias 54 partidas para encontrar o vencedor.

Enquanto a resposta da Sofia usa uma estratégia de reconstrução, refaz o torneio fase a fase — ainda que do fim para o princípio — a Joana usa uma estratégia de redução, a concorrente pensa nos jogadores que saem e deduz o que teve de acontecer para saírem.

Concorrentes houve que não acharam possível haver 55 concorrentes, pelo facto do jogo se desenvolver em partidas entre dois jogadores. Foi-lhes, então, explicado que, embora os organizadores dos torneios comecem por inscrever um número par de jogadores, acontece, por vezes, alguns terem de faltar por lesão, ou abandonarem a competição, já com ela a decorrer. Isso não pode impedir os seus potenciais adversários de participarem. Depois, deste esclarecimento, a Inês organizou o torneio, segundo os cânones:

- Com 55 jogadores inscritos fazem-se 27 grupos de 2 jogadores (sobrando 1 jogador): realizam-se 27 partidas.

  Ficam seleccionados 27 jogadores + 1 jogador (que sobrou) = 28 jogadores.
- Com 28 jogadores fazem-se 14 grupos de 2 jogadores: realizam-se 14 partidas.

  Ficam seleccionados 14 jogadores.
- Com 14 jogadores fazem-se 7 grupos de 2 jogadores: realizam-se 7 partidas.

  Ficam seleccionados 7 jogadores.
- Com 7 jogadores fazem-se 3 grupos de 2 jogadores (sobrando 1 jogador): realizam-se 3 partidas.

  Ficam seleccionados 3 jogadores + 1 jogador (que sobrou) = 4 jogadores

  … …

E por aí fora até encontrar o vencedor, em 54 partidas.

Muitos matemáticos e investigadores pensam que «os padrões são a verdadeira essência da matemática»[14]. Goldin descreve, mesmo, a matemática como «a descrição e o estudo sistemáticos de padrões»[15]. Entre professores e investigadores em Educação Matemática, há uma forte convicção de que o trabalho com padrões — numéricos ou pictóricos — contribui para construir os alicerces do raciocínio algébrico[16]. No Eureka começámos por trabalhar com padrões pictóricos:

Um friso regular

O Sr. Joaquim, pedreiro, está a construir, em mosaicos, o friso de uma piscina (figura 1). Ora vê como está a ficar bonito.

Se o Sr. Joaquim mantiver sempre a mesma sequência, qual será o ladrilho que colocará a seguir?

Se o friso levar 130 ladrilhos, quantos peixes serão necessários? Se friso levar 134 ladrilhos, quantos ladrilhos com a libelinha serão necessários?

Também aqui houve vários tipos de resposta que correspondem a diferentes estádios cognitivos. Alguns concorrentes descobrem o padrão, a sequência que se repete, mas precisam de desenhar a totalidade do friso para descobrirem o número de peixes e de libelinhas necessários. Não conseguiram (ou não quiseram) trabalhar a um nível mais abstracto.

Entre os outros concorrentes, a resposta às duas primeiras questões não levantou problemas. Já a terceira pergunta tem vários tipos de resposta. Segue-se uma em que o concorrente parte do resultado obtido na questão anterior e concentra-se, apenas, nos quatro ladrilhos a mais:

A resposta é 27 libelinhas. Aproveita-se o mesmo cálculo da resposta acima dada: 130 : 5 = 26. Se em 130 ladrilhos 26 serão libelinhas, se colocarmos a seguir mais quatro ladrilhos, pela ordem, haverá mais uma libelinha, pois precisamente o quarto e último ladrilho corresponde ao lugar que a libelinha ocupa na sequência.

Alguns alunos, na terceira pergunta, recorrem, novamente à divisão:

Seguindo o mesmo raciocínio, dividimos 134 por 5 e obtivemos 26 e resto 4. Como em cada sequência de 5 há uma libelinha, e esta se encontra em quarto lugar na sequência, temos mais uma libelinha e assim $26 + 1 = 27$ libelinhas.

E que dizer da seguinte resposta?

São precisas 26,8 libelinhas, porque $134 : 5 = 26,8$.

O concorrente identificou bem a sequência e tudo correu bem com os peixes pelo facto do quociente ser um número inteiro. Se a divisão por 5 funcionou no primeiro caso, por que não voltar a fazê-la? O concorrente calculou antes de pensar e isso levou-o a esquecer-se que havia 134 ladrilhos inteiros e não bocados deles. Nesta situação, há três realidades: a totalidade dos ladrilhos, a sequência que se repete e os ladrilhos enquanto objectos individuais. Na resposta parece haver uma assimilação do objecto individual ao grupo/ sequência — se este não é completo, o ladrilho só contribui com um bocado. Aparentemente, na sua experiência com a divisão como formação de grupos, nunca se confrontou com grupos incompletos em que tivesse de interpretar o que se passava ao nível dos elementos do grupo. Para este concorrente, a divisão inteira (ou euclidiana) não existe.

Uma convicção das crianças deste nível etário — que vem naturalmente das suas experiências anteriores — é que um problema tem sempre solução e esta é única. Convencê-los (e aos pais) de que a resposta está incompleta, quando apresentam uma só solução e o problema tem mais, é um caso bicudo. Mas não é sempre assim! No Eureka — 1.º ciclo (2007), o nono problema tinha uma infinidade de soluções:

No poupar é que está o ganho

No seu aniversário, deram ao Francisco um mealheiro e ele decidiu retirar da sua semanada, todos os dias, três moedas: uma de 5 cêntimos, outra de 10 cêntimos e ainda outra de 20 cêntimos.

Quando o mealheiro ficou cheio, o Francisco abriu-o e verificou que tinha um número exacto de euros, nem um cêntimo a mais, nem um cêntimo a menos.

Quantos dias demorou o Francisco a encher o mealheiro e quanto conseguiu economizar?

Depois de receber as primeiras respostas, a maioria com uma solução apenas — 7 euros, o menor número que satisfaz as condições do problema — enviei a seguinte mensagem: Tens a certeza de que o Francisco só economizou isso? Tão pouco?!

Foi um alerta e alguns concorrentes perceberam, então, que havia mais soluções, mas o tamanho dos mealheiros é limitado e a certa altura — aí pelas 120 moedas — achavam que era impossível o Francisco ter poupado mais dinheiro. A questão prática colidia com o modelo teórico: de facto não há informação para optar por esta ou aquela solução; teoricamente todas as soluções são boas.

O Gonçalo percebeu o que estava em causa e escreveu:

O Francisco retira todos os dias uma moeda de 5 cêntimos, outra de 10 cêntimos e outra de 20 cêntimos, o que dá 35 cêntimos por dia.

No dia em que o Francisco abriu o mealheiro este estava cheio e tinha uma quantia certa em euros.

Somando todos os dias 35 cêntimos, apenas no 20° dia dá conta certa, 7 euros.

Ao dia 40 dá 14 euros, ao dia 60 dá 21 euros, etc. De 20 em 20 dias reparei que dá sempre euros certos.

Como não sabemos a dimensão do mealheiro, pode haver várias respostas, pode ser 20 dias e 7 euros, 40 dias e 14 euros, 60 dias e 21 euros, etc.

Para dar conta certa somamos sempre 20 dias e somamos sempre 7 euros.

Mas havia quem resistisse em aceitar o modelo teórico... E houve um pai que teve uma atitude muito pedagógica:

(...) Punha-se, agora, outro problema — Qual a capacidade do mealheiro? Quantas moedas nele caberiam? E isso não nos é dito no enunciado.

Assim, com a ajuda do meu pai e de uma proveta graduada em cm^3, medimos o volume aproximado das três moedas (0,20 €; 0,10 €; 0,05 €).

Para isso, deitámos água na proveta até à marca de 5 cm^3 e depois depositámos as 3 moedas e verificámos que a proveta ficou a marcar 7 cm^3, pelo que as 3 moedas ocupam um volume igual a 2 cm^3 $(7 - 5)$.

Resolvemos fazer uma tabela em que se pode verificar que o mealheiro podia ficar cheio ao 20.º dia (7 euros) e a todos os seus múltiplos, tudo dependendo do número de moedas que lá coubessem, isto é, da sua capacidade.

E seguia-se a tabela que, por falta de espaço, não se reproduz aqui.

Na final do Eureka (2008), naturalmente satisfeito com o lugar alcançado na final, um concorrente não deixou de manifestar a sua perplexidade:

«Uma coisa que me deixa confuso é que, na escola, a minha colega M tem sempre melhores notas a matemática do que eu, mas, nas duas finais do Eureka, eu fiquei sempre muitos lugares acima dela!».

Os programas do Ensino Básico são bem explícitos. Ao elegerem, como capacidades transversais, a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação, expressam uma concepção da matemática mais como um processo do que como um produto, mais como um conjunto de ideias de que como um conjunto de regras e resultados. Os programas recomendam que os novos conceitos sejam introduzidos e trabalhados a propósito da resolução de problemas, mas muitos professores não acreditam no óbvio: as crianças são capazes de inventar procedimentos correctos para resolver muitas situações problemáticas, estão aptas para desenvolverem estratégias aritméticas ou outras, sem ensino formal, são capazes de adicionar e subtrair para resolverem problemas, antes de aprenderem, formalmente, aquelas operações, porque atendem ao conteúdo semântico da situação para construírem uma eficaz representação mental.

Vamos então deixar que as crianças desenvolvam atitudes e convicções que espelhem uma visão de uma matemática desafiante, criativa e interessante, uma matemática que faz raciocinar!

Notas

1 Sternberg, R. J. (1996). What is mathematical thinking? In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.) *The nature of mathematical thinking* (pp.303–318). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

2 Citado em Mayer, R & Hegarty, M. (1996). The process of understanding mathematical problems. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.) *The nature of mathematical thinking* (pp. 29–53). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

3 Polya, G. (2003; 1945). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.

4 Papert, S. (199). O computador, torta de barro. In *Educação e Matemática*, n.° 2, pp. 19–20.

5 Para mais pormenores, consulte, http:/www.eselx.ipl/eureka e ..../eureka1 e ... /eureka2

6 Silver, E. (1987) . Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem-solving instruction. In Alan Schoenfeld (Ed.) *Cognitive Science and mathematics education* (pp. 33–60). Hilsdalle, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

7 Mason, J., Burton, L.& Stacey Kaye (1992; 1982). *Pensar matematicamente*. Madrid: M.E.C.

8 Lembrei-me que a professora do ensino primário do Eduardo Veloso, terá industriado os seus alunos para efectuarem uma divisão se no enunciado de algum dos problemas do exame aparecesse a palavra «pobrezinhos».

9 Ver, também: Moreira, L. (1987). A resolução de problemas. *Educação e Matemática*, n.°1, pp. 10–12.

Costa, L. B. (1990). A resolução de problemas: qual o estado das coisas? *Educação e Matemática*, n.°14, pp. 7–8 e 32.

10 Mayer, R & Hegarty, M. (1996). Obra citada.

11 Respeitei, sempre, nas transcrições, a grafia e a pontuação originais. Os nomes nem sempre são os verdadeiros, por motivos que se entendem.

12 Ver: Clement, J. (1983). *Analogical problem solving in science and mathematics*. Montreal: A.E.R.A.

Carreira, S. (1998). *Significado e aprendizagem da matemática — dos problemas de aplicação à produção de metáforas conceptuais*. DEFCUL: tese de doutoramento (policopiada).

13 De notar que 90% dos alunos presentes na final deste ano já tinham concorrido no ano anterior (2007) e, portanto, já tinham a experiência da pescaria.

14 Sandfurd and Camp citados por Samsom, D. (2007). Patterns of visualization. *Learning & Teaching Mathematics*, n.° 5, pp. 4–9.

15 Citado por Samsom, D. & Shafer, M. (2007). An analysis of the influence of question design on learners' approaches to number pattern generalisation tasks. Pythagoras, n.° 66, pp. 43–51.

16 Moreira, L. (1990). Os alicerces do pensamento algébrico. *Educação e Matemática*, n.° 16, pp. 17–18.

Leonor Moreira

Raciocinar em ... Arquitectura

Em arquitectura o raciocínio analítico conjuga-se com a imaginação formal. É necessário interpretar correctamente o programa, nas suas várias vertentes — funcional, construtiva, técnica — mas ao mesmo tempo visualizar as formas, os espaços, a sua organização, o modo como serão utilizados.

Esta imaginação tem que ser condutora, o mero tratamento dos aspectos funcionais é estéril como Arquitectura. Antes da análise detalhada do programa, o arquitecto observa e estuda outros aspectos — o lugar e a envolvente do futuro edifício, sistemas de vistas e orientação solar, relação com as vias de acesso... Dessa observação nasce a primeira ideia, embrião da forma que o edifício quer ter. Depois, começa a luta pela conquista da forma final, cruzamento da primeira ideia com as necessidades do programa, da forma-função, dos custos e métodos de construção, do diálogo com as engenharias, etc.

Nesse processo, o arquitecto raciocina pelo desenho — rigoroso ou esboçado à mão livre, em apontamentos de perspectiva, com ou sem régua, medidas ou auxiliares geométricos. Pensa graficamente — num processo inteiramente intuitivo e interiorizado, «under my skin», que permite pensar e ver, ver e pensar, e que não é, de todo, separável do exercício do seu mister — um arquitecto pensa com e pelo desenho.

Sérgio Pinhão **[Arquitecto]**