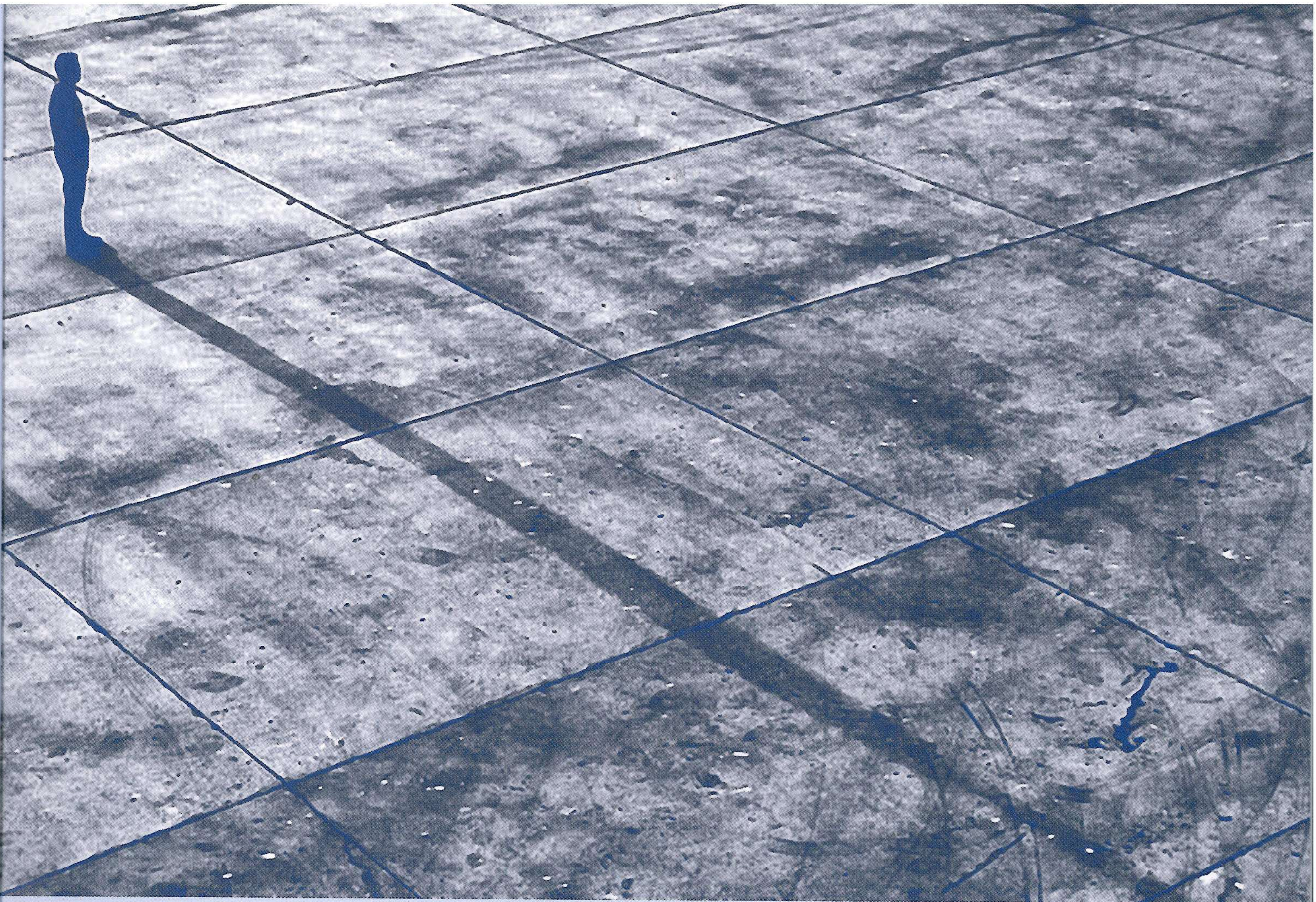

O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia *soft*

Paulo Oliveira

Raciocínio matemático: De que falamos?

A expressão «raciocínio matemático» designa um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio). É frequente considerar-se que a obtenção dessas novas proposições se faz através do raciocínio dedutivo, esquematizável na forma «Se A então B» (simbolicamente, $A \Rightarrow B$). A uma sequência de deduções, do tipo $A \Rightarrow B \Rightarrow \ldots \Rightarrow Z$, chama-se demonstração[1]. A demonstração é, por isso, central ao raciocínio tipicamente matemático. Sobre isso, o matemático americano Melvyn Nathanson (2008) afirma: «Descobrir uma demonstração, ter a imaginação e o génio para conceber uma cadeia de raciocínio que vai de axiomas triviais a conclusões extraordinariamente belas — este é um talento raro e maravilhoso. Isto é matemática.»

Os raciocínios matemáticos organizados em demonstrações estão historicamente comprometidos e têm características distintivas de acordo com as diversas áreas da matemática. Ernest (1994), salienta que «a emergência da demonstração na matemática da Grécia antiga, reflectiu as circunstâncias sociais, políticas e culturais desse tempo» (p. 40). É sabido como, na antiguidade, os gregos valorizavam e promoviam a controvérsia, o cepticismo e a especulação em torno das mais variadas ideias. Ainda segundo Ernest, na origem do método axiomático, tão caro aos matemáticos, está o raciocínio dialéctico em que um ou mais disputantes discorriam sobre a plausibilidade lógica de certas hipóteses. Os axiomas constituíam um ponto de partida de aceitação comum nessa disputa dialéctica. Uma vez estabelecidos os axiomas, as conclusões, obtidas através de raciocínio dedutivo, seriam aceites pelos disputantes.

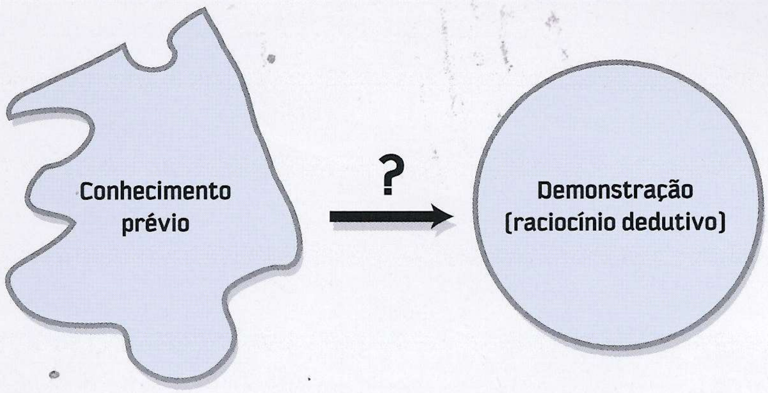

Figura 1.

Contudo, identificar a matemática com o raciocínio dedutivo deixa sem resposta uma questão fundamental: o que se passa antes de se chegar à demonstração? Por outras palavras, como se chega ao conhecimento novo que posteriormente é organizado dum modo dedutivo? (ver figura 1)

Pretender responder a esta questão significa valorizar a matemática não apenas como produto (conhecimento organizado dedutivamente) mas como processo (como se gera esse conhecimento). Há muitos autores (incluindo matemáticos) que têm defendido que a actividade matemática está muito para além do raciocínio dedutivo. Por exemplo, Sternberg (1999), salienta que o raciocínio matemático requer pensamento analítico, criativo e prático. Também Steen (1999) afirma que este raciocínio às vezes «denota a metodologia distintiva da matemática do raciocínio axiomático, dedução lógica e inferência formal. Outras vezes assinala uma habilidade quantitativa e geométrica muito mais abrangente que mistura análise e intuição com raciocínio e inferência, tanto rigorosas como sugestivas» (p. 270). A importância da intuição no processo de criação matemática é, igualmente, sublinhada por Henri Poincaré que defende, em *Science et méthode* (1909), que «a lógica não basta; (...) a ciência da demonstração não é a ciência inteira, (...) a intuição deve conservar o seu papel como complemento, quase se poderia dizer como contrapeso ou como antídoto da lógica» (p. 20). Noutra sua obra, *La valeur de la science* (1905), Poincaré sublinha que a dedução não é uma inferência amplificante, ou seja, por si só não gera nada de novo: «a lógica inteiramente pura só nos levaria sempre a tautologias; não poderia criar coisas novas; não é dela sozinha que se pode originar qualquer ciência» (p. 19).

Claro que não existe uma lógica da descoberta ou invenção em matemática, i.e., um conjunto de passos que garantidamente conduzem a descobertas ou invenções mais ou menos relevantes. No entanto, as palavras do matemático americano Paul Halmos podem contribuir para tornar inteligíveis aspectos do processo que conduz a conhecimento matemático novo. Caracterizando elementos incontornáveis da actividade matemática, afirma:

> Quando o matemático trabalha faz conjecturas vagas, visualiza generalizações grosseiras, e salta para conclusões injustificadas. Ele arranja e re-arranja as suas ideias e torna-se convencido da sua verdade muito antes de poder escrever uma demonstração lógica. Não é provável que a convicção aconteça muito cedo — usualmente acontece depois de muitas tentativas, muitos falhanços, muito desânimo, muitas falsas partidas (...) é necessário trabalho experimental (...) experiências conceptuais [*thought experiments*]. Quando um matemático pretende demonstrar um teorema acerca de um espaço de Hilbert de dimensão infinita, examina o seu análogo de dimensão finita, vê em detalhe os casos a duas e três dimensões, frequentemente tenta um caso particular numérico, e, deste modo, espera ganhar um *insight* que a pura prestidigitação com a definição não produz. (Halmos, citado em Villiers, 1999, p. 21)

Destas observações de Halmos conclui-se que a análise de casos particulares, o estudo de analogias, o trabalho experimental, o pensamento vago (incluindo ideias pré-lógicas), o estabelecimento de conjecturas, as tentativas, os *insights* e a incerteza, muita incerteza, tipificam a actividade do matemático, no período que antecede a organização dedutiva do conhecimento. Halmos também assinala aspectos emotivos próprios dos processos investigativos, como o desânimo em razão de constantes fracassos e recuos, e a correspondente necessidade de perseverança.

A estimulação de *insights* pode ser feita, por exemplo, através de uma combinação de trabalho experimental, estudo de analogias, análise de casos particulares, tentativas, etc. Os matemáticos Bailey e Borwein (2001) reconhecem «que se podem usar analogias *quase-intuitivas* para ter *insight* em matemática (...) [e que] matemáticos honestos reconhecerão também o seu papel na descoberta» (p. 64).

Assim, as intuições e a construção de significado matemático são anteriores à sua organização dedutiva, como bem salienta Félix Klein:

> De facto, o matemático não se apoia em demonstrações rigorosas no grau que normalmente se supõe. As suas criações têm um significado para ele que precede qualquer formalização, e este significado dá às criações uma existência ou realidade ipso fac-

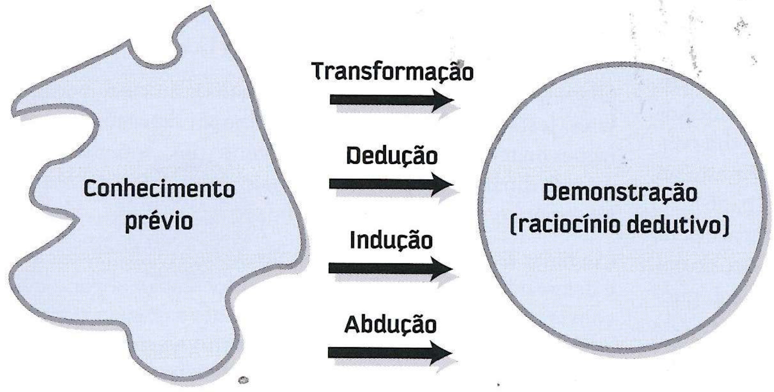

Figura 2.

to. (...) Grandes matemáticos sabem, antes de uma demonstração lógica ser alguma vez construída, que um teorema tem que ser verdadeiro. (citado em Villiers, 1999, p. 21)

A formalização das ideias matemáticas é um processo gradual e algo lento que surge em pleno quando se considera que essas ideias estão suficientemente maduras. Nesta actividade, os matemáticos preocupam-se em explicitar todos os axiomas, definições e outras ideias matemáticas em que se apoiam. No entanto, nem sempre há certeza de que tal aconteça: «Mas, pode sempre restar um aspecto da ideia que usamos implicitamente, que não formalizámos porque ainda não vimos o contra-exemplo que nos tornaria conscientes da possibilidade de duvidar dela». (Hersh, 1986, p. 19)

Esta é uma das razões pelas quais os matemáticos têm necessidade de revisitar, incessantemente, teorias passadas e «se afadigam com a estranha actividade de fornecer novas demonstrações de velhos teoremas» (Tasic', 2001, p. 148). Embora no caso de muitos teoremas os resultados sejam consideravelmente estáveis, as suas demonstrações não o são. Segundo Tasic', para Poincaré, os axiomas não asseguram a imutabilidade das ideias matemáticas, pelo que «os teoremas são (...) sempre reafirmados, reinventados, reinaugurados pelos matemáticos e pelas futuras gerações de matemáticos» (p. 148).

O raciocínio plausível também é matemático?

É verdade que na fase concludente do processo investigativo, o raciocínio dedutivo tem um papel predominante, quase exclusivo. Porém, na fase propriamente exploratória da investigação, em que há muitas interrogações e indefinições, o raciocínio matemático é eminentemente conjectural pelo que, as conclusões que produz, em geral têm uma validade plausível e não necessária. Nesta fase podemos distinguir vários tipos de raciocínio que produzem conclusões com diversos graus de plausibilidade: indutivo, abdutivo e transformativo (ou imagético) (figura 2). Através do raciocínio indutivo produzem-se conclusões gerais a partir da análise de alguns casos particulares (Pólya, 1990a); pelo raciocínio abdutivo, constroem-se hipóteses explicativas que dão sentido a um conjunto de dados (Ho, 1994); o raciocínio transformativo está associado à construção e *leitura* de imagens (esquemas) mentais (Simon, 1996). Estes tipos de raciocínio co-existem com a dedução e muito dificilmente se conseguem separar.

No segundo volume da sua obra clássica *Mathematics and plausible reasoning*, publicada inicialmente em 1954, Pólya (1990b) propõe-se organizar o raciocínio que produz conclusões plausíveis segundo padrões de inferência que fazem lembrar os silogismos. Eis dois exemplos referidos por Pólya:

$$\frac{\begin{array}{c} A \text{ é análogo a } B \\ B \text{ é verdadeiro} \end{array}}{A \text{ é mais plausível}} \qquad \frac{\begin{array}{c} A \text{ é implicado por } B \\ B \text{ é falso} \end{array}}{A \text{ é menos plausível}}$$

Pólya (1990a) também releva a importância de raciocinar por analogia na produção de conclusões plausíveis: «A analogia parece ter a sua parte em todas as descobertas, mas em algumas tem a parte de leão» (p. 17).

Um exemplo de uma propriedade matemática sustentada por esta mistura de tipos de raciocínio é apresentado por Hillary Putnam (1986, p. 56): «existem infinitos números primos gémeos»[2]. Os matemáticos têm uma forte convicção de que esta propriedade é verdadeira, apesar de nunca ter sido demonstrada. Resumidamente, o argumento que é convincente para os matemáticos é o seguinte: parece plausível (e está de acordo com *dados* empíricos) admitir que os acontecimentos «p é primo» e «$p+2$ é primo» são independentes em termos estatísticos. Ora, a frequência de primos menores que p é, aproximadamente, $1/\log p$. Então, a frequência de primos gémeos menores que p é, assimptoticamente, $1/(\log p)^2$, o que implica a infinidade do número de primos gémeos.

A argumentação é de tipo abdutivo, uma vez que se dá uma explicação plausível, e por isso, convincente e credível, de um fenómeno observado experimentalmente (que existe uma infinidade de primos gémeos). Contudo, o argumento envolve, igualmente, a confirmação indutiva de uma asserção estatística (a independência dos *acontecimentos*) e, com base nessa *verdade assimptótica*, a dedução da propriedade. Putnam considera que esta dedução é «estável a menos de pequenas perturbações das suposições» (...) [e que] «há poucos matemáticos que não estejam convencidos por este argumento, apesar de não ser uma demonstração» (p. 56).

No decurso da história, têm sido dadas justificações de natureza quase-empírica que, não sendo formais, são, no entanto, inegavelmente plausíveis. Essa plausibilidade é, muitas vezes, satisfatória para a comunidade matemática. As discussões em torno da formalização de princípios que desempenham o papel de axiomas, ou da escolha do elenco dos axiomas numa determinada axiomática envolve, geralmente, argumentação de tipo quase-empírico. Um exemplo historicamente interessante é o do Axioma da Escolha [AE], na teoria de conjuntos. Este axioma foi usado, pela primeira vez, por Zermelo num artigo de 1904. Peano veio a terreiro criticar a inclusão do AE na demonstração de certos teoremas. Zermelo, num artigo de 1908, argumenta em defesa do AE:

> Em primeiro lugar, como é que Peano chega aos seus princípios fundamentais e como é que ele justifica a sua inclusão no *Formulaire*[3], uma vez que, apesar de tudo, também não pode demonstrá-los? Evidentemente, foi pela análise dos modos de inferência que no decurso da história vieram a ser reconhecidos como válidos, chamando a atenção para o facto de os princípios serem intuitivamente evidentes e necessários para a ciência — considerações que podem ser alegadas igualmente bem a favor do princípio em disputa. (Zermelo, citado em Putnam, 1986, p. 54)

O argumento da necessidade do AE não é irrelevante. De facto, numerosos teoremas, em diversas áreas da matemática, haviam sido demonstrados recorrendo a este axioma. Não o usar significaria prescindir desses resultados. Evidentemente, o que estava em causa era o facto do AE ser um princípio demasiado *forte*[4] e, portanto, deveria ser demonstrado, não utilizado na estruturação da teoria de conjuntos. Embora Zermelo reconhecesse que a adopção do AE era subjectiva, em virtude dos resultados que tinha permitido obter, isso era plausível. De resto, os matemáticos aceitam como plausíveis determinados princípios e ideias desde que sejam matematicamente produtivos.

As ferramentas tecnológicas tornam o raciocínio matemático mais poderoso?

A utilização de tecnologia permite apoiar o raciocínio matemático em todas as suas vertentes (abdutiva, indutiva e dedutiva). De facto, a investigação tradicional em matemática tem sido alargada pelas imensas possibilidades de representação gráfica e de cálculo do computador:

> A computação e os gráficos computacionais abriram novas fronteiras tanto à teoria como às aplicações que não poderiam ter sido exploradas pelas gerações anteriores de matemáticos. Esta fronteira revelou *insights* matemáticos surpreendentes. (...) para se alcançarem estes *insights* foram necessários métodos matemáticos inovadores não exclusivamente ligados à inferência formal. (Steen , 1999, p. 270–271)

Claro que os matemáticos sempre analisaram casos particulares, testaram conjecturas, generalizaram determinadas relações matemáticas, etc. Mas, o advento do computador torna esta dinâmica experimental mais atractiva e potente. O matemático tem assim a possibilidade de

> examinar na máquina uma colecção de casos particulares que é demasiadamente grande para os humanos lidarem por meios convencionais. O computador encoraja-nos a praticar sem vergonha e em plena luz do dia, certos hábitos a que nos entregamos apenas na privacidade dos nossos gabinetes, os quais nunca admitimos aos nossos alunos: a experimentação. A matemática é uma ciência experimental num grau que nunca aparece nos cursos que ministramos (...). O computador tem-se tornado o principal veículo do lado experimental da matemática. (Pollak, citado em Villiers, 1999, p. 21)

Ao permitirem explorar e resolver novas classes de problemas, os sistemas computacionais têm influenciado o desenvolvimento de várias áreas da matemática de que são exemplos a *Superfície de Costa*, bem como alguns resultados em Álgebra Linear e Equações Diferenciais Parciais (Lima, 2001). Além disso, têm proporcionado a criação de novas áreas matemáticas como a Complexidade Computacional (idem).

Tudo isto tem implicações epistemológicas. Uma vez que através de experiências computacionais, o matemático pode corroborar a plausibilidade de certas relações matemáticas assim como *excluir* a possibilidade de se verificarem relações matemáticas que havia considerado plausíveis, o computador permite introduzir uma nova dimensão epistemológica que pode designar-se como credibilidade experimental. A credibilidade do conhecimento matemático, tradicionalmente, obtém-se pela dedução formal. No entanto, como o computador possibilita a verificação de resultados para uma enormidade de casos particulares e singulares, aqueles podem considerar-se credíveis de um ponto de vista experimental. Bailey e Borwein (2001) perguntam mesmo o que é mais significativo,

> uma demonstração formal que na sua exposição completa requer centenas de difíceis páginas de argumentação, completamente compreendidas apenas por dois ou três colegas, ou a verificação numérica de uma conjectura com uma precisão de 100000 casas decimais, subsequentemente validada por numerosos cálculos subsidiários? (p. 53)

No seio da comunidade matemática internacional, não há consenso quanto ao papel do computador na investigação profissional. Existem matemáticos para quem os sistemas informáticos acrescentam novos níveis de complexidade à complexidade matemática propriamente dita. Sentem-se desconfortáveis pelo facto de não controlarem totalmente os *raciocínios* subjacentes aos processos computacionais. Por isso, vêem-nos como recursos auxiliares que podem estimular a imaginação criadora mas de modo algum como necessários para o desenvolvimento dos seus programas de investigação. Em contraste, a investigação assente em sistemas

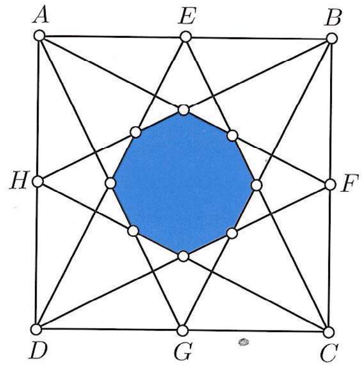

Figura 3.

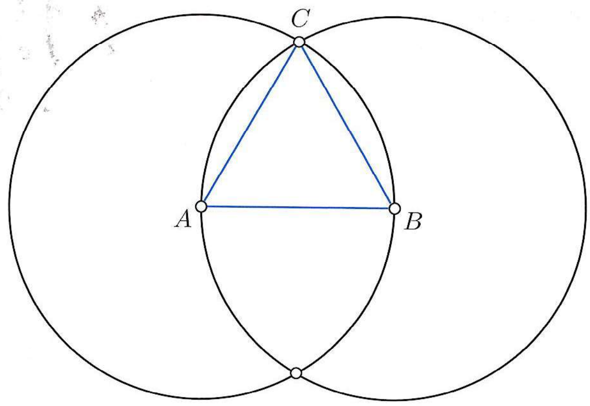

Figura 4.

computacionais é vista por alguns matemáticos como um sucedâneo legítimo da investigação matemática tradicional. Os mais optimistas defendem mesmo que toda a dinâmica investigativa, desde as primeiras intuições até à demonstração, pode e deve assentar em sistemas computacionais. Bailey e Borwein (2001) prevêem até que «daqui por dez anos, uma nova geração de matemáticos informaticamente versados, armados com *software* significativamente melhorado em sistemas computacionais prodigiosamente poderosos, forçosamente farão descobertas em matemática com que actualmente apenas sonhamos» (p. 63).

Esta prospectiva geração de matemáticos pressupõe a alfabetização informática das novas gerações, resultante da banalização do uso de tecnologias, nomeadamente computacionais, de *software's* variados, incluindo os matemáticos, e em contextos variados, incluindo o escolar. Tudo isto «forçosamente terá um profundo impacto em como se irá ensinar, aprender e fazer matemática no futuro» (Bailey e Borwein, 2001, p. 63). Sendo assim, as dinâmicas investigativas na aula de matemática, em ambientes computacionais, são uma mais-valia imprescindível para a formação dessa nova geração de matemáticos.

Como sabemos se um raciocínio matemático é válido?

O raciocínio dedutivo produz conclusões que são necessariamente válidas, desde que, naturalmente, a cadeia de deduções $A \Rightarrow B \Rightarrow \ldots \Rightarrow Z$ esteja isenta de erros. Ora, diversos tipos de erros lógicos podem pôr em causa a validade de uma dedução. Dentre os erros mais conhecidos[5] podemos salientar:

i) assumir uma hipótese errada por má interpretação de um esquema;
ii) tirar conclusões que não derivam da hipótese (irrelevância ou raciocínio *non-sequitur*);
iii) tirar conclusões gerais a partir de casos particulares (erro de generalização);
iv) assumir uma hipótese não explicitada (hipótese escondida);
v) assumir implicitamente o que se pretende provar (raciocínio circular).

Vejamos alguns exemplos destes erros. Considere-se o quadrado $[ABCD]$ da figura 3 e os pontos médios dos seus lados (E, F, G e H). Construam-se os segmentos de recta que unem cada um destes pontos aos vértices opostos do quadrado. Nestas condições, qual é a área do octógono sombreado? As várias simetrias da figura sugerem que o octógono é regular. Peggy House (1999) refere que mesmo professores de Geometria fazem, erradamente, esta suposição! Quer dizer, foi assumida uma hipótese adicional, errada, associada a um esquema sugestivo, que torna a conclusão (o valor obtido para a área) inválida.

Consideremos agora a seguinte proposição: «Se um polígono é um pentágono então a soma dos seus ângulos externos é 360°». A conclusão é verdadeira mas a hipótese do polígono ter cinco lados é irrelevante. Erro de raciocínio *non-sequitur*.

A expressão $n^2 - 79n + 1601$ gera números primos para $n \in \{0, 1, \ldots, 79\}$. Contudo, afirmar que $n^2 - 79n + 1601$ é primo qualquer que seja n natural é um erro de generalização.

Ao dar uma organização axiomática à geometria elementar conhecida no seu tempo, Euclides pretendia garantir que a sua obra-prima *Elementos* fosse isenta de erros lógicos. Teve o cuidado de explicitar os seus pressupostos (postulados e noções comuns) e de deduzir teoremas a partir desses pressupostos e de teoremas previamente demonstrados, usando correctamente as regras da lógica. Contudo, logo na primeira proposição do primeiro livro, Euclides assume uma hipótese adicional *ad hoc* que não consta dos pressupostos que havia enunciado!! Nessa primeira proposição, Euclides propõe-se construir um triângulo equilátero sendo dado um segmento $[AB]$. Na sua construção (ver figura 4), Euclides admite tacitamente que duas circunferências se intersectam (hipótese escondida) embora nenhum dos seus pressupostos garanta isso. Este erro ocorreu inúmeras vezes no decurso da história.

Tampouco actualmente é possível garantir que os raciocínios matemáticos, mesmo dos matemáticos profissionais, estão isentos de erros. Nathanson (2008) confessa: «Quando leio um artigo numa revista científica frequentemente encontro erros. É irrelevante se consigo corrigi-los ou não. A literatura [matemática] é falível.» Por outro lado, acrescenta:

> Muitos teoremas importantes, mesmo notáveis, não têm, verdadeiramente, demonstrações. Têm esboços de demonstrações, linhas gerais de argumentação, sugestões e intuições que foram óbvias para o autor (pelo menos, na altura em que escreveu) e espera-se que uma parte da comunidade matemática as compreenda e acredite nelas.

A imensa produção de conhecimento matemático, sobretudo a partir de meados do século XX, também coloca problemas práticos quanto à sua verificabilidade. Segundo Bourguignon (2001), no fim do século XX foram produzidos cerca de 60000 artigos científicos em matemática por ano! Carleson (2001), ex-director de uma revista científica numa área da matemática, comentando as limitações do processo de revisão [*refereeing*], afirma:

> Qualquer pessoa que tenha estado nesta função [direcção de uma revista científica] sabe que isto [o processo de revisão] não fornece nenhuma garantia de que tudo esteja correcto. É completamente impossível encontrar revisores [*referees*] de alta qualidade que queiram verificar em detalhe todos estes artigos que são publicados. A revisão supostamente é como um selo de que o artigo está correcto mas eu penso que isso é muito ilusório. (p. 458)

Os matemáticos continuam a fazer um esforço de axiomatização das teorias matemáticas *maduras*, de modo a que estas possam ser deduzidas, pelo menos em princípio, de uma teoria estruturante que constitui uma espécie de alicerce robusto das restantes teorias. Frequentemente, a formalização da teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel [ZF] cumpre esse papel. A verdade é que, na prática, os matemáticos ficam satisfeitos com a mera possibilidade de uma teoria ser formalmente dedutível, por exemplo, de ZF. Essa possibilidade tácita decorre do facto de haver conceitos que estabelecem interfaces entre ZF e a teoria a formalizar. No entanto, Hersh (1986), recusa a possibilidade dessas deduções formais se concretizarem:

> Como é que sabemos que o nosso último teorema acerca da difusão em variedades é formalmente dedutível da teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel? Nunca se escreveu tal dedução formal. Se o fosse, e se fosse verificada por um leitor humano, a possibilidade de erro seria maior do que na verificação de uma demonstração ordinária (não formalizada). (p. 18)

Conclui-se, assim, que, em última instância, é alguma autoridade no seio da comunidade matemática que tem a palavra final sobre a veracidade dos resultados produzidos. Como defende Nathanson (2008), «até em matemática a verdade pode ser política».

Que consequências para a educação matemática?

O raciocínio matemático envolve processos mentais complexos em que intervêm elementos, fortemente imbricados, de natureza lógica, matemática, epistemológica, biológica, psicológica e até emocional. Sendo assim, é possível ensinar os alunos a raciocinar matematicamente? Que tipo de tarefas promovem o raciocínio matemático? Que modos de trabalho estimulam mais o raciocínio matemático? A tecnologia (computador e calculadora) substitui o raciocínio dos alunos ou torna-o mais robusto?

Na verdade, em face desta imensa complexidade, não sabemos exactamente como é que o raciocínio matemático se desenvolve. O que se sabe da investigação é que o envolvimento dos alunos em discussões — nas quais elaboram e defendem argumentação matemática e analisam a argumentação matemática dos colegas e do professor — e projectos, bem como a interacção em grupos de trabalho, cria condições favoráveis à emergência do raciocínio matemático nas suas diversas formas, ao passo que a memorização sem compreensão, a resolução de exercícios rotineiros e a realização de tarefas padronizadas o inibem (Steen, 1999). Assim sendo, um ensino da matemática que estimule o raciocínio matemático também tem que incluir alguns processos metacognitivos como identificar a natureza de um problema, formular uma estratégia para o resolver, representá-lo, usar recursos adequados na sua resolução e monitorizar a solução encontrada (Sternberg, 1999).

A utilização adequada de tecnologia associada ao trabalho de grupo e de projecto, e a discussões motivadas por tarefas matematicamente ricas (problemas e investigações), em vez de substituir o raciocínio matemático torna-o mais potente. A tecnologia permite ao aluno suportar melhor o raciocínio conjectural e muitas vezes dá pistas para apoiar o raciocínio dedutivo. Em todo o caso, seja ou não usada tecnologia como suporte do raciocínio matemático, é importante não precipitar o fim do período experimental na resolução de uma tarefa no afã de chegar rapidamente à dedução.

Finalmente, a alta motivação e perseverança dos matemáticos não é comum nos alunos. A frustração e o desapontamento em razão dos falhanços podem ter um efeito devastador na sua auto-estima, inibindo a sua capacidade de raciocinar matematicamente ou o seu desejo de o fazer. Por isso, um ambiente de sala de aula em que se experimenta e se erra, e se volta a tentar, no fundo, um ambiente em que se replica o trabalho habitual do matemático, sem punições psicológicas, é um grande estímulo para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Nota

1 Este é um conceito de demonstração bastante redutor. Assumimo-lo apenas para simplificar o discurso.

2 Isto é, infinitos pares de números inteiros ímpares consecutivos, p, $p+2$, ambos primos.

3 Obra famosa de Peano.

4 De certo modo semelhante ao postulado das paralelas de Euclides.

5 Pirie (2006) faz um tratamento detalhado dos erros lógicos a um nível bastante acessível. Alguns desses erros de raciocínio são directamente transponíveis para o raciocínio matemático.

Referências

Bailey, D. e Borwein, J. (2001). Experimental mathematics: Recent developments and future outlook. In B. Engquist e W. Schmid (Eds.), *Mathematics unlimited — 2001 and beyond* (pp. 51–66). Berlim, Heidelberg: Springer-Verlag.

Bourguignon, J.-P. (2001). A basis for a new relationship between mathematics and society. In B. Engquist e W. Schmid (Eds.), *Mathematics unlimited — 2001 and beyond* (pp. 171–188). Berlim, Heidelberg: Springer-Verlag.

Ernest, P. (1994). The dialogical nature of mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics, education and philosophy: an international perspective* (pp. 33–48). London: The Falmer Press.

Hersh, R. (1986). Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 9–28). Boston: Birkhäuser.

Ho, Y. (1994). *Deduction? Abduction? Induction? Is there a logic of exploratory data analysis?* (Disponível no endereço `http://seamonkey.ed.asu.edu/~behren/asu/reports/Peirce/Logic_of_EDA.htm`)

House, P. (1999). Mathematical reasoning in the eye of the beholder. In Leo Stiff (Ed.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 175–187). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Lima, L. (2001). Diálogo em Janeiro com Elon Lages Lima. *Gazeta de Matemática, 140*, 5–16.

Nathanson, M. (2008). *Desperately seeking mathematical truth*. Disponível em `www.arxiv.org`.

Pirie, M (2006). *How to win every argument. The use and abuse of logic*. London: Continuum International Publishing Group.

Poincaré, H. (1909). *Science et méthode*. Paris: Flammarion.

Poincaré, H. (1905/1995). *O valor da ciência*. Rio de Janeiro: Contraponto.

Pólya, G. (1990a). *Mathematics and plausible reasoning. Induction and analogy in mathematics*. Vol. 1. Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1990b). *Mathematics and plausible reasoning. Patterns of plausible inference*. Vol. 2. Princeton: Princeton University Press.

Putnam, H. (1986). What is mathematical truth? In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 49–65). Boston: Birkhäuser.

Simon, M. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: The search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 197–210.

Steen, L. (1999). Twenty questions about mathematical reasoning. In Leo Stiff (Ed.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 270–285). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Sternberg, R. (1999). The nature of mathematical reasoning. In Leo Stiff (Ed.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 37–44). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Tasic', V. (2001). *Mathematics and the roots of postmodern thought*. New York: Oxford University Press.

Villiers, M. de (1999). *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Paulo Oliveira
E. S. José Saramago

Raciocinar em ...

Durante muitos séculos prevaleceu a ideia de que, devido à natureza da Matemática, o estudo desta disciplina, em si mesmo, melhoraria, em geral, a capacidade de raciocinar. E assim, a associação entre matemática e raciocínio é algo a que estamos habituados. No entanto, o raciocínio é uma actividade da razão, ou seja prende-se com uma faculdade humana que permite conhecer, julgar e agir de acordo com determinados princípios.

Que pontos de contacto haverá entre raciocinar em Matemática e raciocinar noutras áreas? E que diferenças? Estas questões levaram-nos a considerar que seria interessante perceber como é que profissionais exteriores aos campos da Matemática e da Educação Matemática mobilizam o raciocínio nas suas actividades. Foi o que procurámos saber, propondo a pessoas de diferentes áreas que elaborassem um curto depoimento cujo mote foi Racionar em...

Agradecemos a todos a forma como gentilmente acederam ao nosso pedido, contribuindo, assim, para o nº 100 da Educação e Matemática.