A excentricidade da parábola

Vincenzo Bongiovanni

A noção de excentricidade de uma elipse e hipérbole está relacionada ao maior ou menor alongamento dessas curvas. No caso da parábola, a maior ou menor abertura não tem nada a ver com a excentricidade mas com o *latus rectum* que é um segmento cuja medida é expressa na equação $y^2 = px$ pela constante p. Nos livros didáticos, em geral, omite-se o fato da excentricidade da parábola ser 1. Apresenta-se apenas a excentricidade da elipse como um número entre 0 e 1 e a excentricidade da hipérbole como um número maior que 1. Deixa-se intuir que a excentricidade da parábola é 1 por ser uma curva limite entre a elipse e a hipérbole.

O objectivo deste artigo é relacionar as excentricidades das três curvas por meio de uma única fórmula.

O ensino das cónicas no Brasil ocorre na última série do Ensino Médio dentro do conteúdo da geometria analítica. Em geral, as cónicas são apresentadas como três curvas distintas: a elipse como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante; a hipérbole como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias (em módulo) a dois pontos fixos é constante e a parábola como o lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes de uma reta e de um ponto fora dela. A partir dessas definições toda a nomenclatura relacionada a essas curvas é estabelecida e as definições de excentricidade para a elipse e a hipérbole são apresentadas da seguinte maneira:

Figura 1

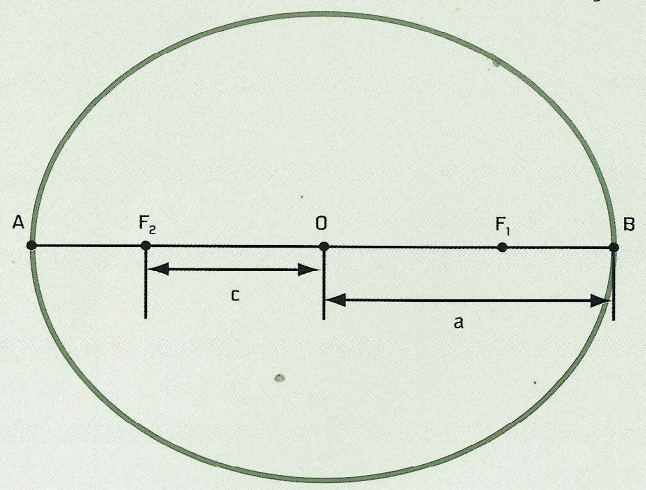
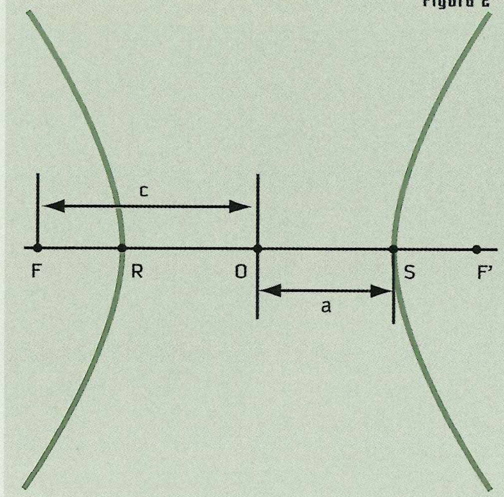


Figura 2



A *excentricidade de uma elipse* de centro O, eixo maior AB e focos F_1 e F_2 é o número onde $c/a = OF_2 = OF_1$ e $a = OB = OA$ (figura 1).

A *excentricidade de uma hipérbole* de centro O, eixo focal RS e focos F e F' é o número c/a onde $c = OF = OF'$ e $a = OR = OS$ (figura 2).

A seguir são estabelecidas as equações dessas curvas a partir das definições de cónicas como lugares geométricos e o estudo prossegue unicamente no quadro analítico. Essa abordagem, embora económica e moderna, esconde completamente a origem geométrica das cónicas.

Uma outra caracterização das cónicas que permite obter a excentricidade das três curvas é a chamada definição monofocal. Nesse enfoque, a cónica é definida como o lugar geométrico dos pontos P de um plano tal que o quociente das distâncias de P, a um ponto fixo F e a uma reta fixa d, com $P \notin d$, é uma constante. Adotando esse ponto de vista, define-se a excentricidade da elipse, da hipérbole e da parábola como sendo essa constante que será denotada por e. Observa-se que se $0<e<1$ teremos uma elipse, se $e=1$ teremos uma parábola e se $e>1$ teremos uma hipérbole (figura 3).

No primeiro e no terceiro caso pode-se provar que quando $PF/PP' = e$ (constante) então $e=c/a$. mas o problema de relacionar a excentricidade da parábola com a fórmula da excentricidade proveniente das outras duas curvas permanece.

Um ponto de vista bastante interessante e pouco utilizado no Ensino Médio é voltar à origem geométrica das cónicas. Pode-se adoptar a definição de cónica como sendo a secção de um cone de revolução por um plano secante. Sendo α o ângulo formado pelos planos secante e horizontal e β o ângulo formado por uma geratriz do cone de revolução com o plano horizontal teremos: para $\alpha<\beta$ a secção do cone pelo plano é uma elipse, para $\alpha=\beta$ a secção é uma parábola e para $\alpha>\beta$ a secção é uma hipérbole (figura 4).

Essa definição apresenta a vantagem de englobar as três curvas e de associar a excentricidade a uma única expressão algébrica. Pode-se definir a excentricidade da cónica como

Figura 3

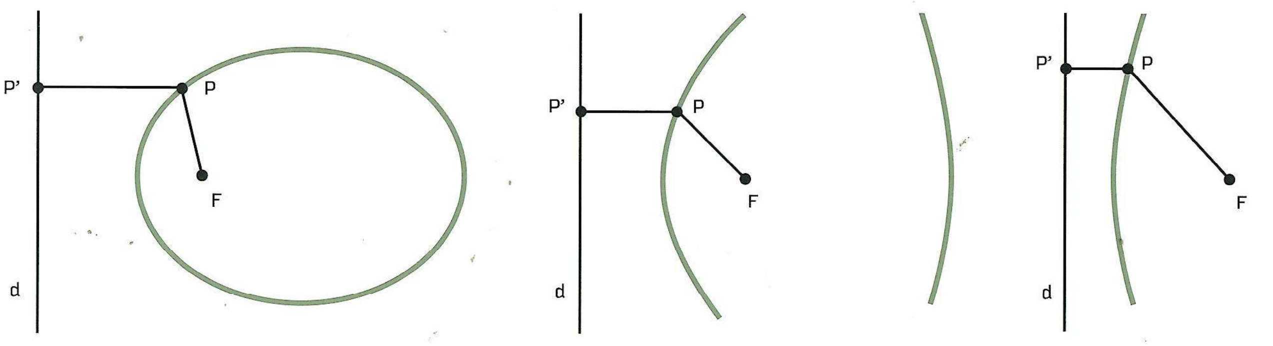
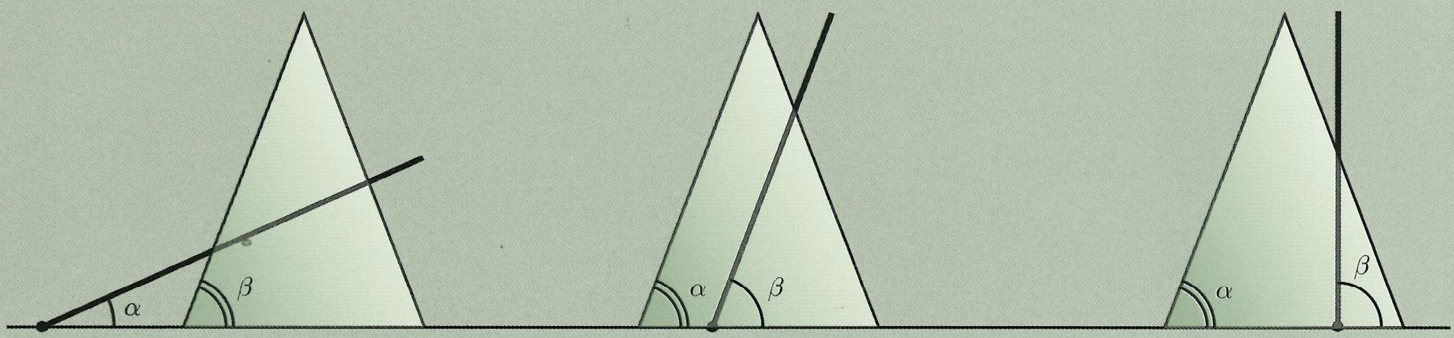


Figura 4
Projeção ortogonal de um cone de revolução contido num plano horizontal sobre um plano vertical de projeção. O cone é intersectado por um plano perpendicular ao plano de projeção e oblíquo ao plano horizontal. Na geometria descritiva esse plano é chamado de plano de topo.



sendo sen α/sen β. Para a elipse teremos,

$$0 < \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} < 1$$

pois que $0 < \alpha < \beta$, para a parábola,

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} = 1$$

pois que $\alpha{=}\beta$ e para a hipérbole

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} > 1$$

pois que $\alpha{>}\beta$. Além disso pode-se demonstrar que para a elipse e a hipérbole,

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{a}$$

recuperando-se a fórmula conhecida da excentricidade. Para $\alpha{=}0$ o plano será paralelo à base do cone e a secção será uma circunferência. Nesse caso,

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} = 0$$

o que mostra que essa definição trata o caso limite com coerência.

Bibliografia

Bongiovanni, V. *Les caractérisations des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue d'enseignants: étude d'une sequence d'activités et conception d´un hyperdocument interactif*. Thèse de doctorat, Grenoble, 2001.

Vincenzo Bongiovanni
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

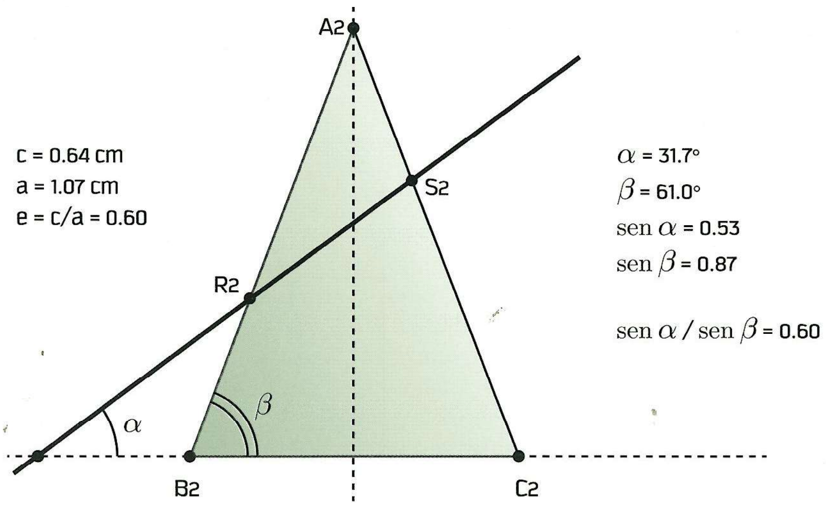


Figura 5