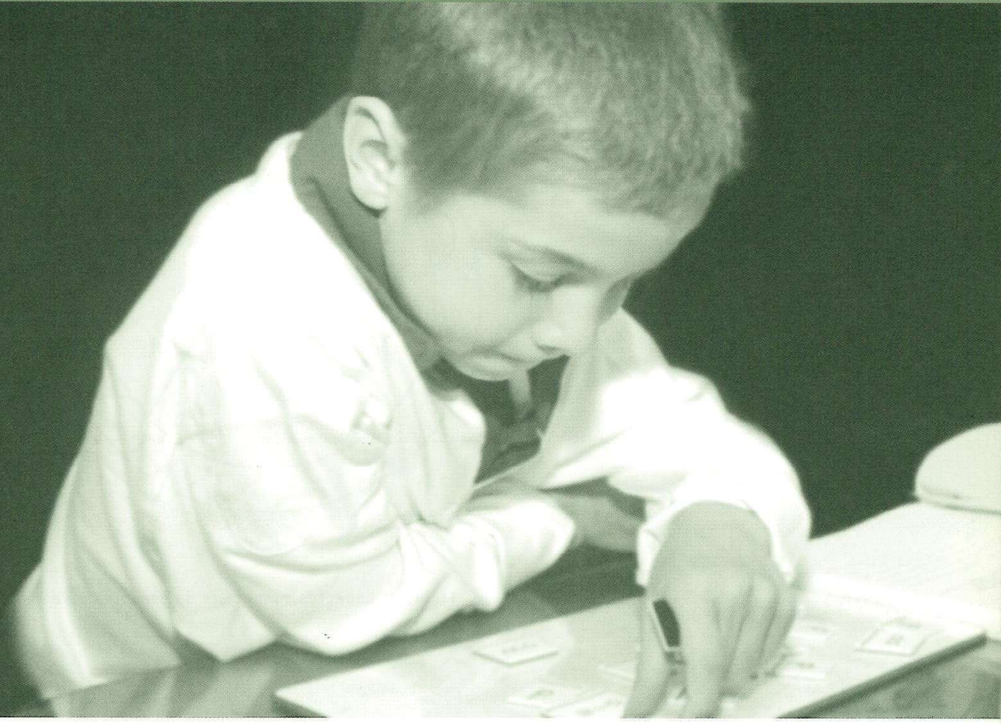

Sempre a aprender ...

Nuno Candeias

A partir do dia em que decidi ser professor empenhei-me em obter mais e melhor formação para conseguir ensinar melhor os meus alunos. Não me ocorreu que iria aprender tanto com eles. Isso tem acontecido durante os meus dez anos de ensino e, em particular, aconteceu com um conjunto de alunos que jamais poderei esquecer.

Os três episódios seguintes ocorreram durante uma investigação educacional que empreendi com uma turma de alunos do 8.° ano durante os temas referentes à geometria. Durante, praticamente, quatro meses os alunos resolveram diversas tarefas recorrendo exclusivamente a *software* de geometria dinâmica. A sala de aula passou a ser uma sala de informática equipada com 14 computadores e um projector multimédia. As tarefas, 26 no total, foram essencialmente de três tipos: exploração, investigação e resolução de problemas (Ponte, 2003). A metodologia de ensino assentou no trabalho a pares, uma vez que na sala não existia um computador para cada aluno. Aprendi com todos, mas aqui cinjo-me a um par de alunos, André e José, que tiveram um desempenho notável aquando da implementação da referida proposta curricular.

André tinha na altura 13 anos e era bastante reservado, apresentando um bom comportamento dentro da sala de aula, mas que tinha algumas dificuldades de aprendizagem a Matemática. Era um rapaz sereno, pouco interventivo e pouco participativo nas aulas. Costumava levar muito tempo a realizar os exercícios pedidos e, na maior parte das vezes, só copiava o que está no quadro. Quando existia trabalho de grupo refugiava-se nos colegas, pois tinha, ainda, algumas dificuldades em perceber português. Apesar de tudo tinha tido sucesso na escola. As suas raízes eram guineenses e estava em Portugal desde os seus 8 anos. Vivia com familiares, uma vez que os seus pais ficaram na sua terra natal. O seu olhar expressivo, o telemóvel de última geração e o boné eram a sua imagem de marca.

André tinha um grande respeito e amizade por José, com o qual começou a trabalhar em grupo durante o 2.° período do 7.° ano, na altura com algumas negativas que precisava de recuperar. Nessa época José começou a ajudá-lo nas aulas de estudo acompanhado, continuando sentado ao pé dele em várias disciplinas. Isso permitiu que André melhorasse consideravelmente o seu aproveitamento, tendo transitado paro o ano lectivo seguinte sem nenhum nível inferior a três.

José era um aluno brilhante a todas as disciplinas, excepto a Educação Física, na qual não conseguia ter melhor do que nível três, apesar de praticar vários desportos. É comum ter 100% nos testes das restantes disciplinas, ficando aborrecido consigo próprio quando isso não acontece. Nas suas intervenções na aula, sempre de alto nível, utiliza raciocínios brilhantes e um vocabulário avançado para a sua idade, que deixam quem o ouve falar pela primeira vez atónito e admirado com a sua verborreia. Como não vira a cara a um desafio, José tinha grandes expectativas quando coloquei aos alunos a hipótese de participarem num estudo, no qual iriam utilizar, durante um período de tempo considerável, um programa informático para aprender geometria.

Construção de triângulos

Nesta tarefa de *exploração* pretendia-se que os alunos aprendessem a construir triângulos isósceles e equiláteros. Depois, era-lhes pedido que relacionassem diversos tipos de triângulos classificados quanto aos lados e quanto aos ângulos. A construção de triângulos rectângulos também foi importante, uma vez que estes seriam estudados em tarefas

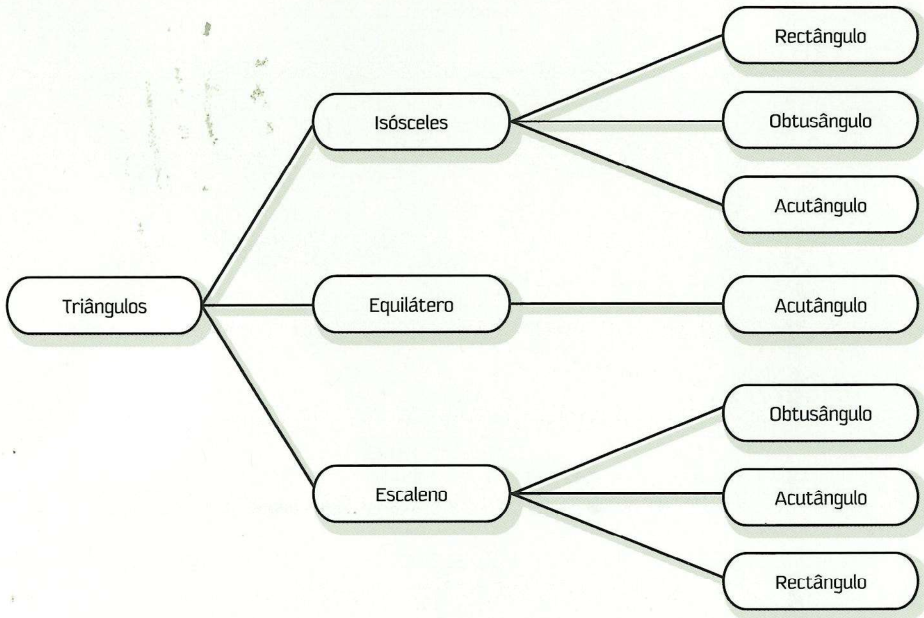

Figura 1. Aspectos essenciais do esquema apresentado por André e José na resposta à questão 4 b].

posteriores. Um dos pontos abordados durante a realização da tarefa por todos os grupos, e também na discussão final, prendeu-se com o esquema que comparava todos os triângulos anteriores:

> 4 b) *Investiga as relações que existem entre os triângulos acutângulos, obtusângulos, equiláteros, isósceles e escalenos. Faz um esquema das relações que encontraste.*

André e José não sentiram grandes dificuldades. Foi o único grupo que realizou uma investigação completa, relacionando as classificações de triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos, tendo apresentado um esquema cuja essência se reproduz na figura 1.

Este esquema foi o resultado das conclusões a que os alunos foram chegando à medida que responderam às questões da tarefa. Destas salientou-se a que os interrogava sobre a possibilidade de existir um triângulo equilátero que fosse simultaneamente um triângulo rectângulo.

Lugares geométricos

Esta tarefa de avaliação consistiu na resolução de nove problemas relacionados com lugares geométricos. Para os resolver, os alunos tiveram que construir e relacionar entre si circunferências, coroas circulares, mediatrizes, triângulos e rectângulos. O enunciado do problema 3 era o seguinte:

> *Num jogo de basquetebol a bola está a 4 metros do Manuel e a 5 metros da Sara. Onde está a bola?*

André e José apresentaram uma solução (figura 2) que partia da posição da bola para indicar as posições possíveis de Manuel e Sara, ou seja, inverteram o problema simplificando-o.

Se tivessem marcado primeiro a posição dos alunos da questão, a resposta ao problema (a posição da bola) dependeria da distância a que eles estavam um do outro. No comentário que elaborei sobre a sua resolução, propus-lhes que tentassem resolver o problema novamente, mas começando por colocar as posições das personagens da questão, desenhando as circunferências com os raios da questão e, posteriormente, investigando as várias hipóteses de resposta que existiriam. Os alunos aceitaram o desafio e tentaram encontrar todas as soluções possíveis para o problema. Construíram duas circunferências: uma centrada em Manuel, de raio 5, e outra centrada em Sara, de raio 4. Depois, movimentaram uma delas para verificar se existia solução e sintetizaram, da seguinte forma, as várias respostas possíveis:

(i) se eles estiverem a mais de 9 m, não existe solução para o problema (as circunferências não se intersectam); (ii) se eles estiverem a menos de 9 m e a mais de 1 m, a bola pode estar em dois locais diferentes (pontos de intersecção das duas circunferências); (iii) se eles estiverem exactamente a 1m, só existe lugar possível para a bola (as circunferências são tangentes); e (iv) se eles estiverem a menos de 1 m, volta a não existir solução (as circunferências não se intersectam).

Pavimentações com translações

Quando realizaram esta tarefa de investigação, os alunos já tinham resolvido duas tarefas relacionadas com translações e vectores. Nesta pretendia que estudassem as pavimentações utilizando essa transformação geométrica. A última questão foi a que suscitou mais interesse, pois conduzia os alunos a uma pequena investigação sobre as figuras que permitem pavimentar:

Ex. de Manuel Bola = 4,00 cm
Bola Ex. Sara = 5,00 cm

3 O Manuel pode estar num raio de 4cm enquanto a Sara se situa num raio de 5cm da bola.

Processo de resolução
Marcámos um ponto – a Bola – e depois com o menu Transform construímos dois pontos,
uma a 4cm do ponto "bola" e outro a 5 cm.
No fim traçámos duas circunferências, cada uma a passar nos pontos contruídos anteriormente,
a 4cm e 5cm.

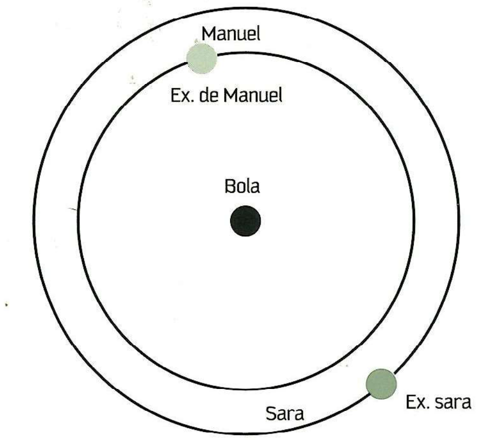

Figura 2. Solução inicial apresentada pelos alunos.

> *E se partíssemos inicialmente de outros quadriláteros [o rectângulo tinha sido estudado nas questões anteriores] também conseguiríamos pavimentar? E com triângulos? Regista as tuas descobertas.*

André e José elaboraram conjecturas interessantes, tendo inclusive alargado a sua investigação a outros polígonos: pentágonos e hexágonos. Depois das experiências e descobertas que fizeram, culminaram a sua investigação tentando encontrar uma relação entre o número de eixos de simetria de um polígono e a possibilidade de ele pavimentar ou não. Nessa altura travou-se o seguinte diálogo:

Professor — Então já conseguiram responder à última questão?

José — Já! Percebemos que os quadrados e os rectângulos permitem pavimentar.

Professor — Porquê?

José — Conseguimos fazer translações deles para cobrir tudo.

Professor — E já experimentaram com triângulos?

José — Dava com os equiláteros, mas tínhamos que rodar alguns, logo não eram translações.

Professor — Correcto! E com losangos e papagaios, dá?

José — Com losangos dá, mas com papagaios não dá. Eu acho que tem a ver com os eixos de simetria.

Professor — Porquê?

José — O quadrado tem 4, o rectângulo tem 2, o losango também tem 2 e o papagaio tem só 1.

Professor — E com o paralelogramo?

José — Dá e tem 0 eixos de simetria.

Professor — Então que conjectura é que escreverias?

José — Acho que quando o número de eixos de simetria é par dá para pavimentar com translações.

Professor — Essa conjectura é interessante. Teríamos de arranjar uma demonstração para ver se a conjectura é verdadeira, ou um contra exemplo para dizer que é falsa.

Alguns minutos depois José voltou a chamar-me para me dizer que o hexágono tinha 6 eixos de simetria e também pavimentava. Assim, ficou convencido da sua conjectura, uma vez que não tinha encontrado nenhum contra exemplo. Na folha de resposta da tarefa escreveram:

> Apesar de ser impossível com triângulos pavimentar, usando apenas o *Translate* [translação do *software* de geometria dinâmica]. Já com quadriláteros, apenas o rectângulo, quadrado e losango permitem pavimentar, pois têm eixos de simetria pares. Indo mais além, todas as figuras com eixos de simetria pares permitem pavimentar o *sketch*.

À noite, com o auxílio do *Sketchpad*, construiu um octógono regular e percebi de imediato que com este polígono era impossível pavimentar. No início da aula seguinte sentei-me ao computador com os alunos e revimos o *sketch* que tinham construído anteriormente. De seguida construímos um octógono regular e os alunos tentaram pavimentar com este polígono utilizando translações. Ficaram admirados ao verificarem que não era possível pavimentar o plano, apesar do octógono ter um número par de eixos de simetria. Nessa altura conversámos sobre os ângulos internos desse polígono e o facto de a sua amplitude, 135°, não ser divisor de 360° e, como tal, não permitir pavimentar. Depois os alunos começaram a resolver outra actividade, mas ficou evidente para mim as conexões que este assunto teria com a geometria que se ensina no 9.° ano: rotações e os ângulos internos de polígonos.

Reflexões finais

Estes três episódios de aprendizagem referem-se ao desempenho de André e José e ao papel que o professor teve, de algum modo, nessa aprendizagem. Mas também apresentam situações em que os alunos influenciaram a aprendizagem do professor.

No primeiro caso relacionado com o desenrolar da tarefa 3, a possibilidade de os alunos sistematizarem as suas ideias leva-os a construir um esquema que explica e organiza localmente os vários tipos de triângulos e as relações entre eles. Essa organização leva-os a perceber as relações que existem entre lados e ângulos dos diferentes tipos de triângulos e a entender que só um deles, o equilátero que só pode ser acutângulo, tem características que o elevam a uma categoria diferente. É um triângulo muito especial e com um papel de relevo no estudo da geometria plana. Eu aprendi como uma questão bem colocada, pode levar os alunos a desenvolverem esta capacidade de sistematização, tão mal tratada no nosso ensino. A apresentação já sistematizada de factos e características de determinada teoria pode ser substituída por um conjunto de sugestões e explorações que podem ajudar os alunos a apreendê-la de uma forma mais consistente. O questionamento, neste caso escrito, mas também o oral são decisivos para fomentar a compreensão dos alunos (Long, 1992; Menezes, 199).

O segundo momento de aprendizagem referido neste artigo leva-nos para a importância de ao encontrar uma solução de um problema que acreditamos estar correcta ser necessário verificar se esta responde totalmente ao problema. Mas para que isso aconteça é necessário dar tempo e permitir que os alunos comecem a resolver o problema, o que leva ao início da sua compreensão. Apesar de André e José terem tido mais dificuldades na resolução de problemas geométricos é de salientar que apesar deste problema fazer parte de uma tarefa de avaliação que já tinha um comentário avaliativo os alunos voltaram a tentar partindo dessas indicações. Aprendi com eles a tentar e se não se conseguir resolver de imediato tentar outra vez. Eles foram persistentes, como professor também o tenho de ser. Eles gostavam de um bom desafio!

O último momento de aprendizagem permite elucidar um tipo de situação em que o professor não consegue explicar ou justificar uma afirmação no momento. Mas a possibilidade de reflectir mais pausadamente levou ao surgimento do contra exemplo e até a uma possível estratégia para iniciar o estudo de um novo tema. Em situações mais problemáticas mais abertas é possível que surjam conjecturas cuja aceitação ou negação não seja imediata, mas isso possibilita também a aprendizagem por parte do professor, mesmo em temas que se julga dominar totalmente. Não deixar os alunos com ideias matemáticas erradas sempre foi uma das minhas principais preocupações quando ensino. Por vezes a dificuldade reside em encontrar a melhor maneira de explicar, justificar ou negar rapidamente o que é dito na sala de aula. No entanto, penso ser preferível não deixar os alunos a pensar algo que esteja errado. Neste caso a discussão cingiu-se ao professor e ao grupo de dois alunos. Porém podia ter ocorrido com afirmações feitas pelos alunos perante toda a turma e nesse caso torna-se necessário discutir e, por vezes, voltar a discutir mais tarde com todos a veracidade ou refutação de conjecturas. Aqui as discussões em grande grupo desempenham uma papel fundamental neste aspecto da aprendizagem, em particular dos conceitos geométricos (Gardiner e Hudson, 1998).

Por fim, gostaria de referir o papel que os ambientes de geometria desempenharam tanto na aprendizagem dos alunos, como na minha própria. Não me revejo no cepticismo apresentado por uma professora que participou no estudo de Hannafin, Burruss e Little (2001), que pensava que este tipo de *software* não era significativo na aprendizagem geométrica dos alunos e considerava que os alunos não tinham aprendido de forma aprofundada os temas estudados. Os meus alunos aprenderam, conseguiram fazer construções geométricas, investigações e resolveram problemas com a ajuda destas ferramentas poderosas. O que dariam os matemáticos gregos para as terem usado no seu tempo.

Acredito que a presença na sala de aula dos ambiente de geometria dinâmica só faz sentido se forem os próprios alunos a utilizá-lo, de preferência desde muito cedo. É preciso tempo para que os utilizem, mas é gratificante a sua aprendizagem. O professor tem que aprender a utilizar estas ferramentas e, também assim, pode aprender com os seus alunos. Aprender à medida que eles vão aprendendo e ver a geometria de uma forma diferente. Eles estiveram a aprender, eu estou sempre a aprender …

Referências bibliográficas

Gardiner, J., & Hudson, B. (1998): The evolution of pupils' ideas of construction and proof using hand-held dynamic geometry technology. In Olivier, A. & Newstead, K. (Eds) *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 337–344). África do Sul.

Hannafin, R., Burruss, J., & Little, C. (2001). Learning with dynamic geometry programs: Perspectives of teachers and Learners. *The Journal of Education Research*, 94(3), 132–144.

Long, E. (1992). Teachers'questionning and students' responses in classroom Mathematics. Proceedings of PME XVI (pp. III/172), Durham, USA.

Menezes, L. (1999). Matemática, Linguagem e Comunicação, APM (Eds.) Actas do ProfMat99 (pp. 71). Portimão.

Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender. *Actas do ProfMat 2003* (CD-ROM, pp. 23–39). Lisboa: APM.

Nuno Candeias

Escola E. B. 2º e 3º Ciclos Vasco Santana