



Triangulando . . . ou os devaneios de dois adolescentes

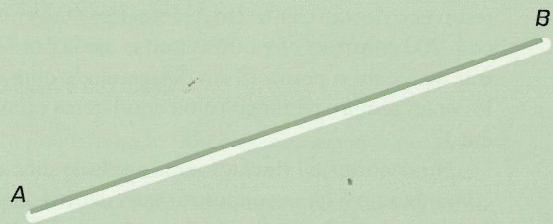
Rafael Gonçalves Sofia Rodrigues Sônia Figueirinhas

O Rafael e a Sofia, no ano lectivo 2007/2008, eram alunos da mesma turma de 9º ano, na Escola Básica de 2º e 3º Ciclos Roque Gameiro, na Amadora.

No 3º período, combinei com alguns alunos que, semanalmente, lhes proporia um “TPC” diferente do usual. A entrega desse trabalho não era obrigatória e tinham uma semana para pensar na proposta e resolvê-la. Quer o Rafael quer a Sofia entregaram sempre esses trabalhos, nos quais se envolveram com o entusiasmo e o empenho que lhes conheci durante dois anos. O artigo que aqui se publica é resultado desse primeiro enunciado, a que chamêi *Uma investigação a propósito da classificação de triângulos*. Optei por intervir pouco no texto redigido pelos alunos e na linguagem que empregaram, sobretudo por pensar que está garantida a correcção e a clareza do discurso e das conclusões.

Considera o segmento de recta AB . Encontra todos os pontos C de forma a que o triângulo ABC seja:

- | | |
|------------------|-----------------|
| A. – Rectângulo | B. – Acutângulo |
| C. – Obtusângulo | D. – Isósceles |
| E. – Escaleno | F. – Equilátero |



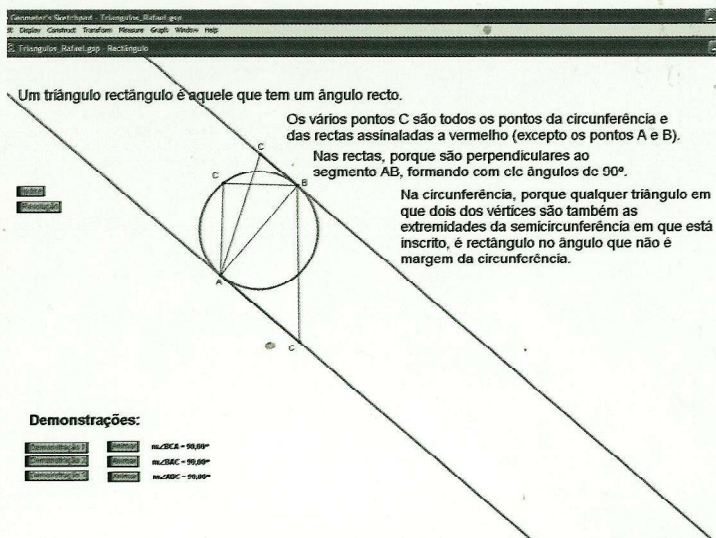


Figura 1

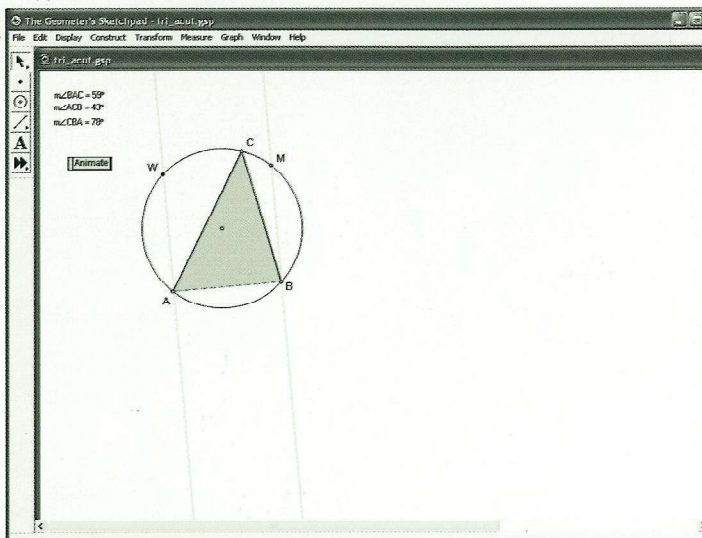


Figura 2

Assim que a professora nos entregou a proposta, pensámos: “até me parece uma actividade acessível” (Sofia) e “isto vai ser fácil” (Rafael). Pareceu apenas mais uma daquelas tarefas ‘malucas’ da nossa professora (que, às vezes, dão muito que pensar). Contudo, quando lemos aquilo mais tranquilamente, depressa nos apercebemos que “era um pouco mais trabalhoso” (Sofia), “não seria assim tão fácil, pois havia ali situações com infinitas soluções” (Rafael) e que talvez exigisse construções dinâmicas.

Nalguns casos, somente após inúmeras tentativas é que conseguimos chegar ao que se pretendia, pelo que o desafio acabou por ser bem mais complicado do que parecia inicialmente.

A existência de um programa que permite fazer construções geométricas que não são estáticas — o GSP — ajudou imenso, pois, de outra forma, não imaginamos como iríamos resolver o desafio e entregar à professora (talvez em papel — com 200 construções e outras tantas medições — para mostrar que, com o ponto C em determinado sítio, os triângulos eram sempre rectângulos ou equiláteros ou acutângulos, etc.).

No decorrer da tarefa, foram surgindo dificuldades, tais como: “como é que vou mostrar que, dentro daquelas rectas paralelas, o triângulo é sempre acutângulo?” “Dentro de que limites posso fazer deslocar o ponto C ?”

Classificação quanto aos ângulos

Na primeira alínea, a professora pedia-nos todos os pontos C de maneira a que o triângulo ABC fosse rectângulo. Em primeiro lugar, pensámos logo na matéria que tínhamos dado antes (todos os ângulos inscritos numa semicircunferência têm 90°) e fizemos uma circunferência cujo diâmetro era AB .

Depois lembrámo-nos que o triângulo podia ser rectângulo num dos outros dois vértices. Para em A haver um ângulo recto, então C tinha de estar numa posição em que o segmento AC fosse perpendicular ao segmento dado em A . Por isso, traçámos uma recta perpendicular ao segmento AB e que passava em A . O mesmo se aplicava a B . Chegámos à conclusão que todos os pontos dessas duas rectas e dessa circunferência podiam ser pontos C , e foi assim que chegámos à solução (figura 1).

Na segunda alínea, já houve divergências entre nós...

Um dos raciocínios (errados) surgidos durante a investigação da segunda alínea foi: “Para o triângulo ser acutângulo, tenho que construir uma circunferência que passe pelos pontos A e B . Depois, traço rectas perpendiculares a AB que passem pelos pontos A e B . A partir daí, verifiquei que, se o ponto C se encontrasse entre as rectas paralelas, o triângulo teria todos os ângulos agudos. Então, o vértice C pode

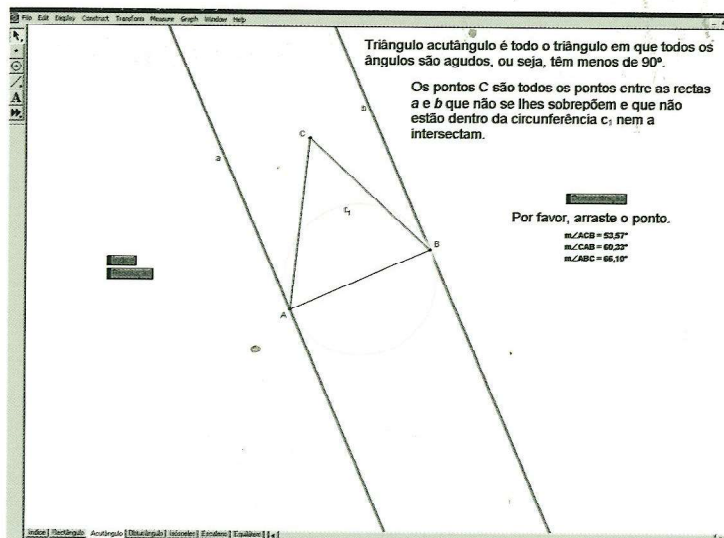


Figura 3

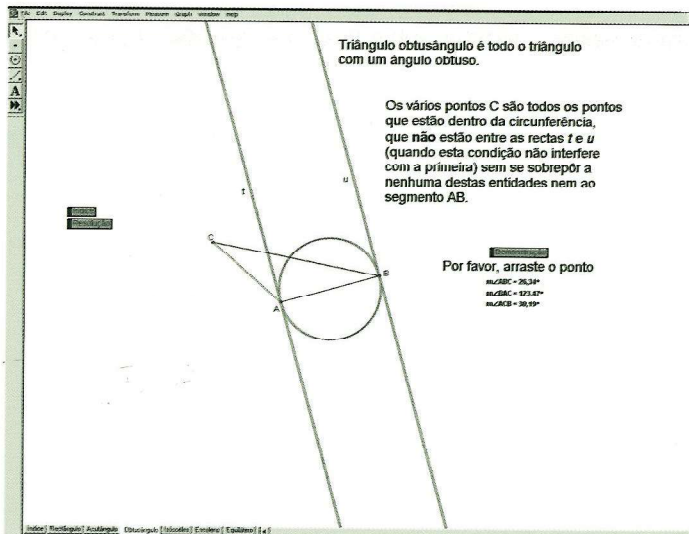


Figura 4

ser qualquer um dos pontos pertencentes ao arco WM , com excepção dos pontos W e M , uma vez que se o ponto C coincidissem com um desses pontos, o triângulo seria rectângulo em C .

Fazendo deslocar o ponto C ao longo da circunferência, contudo, viu-se que isto era verdadeiro para os pontos do arco referido, mas não para o resto dos pontos da circunferência e que estão entre as rectas paralelas (arco AB), pelo que o raciocínio teve de ser revisto (figura 2).

O outro raciocínio foi: "Para o triângulo ser acutângulo, devo fazer duas rectas perpendiculares ao segmento, uma que passe em A e outra que passe em B , visto que se o ponto C se encontrar entre as duas rectas, todos os ângulos vão ser agudos. Mas depois de «desenhar» as rectas, e de ver os resultados, apercebi-me que havia uma região muito próxima do segmento dado em que o ângulo em C era obtuso... Comecei por desenhar um quadrado cuja diagonal era o tal do segmento, mas depressa me apercebi que mesmo assim havia zonas entre as duas rectas e fora do quadrado em que um dos ângulos não era agudo. Só depois me lembrei da alínea anterior. Ora, se o ponto C fosse parte da circunferência cujo diâmetro é o segmento dado, então o ângulo ACB seria recto, e o triângulo, rectângulo, ou seja, para o triângulo ser acutângulo, o ponto C tinha de estar entre as duas rectas mas sem intersectar a circunferência de diâmetro AB . Mas e se

fosse dentro da circunferência? Eu já tinha visto que havia zonas em que o triângulo ficava obtusângulo, e não rectângulo nem acutângulo, como era pretendido. Por isso pensei: e se existir uma espécie de «dégradé» em que os ângulos fora da circunferência têm menos de 90° (excepto quando não estão entre as duas rectas), em que os ângulos que intersectam a circunferência têm exactamente 90° (porque como já foi dito antes, todos os ângulos inscritos numa semicircunferência têm 90°) e em que os ângulos dentro da circunferência têm mais de 90° ? Tentei comprovar a minha ideia arrastando o ponto no *Sketchpad* (é por motivos como este que um programa de geometria dinâmica dá muito jeito) e deu certo. Assim, para o triângulo ser acutângulo, o ponto C tem de estar entre as duas rectas mas no exterior da circunferência."

Este processo permitiu resolver, ao mesmo tempo, duas alíneas do enunciado (figuras 3 e 4).

Classificação quanto aos lados

Relativamente ao triângulo isósceles, começámos por desenhar $[AB]$ e a partir dele traçámos a mediatriz, k . Qualquer ponto da recta k , à excepção do ponto médio do segmento AB — que é colinear com A e com B e, nesse caso, não forma um triângulo — pode ser o ponto C .

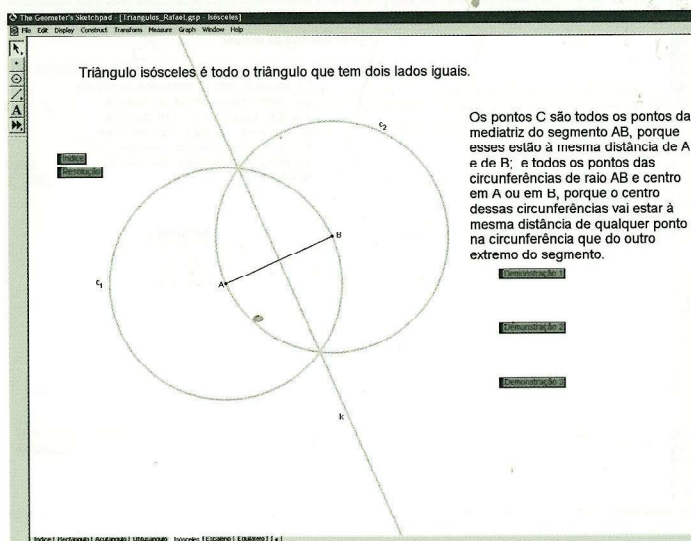


Figura 5

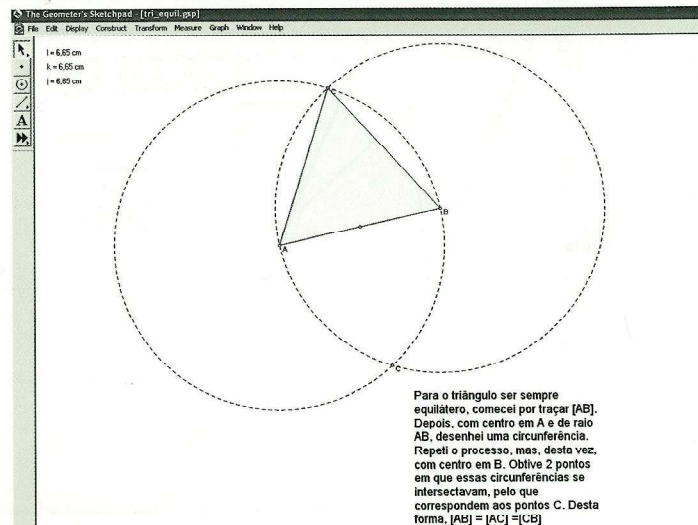


Figura 6

Nesta situação, os lados iguais vão ser os que concorrem em C , mas também temos de ter em conta que os lados iguais podem ser os concorrentes em A ou em B e, por isso, temos de construir duas circunferências, uma de centro em A e raio AB , e outra de centro em B e raio AB porque, assim, qualquer ponto C dessas circunferências, desde que não coincida com A ou com B , está a uma distância do centro (A ou B) igual ao lado AB (raio da circunferência) e forma com os outros dois pontos um triângulo isósceles (figura 5).

Ao fazer esta construção, descobrimos duas situações em que o triângulo isósceles era equilátero: o ponto C situa-se na intersecção das circunferências com a mediatriz.

No ecrã que surge na figura 6 pode ver-se a resolução e explicação para a penúltima alínea da investigação.

Visto que os pontos sobre a mediatriz de $[AB]$ e sobre as circunferências de raio AB com centro em A ou em B dão origem a triângulos equiláteros ou isósceles, para o triângulo ser escaleno, os pontos C tinham de estar fora desses três elementos (figura 7).

À laia de conclusão ...

Alunos

Bom, divertimo-nos imenso, quer a realizar a actividade (o que nos permitiu aprofundar os nossos conhecimentos de

geometria, e, ao mesmo tempo, descobrir e explorar as facetas desconhecidas do Geometer's Sketchpad, que embora já tivéssemos explorado nas aulas, não tínhamos tido oportunidade de aproveitar certas funcionalidades como os botões de "esconder" e "revelar", e os botões de animação), quer a escrever o artigo em si (porque fortalecemos as relações entre nós, colegas, e com a professora, o que é sempre positivo), e achamos que esta proposta da professora, uma proposta diferente das actividades normais e rotineiras características desta fase escolar, nos conseguiu cativar e embora não tivesse contado para a nota, despertou-nos a curiosidade.

Professora

Para que o artigo aparecesse escrito, professora e alunos reuniram semanalmente na escola mas, entre essas reuniões, trocou-se muita correspondência electrónica, o que suscitou algumas situações interessantes, quer a nível da comunicação, quer a nível matemático. Abaixo transcrevem-se duas delas:

Mensagem do Rafael, depois de muito insistir junto de ambos para que escrevessem sempre com conhecimento a todos:

"Gostaria que a Sofia me enviasse a versão alterada do texto, para verificar se o meu raciocínio é igual, visto que o ficheiro que vinha anexado no mail dela (Desculpa por me estar a re-

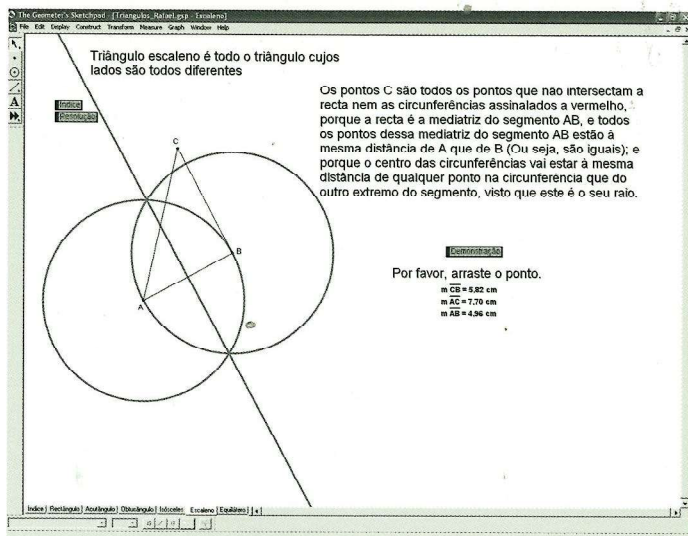


Figura 7

ferir a ti na terceira pessoa, mas isto de escrever um mail para duas pessoas é um bocado esquisito ...) era o mesmo que vinha anexado no primeiro mail enviado pela professora.”

Troca de mensagens entre os alunos aquando da escrita de parte do texto:

Sofia

“Relativamente ao triângulo isósceles (sketch09), comecei por desenhar o $[AB]$, a partir do qual obtive a mediatriz. Assim, tracei uma mediatriz, para que esta pudesse conter todos os pontos C . Posto isto, concluo que qualquer ponto da recta k , à excepção do ponto D — que é colinear com $[AB]$ e, nesse caso, não se formaria um triângulo — pode ser o ponto C .”

Rafael

“Quanto aos lados, Sofia, está incompleto porque assim, como tu descreveste, os lados iguais vão ser os que se tocam em C , e também temos de ter em conta que os lados iguais podem ser os que se tocam em A ou em B , e para isso, temos de construir duas circunferências, uma de centro em A e raio AB , e outra de centro em B e raio AB , porque assim, o centro dessas circunferências vai estar à mesma distância de qualquer ponto na circunferência que do outro extremo do segmento.”

Um último pensamento:

Ainda que seja francamente estimulante ver que os alunos trabalham com qualidade e persistência mesmo que não seja “para a nota”, pergunto-me porque se convenceram eles que não contaria...

Rafael Gonçalves

Sofia Rodrigues

Sónia Figueirinhas

EB 2.3 Roque Gameiro. Amadora