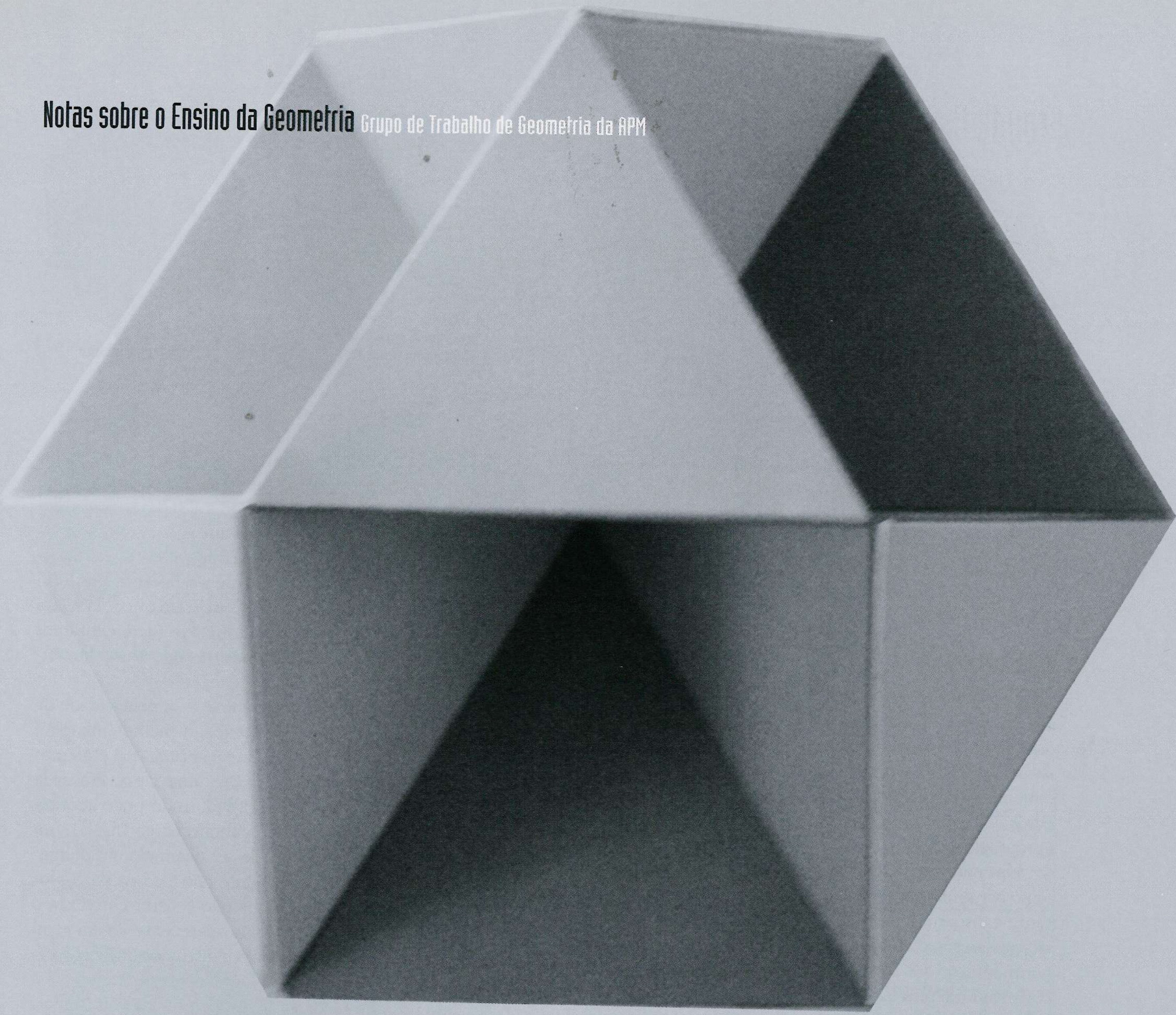

Deltaedros há muitos . . .

Eduardo Veloso

Introdução

Esta nota vem na sequência de duas anteriores (EM96 e EM97), intituladas "Há vida na geometria para além dos prismas, paralelepípedos, cubos, esferas, cilindros e cones . . ." e "Poliedros regulares". No fim da primeira nota dizíamos que "Em futuras notas, tentaremos mostrar (através de propostas concretas) como há vida muito interessante, na geometria, para além da circunferência e dos prismas, pirâmides, cubos, esferas, cilindros e cones. . .".

Propostas concretas foi uma expressão não muito bem empregue, pois as propostas concretas em aulas concretas a alunos concretos serão de preferência feitas pelos professores *concretos* desses alunos, ou seja por si, caro leitor. O que vou fazer nesta nota é sugerir um tema, para além dos "prismas, paralelipípedos, ...", a saber, o tema dos *deltaedros*.[1] Trata-se de um tema suficientemente amplo para alimentar propostas desde o 1° ciclo até ao secundário, e apenas o leitor, conhecedor da maturidade dos seus alunos e das suas

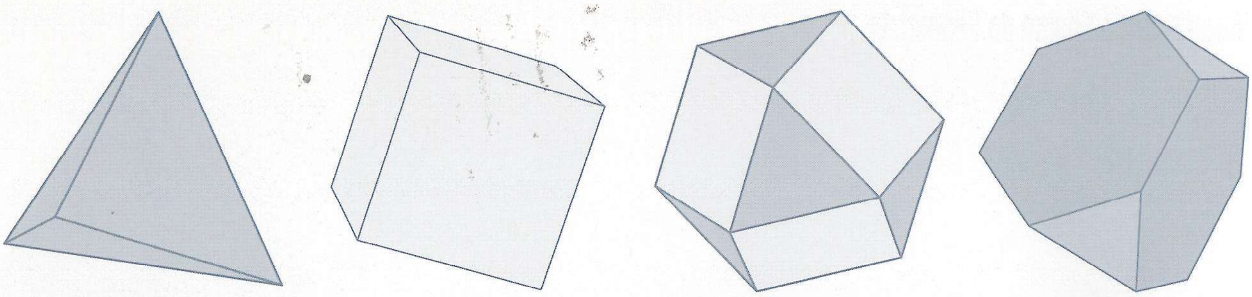

Figura 1

experiências anteriores, pode imaginar a proposta certa no momento certo. Assim, depois desta curta introdução, ocuparei o resto desta nota com alguma informação matemática sobre essa família infinita de poliedros, os deltaedros, suficientemente variada para dar origem a múltiplas propostas de investigações. Incluirei também algumas sugestões de carácter pedagógico.

Os deltaedros

Se, no mundo dos poliedros, escolhermos aqueles cujas faces são *triângulos equiláteros todos iguais*, obtemos a família dos *deltaedros*. Chamam-se assim porque a letra grega delta maiúscula — Δ — tem a forma de um triângulo. Um aspecto comum das investigações que podemos imaginar com deltaedros é a descoberta e construção concreta, com materiais apropriados, de deltaedros.

Um material apropriado para essa construção são peças (tipo *polydron*) em forma de triângulo equilátero[2]. É importante a disponibilidade de uma grande quantidade de peças triangulares, para facilitar a todos os alunos uma ampla experimentação. Os *polydrons* são um material caro e isso pode constituir um problema. Triângulos equiláteros em cartolina e fita adesiva é um material menos prático mas possível de utilizar. Um modo de poupar material é dividir os alunos em grupos e quando um grupo descobre um deltaedro os outros grupos deixam de procurar esse deltaedro.

Os três deltaedros mais conhecidos são naturalmente o tetraedro, o octaedro e o icosaedro, ou seja, os três poliedros regulares convexos de faces triangulares (ver a nota anterior sobre poliedros regulares (EM97)). A tal investigação inicial pode incluir a descoberta de alguns destes poliedros ou não, conforme seja feita antes ou depois do conhecimento dos poliedros regulares. Um modo de propor essa investigação a alunos que nunca construiram os poliedros regulares — alunos do 1° ciclo, por exemplo — pode ser espalhar sobre uma mesa quatro poliedros, por exemplo um tetraedro, um cubo, um cuboctaedro e um tetraedro truncado (fig. 1), e uma grande quantidade de triângulos equiláteros iguais aos que foram usados na sua construção.

Mostra-se aos alunos que destes poliedros, o tetraedro é o único formado apenas por triângulos equiláteros. Pede-se-lhes simplesmente que descubram outros poliedros feitos apenas com triângulos equiláteros, tantos quantos forem capazes.

Os deltaedros são em número infinito, pois podemos imaginar por exemplo um octaedro e depois colar numa das suas faces um tetraedro, e depois na face deste tetraedro outro tetraedro, e assim sucessivamente..., obtendo assim tantos deltaedros quantos quisermos! Mas os matemáticos Freudenthal e Van der Waerden demonstraram[3] em 1947 que deltaedros *convexos* apenas existem oito. Na figura 2 apresentamos os oito deltaedros convexos (acrescentámos as arestas escondidas a tracejado nos três que têm pouca simetria, para facilitar a sua visualização).

Se surgir – ou o professor provocar — a necessidade de discutir o que são poliedros convexos, a melhor maneira, julgo eu, de indicar essa propriedade é afirmar que podemos assentar um poliedro convexo, sobre uma mesa, em cada uma das suas faces. Numa investigação tudo pode acontecer, e pode ser que um aluno descubra o barco (fig. 3), um octaedro que tem tanto direito de ser chamado um deltaedro como o seu irmão regular, apenas não é convexo... Nos primeiros anos talvez seja melhor não separar convexos e côncavos (e eu diria que os que vão aparecer serão em geral os convexos), mas no terceiro ciclo a distinção entre convexos e não convexos deve ser explorada, parece-me.

No caso dos convexos existem apenas, como dissemos, os 8 da fig. 2.[4] Intuitivamente, podemos chegar à conclusão de que não podem existir mais do que 9, da seguinte forma:

Em primeiro lugar, não podem existir mais do que 17 deltaedros convexos

- com efeito, sabemos que o deltaedro com o menor número de faces é o tetraedro, pois não podem existir vértices onde concorram menos do que 3 triângulos equiláteros e conseguimos construir o tetraedro regular, que tem 4 vértices desse tipo e 4 faces;
- por outro lado, não podem existir nos deltaedros convexos mais do que 5 triângulos equiláteros concorrentes em cada vértice e "portanto" — mas é neste ponto que é exigida uma demonstração — intui-se que para se manter convexo o máximo número de faces se obtém no icosaedro, com 12 vértices deste tipo e 20 faces;
- assim, sendo o número mínimo de faces 4 e o máximo 20, poderiam em teoria existir 17, com o número de faces igual a 4,5,6, ... 20.

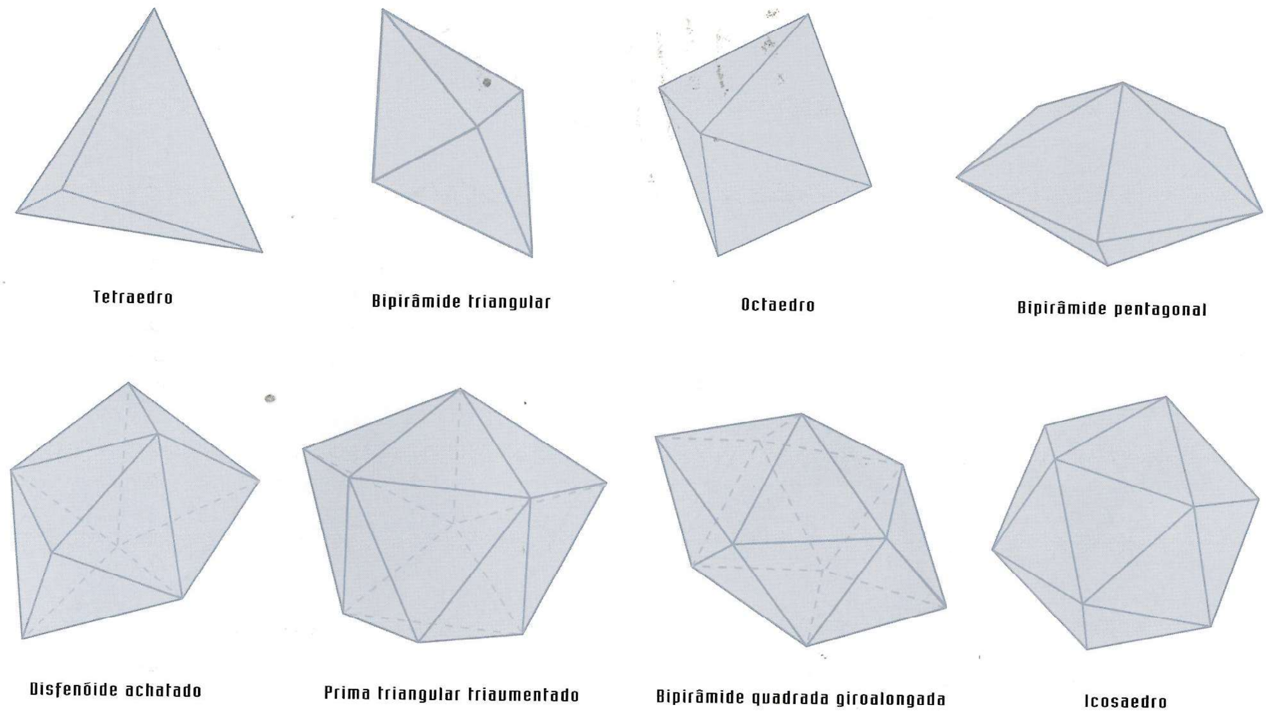

Figura 2

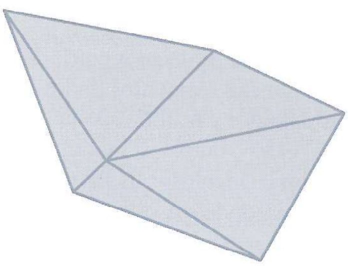

Figura 3

Deltaedros convexos		Faces	Arestas	Vértices
D_4	*tetraedro*	4	6	4
D_6	----	6	9	5
D_8	*octaedro*	8	12	6
D_{10}	----	10	15	7
D_{12}	----	12	18	8
D_{14}	----	14	21	9
D_{16}	----	16	24	10
D_{20}	*icosaedro*	20	30	12

Tabela 1

Em segundo lugar, os deltaedros convexos têm um número de faces sempre par. A demonstração deste facto é bem simples: se for F o número de faces e A o número de arestas, como as faces são triângulos, $A = 3F/2$ pois cada aresta tem duas faces adjacentes; logo o número de faces tem que ser par (pois $F/2$ tem que ser inteiro). Assim, dos 17 ficamos reduzidos teoricamente a 9 possibilidades, com 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 e 20 lados.

O facto de não existir o deltaedro com 18 faces, e portanto de existirem apenas 8 realmente, está demonstrado nas referências bibliográficas já indicadas.

Julgamos que depois de encontrados os 8 deltaedros convexos, feitos com *polydrons*, é interessante contar as suas faces, arestas e vértices e elaborar uma tabela. Nessa tabela podem constar os nomes, mas realmente os nomes não são nada importantes e até alguns deles são muito estranhos. É uma escolha do professor, conforme a maturidade dos alunos e a sua experiência anterior com poliedros. Uma hipótese é deixar apenas os nomes dos regulares, e designar todos por D_n, sendo n o número de faces (ver tabela 1).

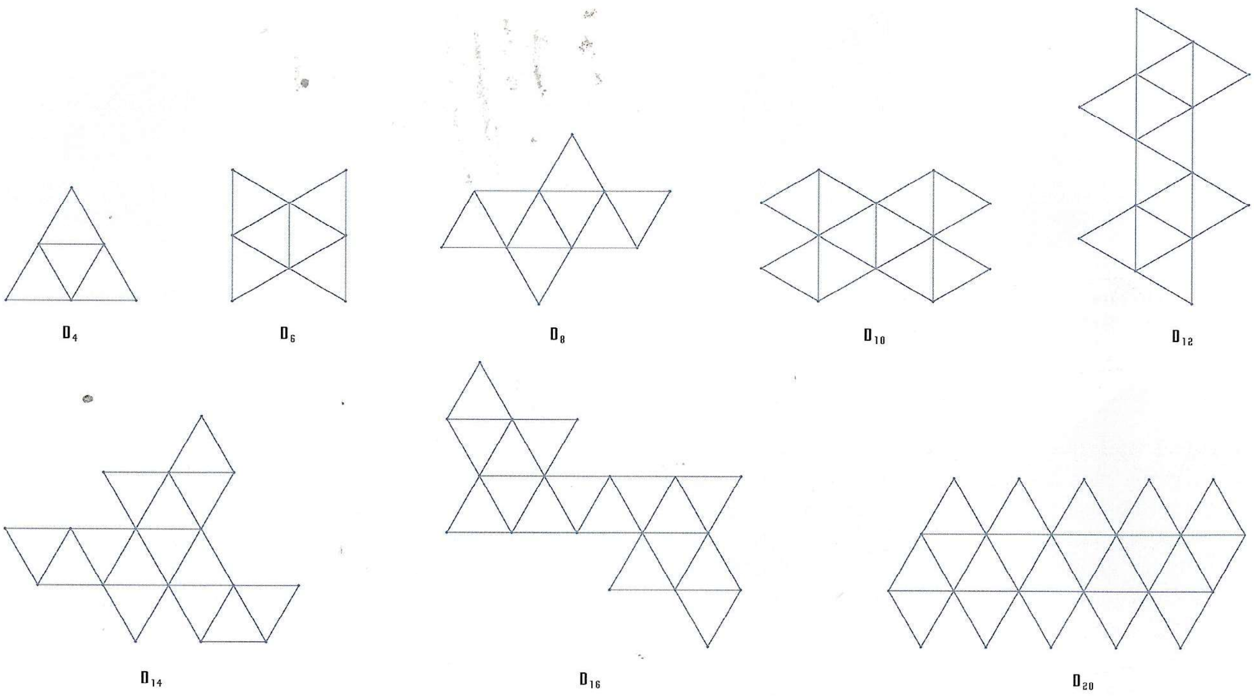

Figura 4

Naturalmente, depois de descobertos e construídos os deltaedros convexos, há que encontrar as suas planificações. Julgo que uma actividade com grande valor educativo consiste em pedir aos alunos que desenhem — sem desfazer as construções — as planificações a partir das construções em *polydron*, e depois desfazê-las cuidadosamente e verificar se se acertou, emendando as que porventura estejam erradas ou pedir a cada grupo de alunos para desenhar uma planificação e depois construir um sólido em cartolina (aqueles que ficariam em exposição). Apresentamos na figura 4 planificações dos 8 deltaedros convexos (estas planificações não são únicas!).

Deltaedros não convexos

Como já salientámos, existem infinitos deltaedros, se incluirmos os não convexos. Apresentamos um exemplo retirado do esplêndido livro *Mathematical Models*, que devia estar à cabeceira de todo o professor de Matemática...

Se num cuboctaedro (veja a fig. 1) colarmos, nas suas faces quadradas, pirâmides de base quadrada e faces laterais triângulos equiláteros, obtemos um octaedro! Mas se em vez de colocarmos as pirâmides voltadas para fora as voltarmos para dentro do cuboctaedro, retirando todas as faces quadradas e as bases das pirâmides, obtemos um poliedro não convexo em que as faces são todas triângulos equiláteros iguais — isto é, um deltaedro não convexo com 32 faces... A figura 5 tenta mostrar esse poliedro[5]. Cundy, no mesmo livro, sugere um modo rápido de o construir em cartolina. O desenho da planificação é obtido a partir da planificação de um octaedro, dividindo cada face em 4 triângulos equiláteros pelos três segmentos que unem os pontos médios dos lados. Obtemos assim a figura 6.

Para construirmos o deltaedro de 32 faces a partir desta planificação, os "vincos" a fazer nos segmentos (lados dos triângulos) por onde vamos dobrar a cartolina são de dois tipos — uns correspondem a "vales", outros a "montanhas" — como é costume. Os lados dos triângulos azuis são montanhas, todos os outros lados correspondem a vales. Na prática, os lados dos triângulos azuis são vincados numa das faces da cartolina, todos os outros na outra. As junções poderão depois ser feitas com fita adesiva transparente.

Notas

1. De resto, foi isto que Pedro Macias Marques fez na última nota, relativamente aos poliedros regulares.

2. Quando os alunos começam a trabalhar com *polydrons*, é bom dizer que vamos adoptar a seguinte "regra do jogo": cada *polydron* irá ser uma face do poliedro, portanto não dá para juntar dois ou mais *polydrons* e fazer uma face maior. Isto é — e parece-me que seria bom o professor dar exemplos como o seguinte —, não é válido juntar quatro *polydrons* triângulos equiláteros e fazer uma face triangular maior, por exemplo. Julgo que a explicação mais clara (e mais produtiva para quem como os alunos está lentamente a construir na sua cabeça o conceito de poliedro) é dizer que ao juntar polígonos para formar o

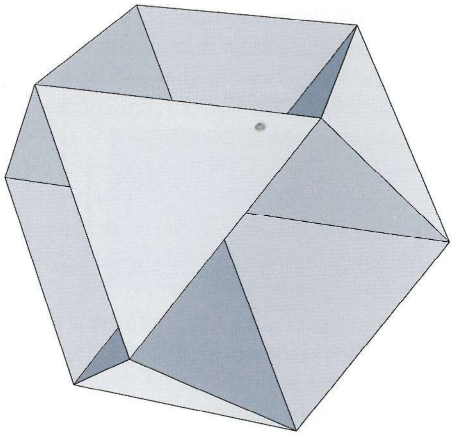

Figura 5

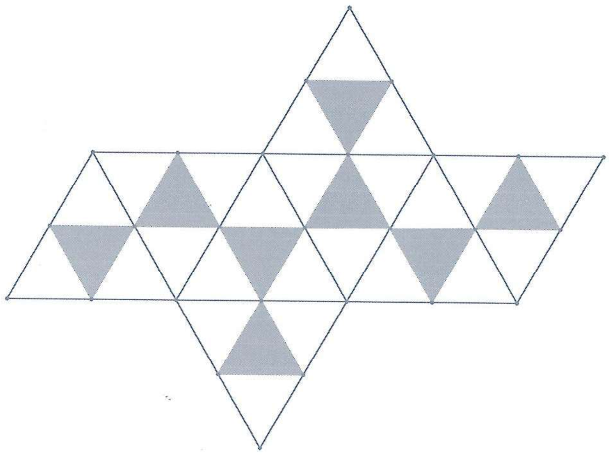

Figura 6

poliedro, todos os lados dos polígonos vão ser arestas do poliedro, haverá sempre um ângulo (mais tarde falarão em diedro, talvez) diferente de 0 quando dois polígonos têm um lado comum.

3. Referido no livro *Mathematical Models*, pág. 142, 3ª edição (ver bibliografia e *links*).

4. Não daremos aqui a demonstração completa de que existem apenas 8 deltaedros convexos. Apresentaremos apenas uma breve justificação de que em teoria apenas poderiam ser 9. Digamos que existem três partes na demonstração completa: que o número de faces está entre 4 e 20 (inclusivé nos dois extremos) — portanto em princípio poderiam existir 17 —, que o número de faces é par – portanto em princípio poderiam apenas existir 9 –, e finalmente que existem 8 porque o deltaedro com 18 faces não pode ser construído. Ver artigo de Cundy na *Mathematical Gazette* (v. bibliografia e *links*).

5. A colega Vera Viana, da APROGED, que sabe tudo sobre poliedros e que está a colaborar com o GTG, comunicou-me que o nome deste poliedro é octahemioctaedro. Aqui fica. Quando penso nestes nomes tão arrevezados de alguns deltaedros, e na paranóia dos nomes que grassa no nosso ensino de geometria elementar, imagino logo o aparecimento, em algum livro de preparação para as provas de aferição, de uma questão como a da figura 7...

   Em qual das alíneas seguintes estão escritos os nomes destes poliedros na ordem correcta, da esquerda para a direita:

   A) bipirâmide quadrada giroalongada, disfenóide achatado, prisma triangular triaumentado, octahemioctaedro.

   B) disfenóide achatado, bipirâmide quadrada giroalongada, prisma triangular triaumentado, octahemioctaedro.

   C) disfenóide achatado, prisma triangular triaumentado, octahemioctaedro, bipirâmide quadrada giroalongada.

   D) bipirâmide quadrada giroalongada, octahemioctaedro, prisma triangular triaaumentado, disfenóide achatado.

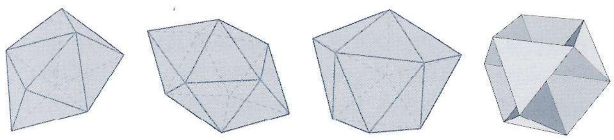

Figura 7

Bibliografia e links

Cundy, H. M. "Deltahedra." *Math. Gaz.* 36, 263–266, 1952. (`http://www.jstor.org/pss/3608204`)

Cundy, H. and Rollett, A. "Deltahedra." §3.11 in *Mathematical Models*, 3rd ed. Stradbroke, England: Tarquin Pub., pp. 142–144, 1989.

WolframMathWorld:

`http://mathworld.wolfram.com/Deltahedron.html`

Eduardo Veloso