Respostas reais para problemas reais

Jorge Cruz

Resolução de problemas no centro das atenções

Em termos de orientações curriculares para o ensino da matemática, vive-se, há mais de duas décadas sob o primado da Resolução de Problemas. Esta actividade, postulada como "foco da matemática escolar" (NCTM, 1980, p1), tem sucessivamente merecido relevo nos documentos posteriores como as *Normas* (NCTM, 1989) e os *Princípios e Standards* (NCTM, 2000). Esta ênfase não se circunscreve aos EUA, mas antes assume uma dimensão à escala global, da qual o livro Pehkonen (2001) nos dá abundante testemunho. Não obstante poder parecer ter decorrido tempo suficiente para implementação desta prática nas salas de aula, a verdade é que testes internacionais como o PISA, 2003 (GAVE, 2004) mostram, ao nível dos resultados, baixa *performance* dos alunos portugueses na Resolução de Problemas em particular e nas várias áreas de conteúdo matemático[1] em geral. Não é objectivo deste texto enumerar as causas de tal "demora" no surgimento de resultados. Elas são diversas e têm sido alvo de bastantes estudos, de que constituem exemplos mais recentes o estudo exaustivo (com cobertura nacional de praticamente 100% das escolas com 9° ano!) feito a propósito dos resultados dos exames de 9° ano de 2005 (GAVE, 2006a e GAVE, 2006b). O presente artigo tentará explorar apenas algumas ideias, que se supõem bastante consensuais, sobre como implementar a resolução de problemas em sala de aula.

Uma questão metodológica

Os problemas não podem ser encarados como mais um tema do programa, mas antes como uma metodologia (Leal, Veloso e Abrantes, 1994). O uso tradicional de problemas no final de uma sequência didáctica, como se fosse para provar que os conhecimentos teóricos leccionados têm aplicação em contextos reais (nos quais os problemas podem surgir) é insuficiente. Da mesma maneira, no dizer de Kunioka (2000), é insuficiente o desenho metodológico (comum em livros de texto): problema inicial, frequentemente para ser resolvido/explicado pelo professor, seguido de dois ou três problemas de aplicação a serem resolvidos pelo mesmo método e fazendo uso dos mesmos conhecimentos. Uma nova visão do ensino da resolução de problemas centra os processos de ensino no trabalho com heurísticas. O uso de problemas deixa de ser visto apenas como justificação para os conhecimentos e ganha importância por si só e então, à primeira visão, mais próxima da aplicação de conhecimentos, acrescenta-se um segundo enfoque ao nível do trabalho estratégico. Mas pensar no par conhecimento *versus* estratégia como uma dicotomia é errado pois é de bom senso que qualquer dos dois atributos, por si, é insuficiente para a resolução de problemas. Acresce que, tão-pouco os dois atributos juntos são suficientes. Se atendermos ao modelo de competência em resolução de problemas de Schoenfeld (1992), aos recursos (conhecimentos) e às heurísticas devem acrescentar-se o controlo e as crenças como peças necessárias a um bom desempenho. Para que um sujeito se torne um solucionador competente é pois preciso passar dos estádios do ensino *para* e *sobre* a resolução de problemas a um ensino através (ou *via*) resolução de problemas[2].

A escolha de problemas para a aula

Feita esta pequena reflexão de carácter metodológico, importa agora referir aspectos que se prendem com a qualidade das tarefas escolhidas e com a exploração das mesmas em contexto de sala de aula. Voltando ao modelo de Schoenfeld (1992), as duas últimas características do solucionador (controlo e crenças) requerem, além de um ensino via resolução de problemas, a selecção e exploração de actividades ricas. A formação de um sistema de crenças favorável é, provavelmente, o aspecto mais difícil de conseguir. O sistema de crenças do aluno é fortemente influenciado pelo meio, pela imagem social da matemática, e essa, precisará de mais tempo para mudar... Esta disciplina continua, grosso modo, a ser vista como a ciência de uma única resposta certa e da existência de caminho único. Estas crenças (predominantes na sociedade em geral, mas também nos alunos) precisam evoluir através de actividades bem escolhidas. Para o efeito é costume a literatura defender a utilização de problemas cuja situação ou contexto sejam reais, isto é, problemas cuja resolução possa surgir a um cidadão num dado momento da sua actividade. Se a situação for particularmente bem escolhida poder-se-á dizer que o problema é, além de real, quotidiano, ou seja, que o próprio aluno, no seu dia a dia, poderá ter necessidade de o resolver[3]. Se consultarmos os nossos manuais escolares observamos com frequência actividades classificáveis como problemas que traduzem contextos reais. Contudo, numa análise mais atenta, facilmente se constata que a maioria apenas traduz aspectos muito particulares e redutores dessa mesma realidade. Quase sempre o seu texto ou esquemas são simplificados (os dados são apenas os necessários e suficientes para resolver a situação e os esquemas são reduzidos aos detalhes matematizáveis). Os problemas surgem assim em contextos depurados, como se tivessem sido "lavados com lixívia". Ora o que importa é precisamente explorar a via mais "impura", mais "contaminada" de ruído que a situação possa trazer. O dia a dia tem, de facto, problemas de matemática para resolver, mas esses problemas surgem quer mal formulados, quer misturados com uma panóplia de dados e imagens supérfluas. A primeira fase para resolver problemas no dia a dia é a identificação (detecção) do problema[4], enquanto que em contexto escolar tal não acontece. A apresentação de problemas envolvidos em contextos tão próximos da realidade quanto possível poderá proporcionar ao aluno, por um lado, a sensação de estar a resolver um problema que, além do contexto escolar, é passível de surgir na vida real e, por outro lado, o desenvolvimento de capacidades para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente. O NCTM (1991, p. 6) ao definir o conceito de Poder Matemático[5] (o qual inclui as três capacidades referidas) envolve ainda, entre outras, a aptidão para usar uma variedade de métodos matemáticos, meios de comunicação e noções de contexto. Estas noções de contexto, ou seja, todo o conhecimento que o solucionador detém da situação concreta de onde o problema emerge, é conhecimento mobilizável para a sua resolução e não apenas aquilo que de "matemático" se consegue extrair dos dados. Inoue (2005, p. 70) afirma que os alunos efectuam mentalmente operações aritméticas para resolverem problemas e não mobilizam o senso comum inerente às situações da vida real, o que, por vezes, leva a respostas sem sentido no contexto considerado.

A escolha de problemas abertos e/ou que permitam mais do que uma solução[6] constituirá um excelente estímulo com vista à formação de alunos matematicamente competentes.

A abordagem

"Quando os alunos falam sobre as suas resoluções tornam-se melhores resolvedores de problemas" NCTM (1999, p38). Então, dizer que o professor deve assumir um papel de mediador das aprendizagens não é palavra vã. A explicação ao nível das suposições feitas (se o problema é aberto) da escolha da estratégia e dos conhecimentos matemáticos aplicáveis, bem como da resposta adequada, constitui a maior riqueza deste processo. A possibilidade de vários caminhos permite o debate, que não deverá ter como objectivo a selecção da "melhor" solução, mas antes, mostrar possibilidade de coexistência de várias soluções. Desta maneira os alunos são forçados a desenvolver a capacidade de interpretar o pensamento dos outros e são confrontados com diferentes representações do mesmo problema, aspectos importantes para o desenvolvimento do pensamento flexível. (Warner, Coppola e Davis, 2002)

Na exploração de situações verdadeiramente problemáticas, ou seja, não apresentadas apenas nos seus aspectos necessários e suficientes, a tentação é de matematizar a situação, separando o acessório do essencial. Esta abordagem não é errada mas, uma vez encontrado o fim da exploração matemática, essa resposta deverá ser confrontada com a situação tal como estava proposta inicialmente, na sua diversidade contextual. Só então se poderá verificar da efectividade da resposta ao problema. Este procedimento é como uma espécie de movimento pendular: situação-matematização-situação. Nesta perspectiva, Gravenmeijer citado por Inoue (2005, p. 70) alerta para um princípio errado da aula tradicional que se poderia sintetizar na expressão: não te preocupes com a realidade, concentra-te apenas na matemática.

Com vista à desmistificação de algumas ideias que os alunos transportam e que são limitadoras da criatividade e da procura de soluções onde o senso comum possa valer, é importante trabalhar problemas que admitam mais do que uma resposta possível, fazendo ver que isto não é incoerente nem tira rigor à matemática. Nalguns problemas, por darem lugar a suposições intermédias devido ao seu grau de abertura, as respostas podem ser várias: não há uma única resposta certa mas várias admissíveis no contexto. Noutros problemas, mesmo sem suposições intermédias diferentes, dependendo da argumentação, também poderão ser admitidas respostas diferentes.

Veja-se o exemplo de um problema com grau de abertura face às suposições:

Fernando vive a dois quilómetros da escola e Joana vive a cinco quilómetros da escola. A que distância vivem um do outro?

Este problema, dependendo das suposições feitas pelo resolvedor, poderá assumir respostas compreendidas entre 3 e 7 quilómetros, inclusive. Na formulação apresentada, não será de estranhar que a turma se divida entre as duas respostas limite. De entre os dois valores arrisco um vaticínio: será o valor 7 o mais escolhido de entre os dois, pois supõe um raciocínio aditivo imediato. A existência de duas respostas deverá ser o motor para a verdadeira exploração do problema em sala de aula, a qual terá várias fases: compreensão e validação das duas possibilidades, conjectura sobre outras hipóteses, procura de outras soluções, conjectura sobre as características do conjunto solução (finito ou infinito), definição do conjunto solução possível. Esta exploração não terá necessariamente todas estas fases (os alunos podem saltar alguma e intuir o conjunto solução) ou poderá eventualmente ter outras (que dependem dos contributos dos alunos para a discussão). Uma boa forma de finalizar a exploração deste problema, para um nível de terceiro ciclo, poderá ser a construção do lugar geométrico (duas circunferências concêntricas num ponto designado por escola) o qual fornece seguramente uma imagem que vale por mil palavras. Uma exploração com *software* geométrico seria ouro sobre azul...

Analise-se outro problema, interessante, dependendo da importância contextual desejada:

A temperatura máxima prevista para hoje é de 31 graus Centígrados. Alguns países, como o Reino Unido, usam a escala Fahrenheit para medir as temperaturas. A fórmula

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

faz a conversão entre as duas escalas.

Um meu primo que vive perto de Londres há vários anos disse-me que está mais habituado a pensar nas temperaturas na escala Fahrenheit e que, por isso, quando telefona para Portugal e lhe digo a temperatura em Beja, procede mentalmente ao seguinte cálculo: multiplica por 2 e soma 30. Ele diz que o valor obtido corresponde à temperatura em Fahrenheit com um erro que não ultrapassa 1 grau. O meu primo tem razão? Explora o problema e faz um comentário fundamentado.

(Adaptado de Mason, 1999, pp. 7)

A resolução estritamente matemática deste problema sugere que o primo tem razão apenas para valores compreendidos entre 5 e 15 graus Fahrenheit inclusive. Contudo as sugestões de "explorar" e de "comentar", apontam claramente para uma harmonização entre o resultado matemático puro e a contextualização. Beja, cidade do interior sul do país, caracteriza-se por elevadas amplitudes térmicas. A estimativa não tem erro superior a 1 para valores que apenas se verificam no Inverno. Quanto às estações intermédias e ao Verão, dificilmente se registarão valores de temperaturas capazes de verificar a afirmação. Então a realidade diz-nos que a afirmação tem uma maior probabilidade de estar errada que de estar correcta. Uma extensão a uma estimativa probabilística, baseada em registos meteorológicos seria certamente um desenvolvimento enriquecedor.

Este outro problema mostra uma situação onde os dados iniciais podem parecer insuficientes:

Um condutor de camioneta expresso, habituado a fazer sempre a mesma carreira reparou que na sua última viagem se deu uma curiosidade. Ao observar o número de bilhetes vendidos verificou que saiu da estação com 1 passageiro. Recolheu em cada nova paragem tantos passageiros quantos os que já transportava no autocarro, sem que nenhum saísse. Na penúltima paragem o autocarro ficou cheio. Quantas paragens tem o percurso? Considere os locais de partida e de chegada como paragens.

(Adaptado de Santos Trigo, 1996, pp. 151)

O problema pode dar lugar a alguma surpresa inicial, quer pela sensação de insuficiência dos dados quer pela questão, a qual não tem relação aparente com os dados. Partir do que se sabe e raciocinar a partir dos dados será uma estratégia para começar a obter alguma evidência. A listagem de valores possíveis para número de passageiros (1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128, ...) deixa claro que o valor mais provável é 64 passageiros na sétima paragem. Pode-se discutir sobre a menor probabilidade das respostas restantes, embora se possa aceitar como válida a resposta 6, que corresponderia a uma lotação de 32 lugares na camioneta (este é um número plausível para autocarros de menor formato).

Finalmente um problema que admite as respostas sim ou não, dependendo da argumentação final.

O marco do correio tem uma abertura rectangular com 20 cm de comprimento e 5,5 cm de largura. A Mariana vai colocar uma carta cujas dimensões são 21 cm e 30 cm. Será que a carta entra sem ser dobrada? Explique a situação convenientemente.

A diagonal do rectângulo mede, aproximadamente, 20,7 cm, pelo que a resolução matemática do problema e uma interpretação muito "à letra" levariam à resposta negativa à pergunta. Porém, se pensarmos que curvar a carta é diferente de dobrar, na medida em que não lhe faz nenhum vinco, podemos pensar que a carta pode ser curvada uma vez e, dessa maneira, desde que a sua largura seja inferior a 25,5 cm ela poderá entrar na caixa sem ser dobrada. Com esta explicação a resposta positiva seria também admissível. Sem querer valorar as duas soluções, referir-se-á apenas, como argumento de bom senso, que só uma pessoa com pouca habilidade não conseguiria, com uma diferença que não chega a 3 mm, colocar a carta no marco sem a dobrar! Outras hipóteses poderiam ainda ser exploradas fazendo várias curvaturas na carta. Admitindo que a profundidade do marco nunca é inferior ao comprimento da carta, esta poderia sempre entrar dessa maneira "ondulada" sem qualquer vinco.

Devemos sempre pensar numa resposta real, se a situação proposta se reveste de contorno real. De outra forma não estaremos a preparar para a resolução de problemas para a vida, mas sim a criar situações escolarizadas, de laboratório, teóricas e difíceis de transpor para o mundo real. Não estaremos a formar alunos matematicamente competentes.

Notas

1 Ainda que os resultados não tenham igual expressão em todas as áreas, são "Espaço e Forma" e "Quantidade" as duas subescalas do PISA onde os resultados dos alunos portugueses são mais baixos.

2 Considerem-se os três níveis de Hatfield: Teaching for Problem Solving, Teaching about Problem Solving e Teaching via Problem Solving, citado por Contreras (1999)

3 Segundo a classificação: Problemas práticos (ou não rotineiros), problemas reais (ou da vida real) e problemas quotidianos, (Cruz, 2003).

4 Conforme o modelo IDEAL de resolução de problemas de Bransford e Stein (1993), por exemplo.

5 *Mathematical Power.*

6 Entende-se por solução a sequência de procedimentos desde a compreensão do problema até à resposta final, o que difere de resolução na medida em que esta é mais geral ao incluir todas as sequências, tentativas falhadas ou abordagens feitas, quer tenham ou não conduzido à resposta.

Referências

Bransford, J. e Stein, B. (1993): *Solución Ideal de Problemas*. Barcelona: Editorial Labor, S. A.

Contreras, L. (1999): *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas*. Huelva: Universidad de Huelva.

Cruz, J. (2003): *Alguns dados sobre recursos e heurísticas, postos em prática por alunos do ensino básico durante a resolução de problemas. (Estudo comparativo entre alunos de 7° e de 9° ano)*. Huelva, Inédito.

GAVE (2004): *Resultados do Estudo Internacional PISA 2003 (Primeiro Relatório Nacional)*. Lisboa: Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação.

— (2006a): *Resultados do Exame de Matemática do 9° ano 2005 — 1ª chamada*. Lisboa: Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação.

— (2006b): *Reflexão dos docentes de matemática do 3° ciclo — Exame de 2005*. Lisboa: Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação.

Inoue, N. (2005): The realistic reasons behind unrealistic solutions: The role of interpretative activity in word problem solving. *Learning and Instruction*. Vol. 15, (1). 69–83.

Kunioka, T. (2000): Importance and difficulty of schema induction in analogical problem solving. *Proceedings of the 24th PME Conference*. Hiroshima. Vol 1, 167.

Leal, L.; Veloso, E. e Abrantes, P. (1994): Pode haver um currículo de Matemática centrado na resolução de problemas? Em Fernandes, D.; Borralho, A. e Amaro, G. (Eds) (1994). *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular*. pp 239–259, Lisboa: IIE.

Mason, J. (1999): *Learning and Doing Mathematics (2ª Ed)*. York: QED.

NCTM (1980): *An agenda for action*. Reston, Virgínia: NCTM

— (1989): *Curriculum and evaluation standardes for school mathematics*. Reston VA: NCTM

— (1991): *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM/IIE.

— (1999): *Normas para a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

— (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston VA: NCTM.

Pehkonen, E (ed) (2001): *Problem Solving Around the World*. Turku. University of Turku.

Santos Trigo, L. M. (1996): *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Schoenfeld, A. (1992): Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics. Em Grows, D. (Ed) *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Warner, L. Coppola, J. e Davis, G. (2002): Flexible Mathematical Thought. *Proceedings of the 26th PME Conference*. Norwich. Vol 4, 354–361.

Jorge Cruz

Escola Básica dos 2° e 3° Ciclos Santiago Maior, Beja