Conexões Matemáticas

As Potências de Base 2

Paulo Afonso

O texto que se segue pretende evidenciar como o tema das potências de base dois pode ser desenvolvido num cenário de conexões matemáticas. Para tal começa-se por associar este assunto ao tema das grandezas e medidas, nomeadamente ao nível das medidas de massa, passando, depois, pela actividade lúdica de se adivinhar um determinado número secreto. Por fim relacionar-se-á este conteúdo com um algoritmo ancestral da operação multiplicação.

A — As potências de base 2 envolvidas em pesagens

"Ricardo: — Joana, imagina que só tínhamos à nossa disposição uma massa de um quilograma. Que quantidades inteiras de batatas poderíamos pesar?

Joana: — Francamente, Ricardo! Que pergunta mais sem jeito; só se poderia pesar um quilo de batatas.

Ricardo: — Tudo bem, mas imagina que te lançava o seguinte desafio: é mais vantajoso encomendar uma nova massa de um quilograma ou uma massa de dois quilogramas para pesarmos dois ou mais quilos de batatas, sabendo que o preço das massas é o mesmo?

Joana: — Oh Ricardo, até parece que não estás bom da cabeça! Isso suscita em ti alguma dúvida?! Claro que só há vantagem em adquirir a massa de dois quilogramas, porque jogando com a anterior já podes pesar um, dois ou três quilos de batatas. Se, em vez desta, adquirisses outra massa de um quilograma só poderias pesar duas quantidades inteiras de batatas: a de um ou a de dois quilos.

Ricardo: — Certo, concordo contigo. E agora, qual será a massa que deveremos encomendar para dar continuidade às pesagens inteiras de quilos de batatas? Será outra de dois quilogramas? Será uma de três quilogramas, ou será uma de quatro? Nota: cada massa continua a custar o mesmo preço, independentemente do seu peso.

Joana: — Deixa-me pensar... Parece-me que a de quatro quilogramas é a massa mais vantajosa, porque irá permitir pesagens inteiras de quilos de batatas até à quantidade de sete quilos.

Ricardo: — Excelente! Concordo contigo. Já agora, qual a massa que aconselhas adquirir-se para dar continuidade a este jogo de pesagens?

Joana: — Sem dúvida que é a de oito quilogramas!

Ricardo: — Exacto, porque juntamente com as outras massas podemos pesar desde um quilo de batatas até aos quinze quilos."

Joana: — E se elaborássemos uma tabela contendo todas as pesagens, à medida que as massas vão sendo adquiridas?

Ricardo: — Boa ideia! Depois poderemos dar continuidade a este jogo de pesagens sugerindo a próxima massa a adquirir. Tendo em conta essa nova mas, até que quantidade inteira de batatas se poderá pesar?"

Massas existentes	Quantidade inteira de batatas a pesar (quilos)	Massas envolvidas na pesagem
1 kg	1 kg	1kg
1kg	1 kg	1 kg
2kg	2 kg	2 kg
	3 kg	1 kg + 2 kg
...	...	...

Tabela 1.

Quantidade inteira de batatas a pesar (quilos)	Massas envolvidas na pesagem
1 kg	1 kg
2 kg	2 kg
3 kg	1 kg + 2 kg
4 kg	4 kg
5 kg	1 kg + 4 kg
6 kg	2 kg + 4 kg
7 kg	1 kg + 2 kg + 4 kg
8 kg	8 kg
9 kg	1 kg + 8 kg
10 kg	2 kg + 8 kg
11 kg	1 kg + 2 kg + 8 kg
12 kg	4 kg + 8 kg
13 kg	1 kg + 4 kg + 8 kg
14 kg	2 kg + 4 kg + 8 kg
15 kg	1 kg + 2 kg + 4 kg + 8 kg
16 kg	16 kg
17 kg	1 kg + 16 kg
18 kg	2 kg + 16 kg
19 kg	1 kg + 2 kg + 16 kg
20 kg	4 kg + 16 kg
21 kg	1 kg + 4 kg + 16 kg
22 kg	2 kg + 4 kg + 16 kg
23 kg	1 kg + 2 kg + 4 kg + 16 kg
24 kg	8 kg + 16 kg
25 kg	1 kg + 8 kg + 16 kg
26 kg	2 kg + 8 kg + 16 kg
27 kg	1 kg + 2 kg + 8 kg + 16 kg
28 kg	4 kg + 8 kg + 16 kg
29 kg	1 kg + 4 kg + 8 kg + 16 kg
30 kg	2 kg + 4 kg + 8 kg + 16 kg
31 kg	1 kg + 2 kg + 4 kg + 8 kg + 16 kg

Tabela 2. Massas existentes: 1kg. 2kg. 4kg. 8kg. 16kg.

Possível exploração em sala de aula

Face ao diálogo anterior seria interessante que os alunos começassem por recontar este mesmo diálogo com a intenção de evidenciarem compreensão acerca das pesagens e das respectivas grandezas envolvidas. Fazendo-o, de facto, com compreensão estar-se-á a preparar o terreno para que a tabela requerida possa ser facilmente construída. Eis um possível exemplo representado na Tabela 1.

Se os alunos já tiverem identificado que cada nova massa representa o dobro da massa adquirida imediatamente antes, é expectável que a seguir sugiram a aquisição da massa de dezasseis quilogramas, permitindo a realização das pesagens apresentadas na Tabela 2.

Caso as massas adquiridas ainda não tenham sido associadas ao tema das potências de base dois, poderá agora fazer-se essa conexão, evidenciando-se que *qualquer número inteiro*, neste caso até ao trinta e um, inclusive, *pode ser obtido por uma ou pela soma de várias potências de base dois*, que mais não são do que os valores das massas encomendadas.

Tirando-se partido da conclusão anterior, será interessante confrontar os alunos com o muito conhecido jogo dos cinco cartões numéricos (figura 1).

O objectivo da utilização destes cartões é desafiar os alunos a pensarem num número inteiro até ao trinta e um, inclusive, e revelar apenas a letra ou letras do cartão ou cartões onde esse número secreto se encontra. O professor apenas terá que saber que cada cartão está associado a uma potência de base dois (1, 2, 4, 8 ou 16). Para mais facilmente adivinhar o número pensado pelo aluno, sugere-se que a escrita destes cinco números ocorra sempre na mesma posição em cada cartão. A título de exemplo, se um determinado aluno disser que o seu número secreto se encontra apenas nos cartões A, D e E, facilmente se descobre que se trata do número vinte e cinco. De facto, o vinte e cinco pode ser obtido através da soma destas três potências de base dois, como se havia verificado no jogo das pesagens: 25 = 1 + 8 + 16, isto é: $25 = 2^0 + 2^3 + 2^4$. Ora, estes valores são, respectivamente, os que identificam os cartões A, D e E.

Após a exploração de vários exemplos será interessante reflectir-se acerca da conexão existente entre este jogo de cartões e o jogo das pesagens. De facto, no cartão da primeira potência de base dois, os números aí registados são todos aqueles que no jogo das pesagens necessitavam da utilização da massa de um quilograma. O mesmo se passa em relação aos restantes cartões, isto é, em relação às próximas quatro potências de base dois.

Reforçando a atenção nos números envolvidos em cada cartão, seria interessante que os alunos pudessem estabelecer novas conexões matemáticas. Assim, ao nível do cartão A — de valor 1, isto é: 2^0, os dezasseis números aí existentes são os primeiros dezasseis números ímpares. Colocando-os numa determinada disposição, verifica-se o seguinte padrão referenciado:

1 5 9 13 17 21 25 29

↓↗↓↗↓↗↓↗↓↗↓↗↓↗↓

3 7 11 15 19 23 27 31

No que respeita ao cartão B – de valor 2, isto é: 2^1, os dezasseis números aí existentes são os seguintes: 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31. Relativamente à sequência numérica do cartão anterior, os números existen-

7	15	11	29	31
25				3
5		A		27
17				23
9	19	1	21	13

19	23	26	31	27
10				30
22		B		6
7				15
3	14	2	11	18

7	21	12	30	31
20				29
13		C		23
6				15
28	14	4	5	22

31	15	9	14	29
11				26
24		D		13
30				10
12	28	8	25	27

22	27	17	18	25
20				31
23		E		29
24				21
26	28	16	30	19

Figura 1.

tes nas posições pares mantêm-se. Apenas se alteram os números existentes nas posições ímpares desta nova sequência. Colocando-os numa disposição semelhante à do cartão A, verifica-se, realmente, que a linha inferior se mantém. Já os números da linha superior aumentam todos um valor relativamente aos respectivos números dessa mesma linha do cartão A. Por isso, os valores desta linha passaram todos a ser pares, mantendo-se a outra linha com os respectivos sucessores, isto é, formada por números ímpares. Além disto, analisando os números de cada linha, encontra-se uma nova regularidade, que é o facto desses números irem aumentando de quatro em quatro:

2 6 10 14 18 22 26 30
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
3 7 11 15 19 23 27 31

Já ao nível do cartão C — de valor 4, isto é: 2^2, os dezasseis números aí existentes são os seguintes: 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31. Relativamente à sequência numérica do cartão B, mantêm-se sempre os últimos dois números de cada conjunto de quatro. Colocando-os numa disposição semelhante às dos cartões A e B, verifica-se uma nova regularidade, pois aparecem quatro conjuntos formados por quatro números consecutivos. Além deste aspecto, o número que inicia um novo conjunto é sempre maior, em oito unidades, do que o número que inicia o conjunto anterior:

4 6   12 14   20 22   28 30
↓↗↓   ↓↗↓   ↓↗↓   ↓↗↓
5 7   13 15   21 23   29 31

Uma vez mais, a linha superior é formada exclusivamente por números pares e a inferior por números ímpares.

No que concerne ao cartão D — de valor 8, isto é: 2^3, os dezasseis números aí existentes são os seguintes: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31. Relativamente à sequência numérica do cartão C, mantêm-se sempre os últimos quatro números de cada conjunto de oito. Colocando-os numa disposição semelhante às dos cartões A, B e C, verifica-se uma nova regularidade, pois aparecem dois conjuntos formados por oito números consecutivos. Uma vez mais, a linha superior é formada exclusivamente por números pares e a inferior por números ímpares:

8 10 12 14   24 26 28 30
↓↗↓↗↓↗↓   ↓↗↓↗↓↗↓
9 11 13 15   25 27 29 31

Por último, ao nível do cartão E — de valor 16, isto é: 2^4, os dezasseis números aí existentes são os seguintes: 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31. Relativamente à sequência numérica do cartão D, mantêm-se apenas os últimos oito números. Colocando-os numa disposição semelhante às dos cartões anteriores, verifica-se uma nova regularidade, pois aparece um único conjunto formado por dezasseis números consecutivos. Novamente a linha superior é formada exclusivamente por números pares e a inferior por números ímpares:

16 18 20 22 24 26 28 30
↓↗↓↗↓↗↓↗↓↗↓↗↓↗↓
17 19 21 23 25 27 29 31

B — As potências de base 2 envolvidas no algoritmo da multiplicação egípcia:

"Ricardo: — Joana, de facto, isto das potências de base dois é mesmo fascinante! Nunca pensei que este tema se relacionasse com o simples gesto de pesar batatas!

Joana: — Pois é, e faz-me lembrar, também, o algoritmo da multiplicação egípcia!

Ricardo: — Como assim?!

Joana: — Repara... sabemos que o produto de sete por quatro é vinte e oito, não é? E o que é esse vinte e oito? Não é mais do que o dobro do dobro de sete.

Ricardo: — E é isso dos dobros sucessivos que nos remete para as potências de base dois, não é?

Joana: — Claro. Repara na seguinte multiplicação: 15×12. Ora decompondo o 12 em $4 + 8$, fica: $15 \times (4 + 8)$. Tendo em conta a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, fica: $15 \times 4 + 15 \times 8$. Fazendo agora por partes, 15×4 não é mais do que o dobro do dobro de 15, que é igual a 60. Por sua vez, 15×8 não é mais do que o dobro do dobro do dobro de 15, que é igual a 120. Adicionando os dois valores dá 180.

Ricardo: — E no caso de ser 15×13?

Joana: — Vou responder a esta tua questão, recorrendo exclusivamente às potências da base dois.

Ricardo: — Ok, explica lá como funciona esse tal algoritmo da multiplicação egípcia!"

Possível exploração em sala de aula

O diálogo anterior pode remeter os alunos para uma resolução do tipo: $15 \times 13 = 15 \times (4 + 8 + 1)$, isto é,

$$15 \times 4 + 15 \times 8 + 15 \times 1.$$

Logo estar-se-ia a entrar no tema pretendido, pois a expressão anterior é equivalente a esta outra:

$$15 \times 2^2 + 15 \times 2^3 + 15 \times 2^0,$$

o que daria como resultado o valor 195. Para se introduzir o algoritmo da multiplicação egípcia, basta ter-se em consideração que há que se decompor o factor 13 na soma dessas três potências de base dois: $13 = 2^0 + 2^2 + 2^3$.

Construindo o algoritmo, e tendo em conta que a antiga civilização egípcia não conhecia o conceito de potência, mas sim a ideia de que multiplicar um número por outro implicava o conceito do "dobro do dobro... de...", o mesmo apresentava a seguinte formalização:

15	× 13
15	1
30	2
60	4
120	8

Por baixo do factor 13, jogando-se com o conceito do "dobro do dobro... de..." consegue-se obter esse mesmo valor pela adição de alguns dos elementos dessa coluna (1 + 4 + 8), pelo que o algoritmo termina aqui. Logo, para se saber o resultado desta multiplicação só é necessário adicionar os respectivos números da coluna da esquerda associados a esses três valores (15 + 60 + 120), que são os resultados de $15 \times 1 + 15 \times 4 + 15 \times 8$, originando o valor esperado 195, isto é, o resultado de 15×13.

De facto, analisando-se agora os valores existentes por baixo do factor da direita, estamos perante a sequência das potências de base dois.

Vejamos este algoritmo aplicado a uma nova situação: 27×23:

27	× 23
27	1
54	2
108	4
216	8
432	16

Neste caso o valor 23 obtém-se pela adição dos valores 1, 2, 4 e 16. De facto, multiplicar 27 por 23 implica multiplicar 27 por (1 + 2 + 4 + 16). Logo, para se saber o resultado desta multiplicação só é necessário adicionar-se os respectivos números associados a estes quatro valores, que foram multiplicados pelo 27: (27 + 54 + 108 + 432), originando o valor 621.

Trata-se, pois, de um algoritmo conectado com o tema das potências de base dois, pois os valores a colocar por baixo do primeiro factor não são mais do que o produto de cada potência de base dois pelo outro factor.

Conclusão

Este texto mais não pretende ser do que um simples exemplo de como a Matemática pode ser desenvolvida pelos alunos num contexto desafiante de ludicidade e de interligação de conceitos, sejam estes de natureza numérica ou geométrica. Numa abordagem deste tipo, os alunos não ficarão com a ideia de que a Matemática é uma ciência estática, formada por conceitos espartilhados, sem ligação ao real ou sem conexão entre si.

A partir deste exemplo outros poderiam seguir-se-lhe, como seja a exploração do triângulo de Pascal, pois a soma dos valores numéricos de cada linha do triângulo coincide com uma das potências de base dois. Além disto, poder-se-iam explorar os múltiplos conceitos matemáticos que esse triângulo proporciona, sejam eles os números figurados, números naturais, etc.

Creio, pois, que um ensino-aprendizagem da Matemática alicerçado em múltiplas conexões matemáticas poderá aumentar o gosto dos alunos para esta disciplina. Um forte contributo para que isso ocorra mais sistematicamente pode advir do facto de se proporcionarem aos alunos ambientes de aprendizagem lúdicos, com actividades desafiantes e exequíveis tendo em conta os seus conhecimentos, e onde a resolução de problemas e as tarefas de investigação marquem, necessariamente, presença.

Bibliografia de suporte às ideias veiculadas no texto

Afonso, P. (2004). *Ensino e Aprendizagem da Matemática — em Ambiente de e-learning*. Coimbra/Castelo Branco: Alma Azul.

Afonso, P. (2006). A Magia das Conexões Matemáticas. *Educação e Matemática*, n° 90, Novembro/Dezembro, 35–38.

Afonso, P. e Gabriel, M. (2007). Investigações Matemáticas envolvendo alunos do 1° Ciclo do Ensino Básico. *LIBEC Line – Revista em Literacia e Bem-Estar da Criança*, 1, 23–30. www.libecline.pt.tp.

Balbuena, L. e Coba, M. (1992). *La Matemática Recreativa vista por los alumnos*. Granada: Proyecto Sur.

Holt, M. (1986). *Matemáticas recreativas 2*. Barcelona: Ediciones Martínez.

House, P. e Coxford, A. (1995). *Connecting Mathematics across the Curriculum*. Reston: National Council Of Teacher of Mathematics.

Lewis, B. (1983). *Matemáticas modernas. Aspectos recreativos*. Madrid: Alhambra.

Pareleman, Y. (1979). *Matemáticas Recreativas*. Lisboa: Litexa.

Tahan, M. (2003). *Matemática Divertida e Curiosa*. Rio de Janeiro: Record, 19ª Ed.

Paulo Afonso
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Castelo Branco