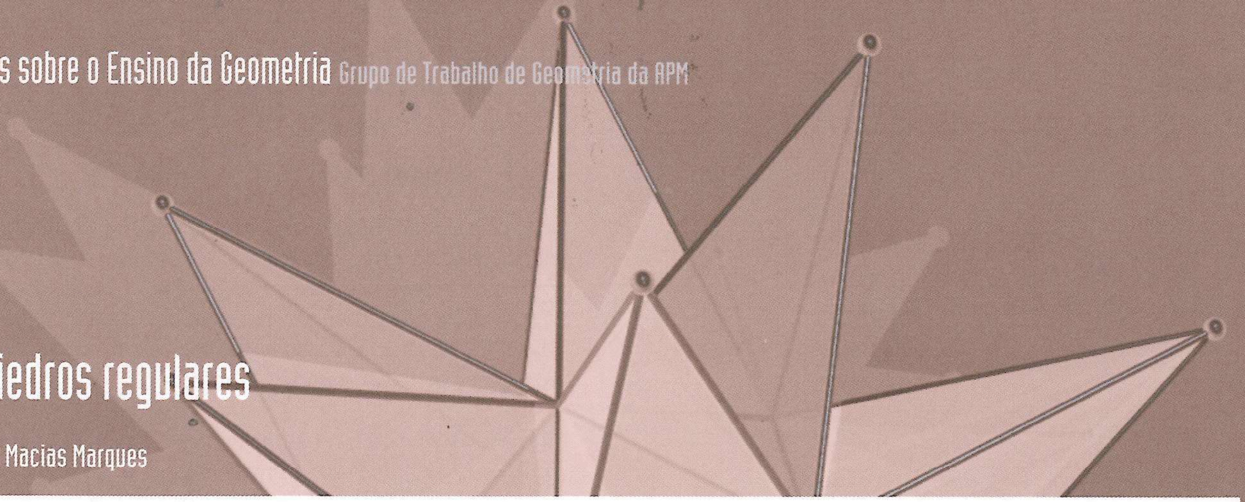


# Poliedros regulares

Pedro Macias Marques

A nota publicada na última revista foi um grito contra a pobreza do elenco de objectos utilizados no ensino da geometria. Temos debatido isto nas reuniões do GTG e pretendemos publicar algumas notas sobre objectos que não costumam ser estudados, para aguçar a curiosidade dos professores, na esperança de que alguns deles venham a ser trabalhados nas aulas. Esta é a primeira.

Já aqui foram discutidas, em vários artigos, as definições em geometria. A importância de sabermos com quais trabalhamos quando estamos a tratar determinado assunto, as diferentes formas de as abordarmos no ensino, os excessos cometidos quando queremos que os alunos as saibam de forma enciclopédica. Nas notas sobre o ensino da geometria da revista n.º 90, Eduardo Veloso discutiu possíveis definições para polígono e a possibilidade de usarmos mais do que uma, conforme queremos trabalhar com uns objectos ou com outros. Deu como exemplo disto uma passagem da página 1 do livro de Coxeter *Regular polytopes* [Cox73] (tradução livre do inglês):

Definimos polígono [plano] de $n$ lados como uma cadeia de $n$ segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$, unindo pares consecutivos de pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Os segmentos e pontos dizem-se lados e vértices do polígono. Até ao início do capítulo VI, insistiremos que os lados não adjacentes não se intersectem.

No mesmo livro, na página 4, Coxeter apresenta uma definição análoga para poliedro (também tradução livre):

Um poliedro pode ser definido como um conjunto finito e conexo de polígonos planos tal que cada lado de cada polígono é comum a outro polígono, e a mais nenhum, de tal forma que os polígonos que estão à volta de um mesmo vértice formam um único circuito. Os polígonos são chamados faces e os seus lados são as arestas do poliedro. Até ao capítulo VI, insistiremos que as faces não se intersectem [para além das intersecções que têm lugar nas arestas de faces adjacentes].

Aceitando estas duas definições, tratamos a regularidade tanto de polígonos como de poliedros como estamos mais habituados. Um polígono regular é um polígono com lados iguais e ângulos iguais, um poliedro é regular se as suas faces são regulares e todas iguais e os seus vértices são congruentes. Assim, os polígonos regulares são o triângulo equilátero, o quadrado, o pentágono regular, etc. Os poliedros regulares são os sólidos platónicos: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro (figura 1).

## Polígonos e poliedros estrelados

Podemos tornar tudo mais interessante se saltarmos para o capítulo VI do livro do Coxeter, e admitirmos que tanto os lados dos polígonos como as faces dos poliedros se intersectem sem restrições. Comecemos por perceber o que isto faz aos polígonos. Consideremos como exemplo o pentagrama da figura 2.

Nesta figura, temos uma sequência de cinco segmentos de recta $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5$ e $A_5A_1$, unindo os pontos $A_1, A_2, A_3, A_4$, e $A_5$, por esta ordem. Segundo esta nova definição, estamos perante um polígono. Os seus lados intersectam-se noutros pontos, que não são vértices. Repa-

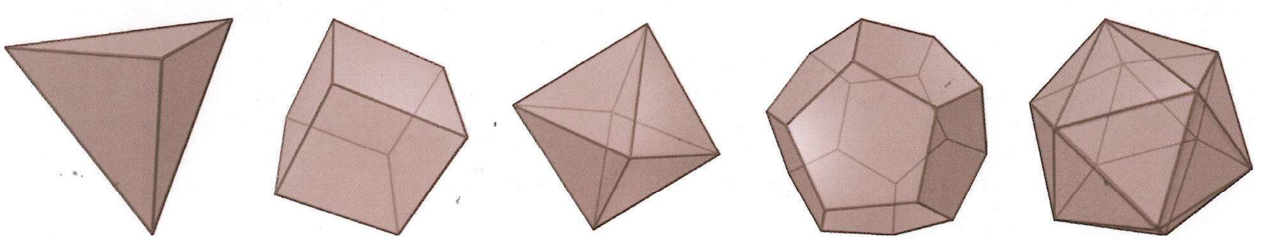


Figura 1.

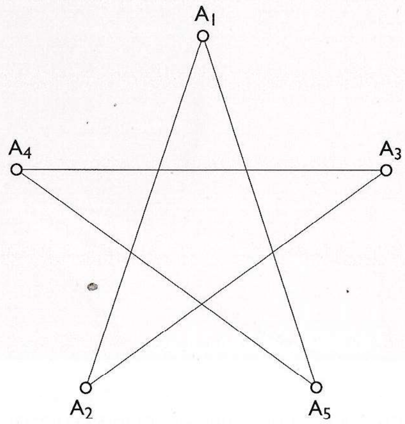



Figura 2

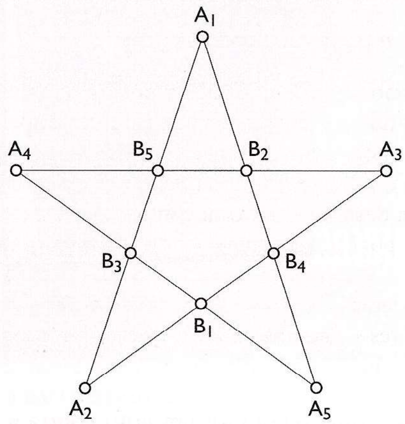



Figura 3

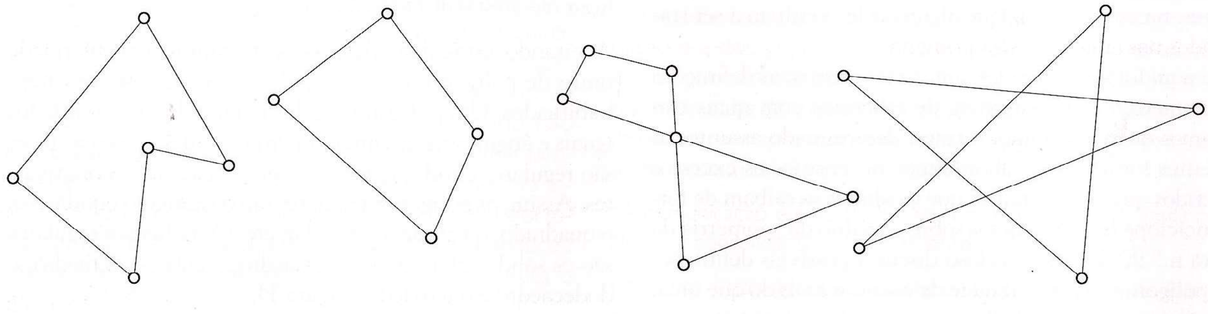


Figura 4.

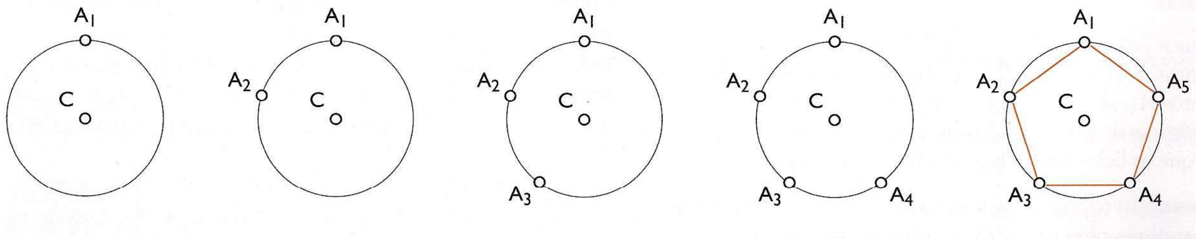



Figura 5.

remos que a figura 3 não é um polígono, se insistirmos em considerar os pontos $B_1, B_2, B_3, B_4$, e $B_5$, como vértices, nem à luz desta nova definição. Isto porque não conseguimos ordenar os segmentos que aqui estamos a considerar de forma a que eles unam todos estes dez pontos de forma consecutiva. Basta ver que a definição de polígono que estamos a adoptar obriga a que o número de lados seja igual ao número de vértices (figura 4).

Neste contexto continua a fazer sentido falar de regularidade. Mas como estamos a admitir que mais figuras sejam polígonos (por estarmos a utilizar uma definição mais geral, mais "permissiva"), será natural esperarmos encontrar mais polígonos regulares. O pentagrama que vimos acima é disto um exemplo. É o que chamamos um polígono regular estrelado. Para percebermos do que estamos a falar, reparemos que o pentágono regular se pode construir tomando um ponto fixo $C$ e considerando rotações sucessivas de $72°$ (um quinto de volta) de um ponto $A_1$ em torno de $C$ (figura 5).

Se fizermos o mesmo com rotações de $144°$, obtemos o pentagrama. Como $144°$ equivale a dois quintos de volta, o que acontece é que damos duas voltas a $C$ para chegar de novo ao ponto inicial. Em geral, podemos considerar fracções de volta da forma

$$\frac{d}{n} \cdot 360^\circ \text{ ($d$ e $n$ positivos e primos entre si),}$$

para obtermos polígonos regulares. O polígono obtido tem $n$ lados e é obtido dando $d$ voltas em torno de $C$. Quando $d > 1$, chamamos-lhe polígono regular estrelado (figura 6).

Numa futura nota, poderemos tentar perceber qual é a região interior de um destes polígonos e como se pode calcular a sua área, mas por ora, deixamos isso e passemos aos poliedros.

Voltando a considerar o pentagrama, podemos construir dois poliedros regulares juntando convenientemente doze pentagramas iguais. Se juntarmos cinco em cada vértice, obtemos o pequeno dodecaedro estrelado; se juntarmos três em cada vértice, obtemos o grande dodecaedro estrelado (figura 7).

Vejamos porque é que são regulares. As suas faces são todas iguais e são poliedros regulares (à luz desta definição mais abrangente). Os seus vértices são congruentes, em todos se encontram *de igual forma* — isto é, formando ângulos sólidos congruentes — um mesmo número (cinco ou três) de pentagramas iguais.

É preciso ter muito cuidado ao olhar para estas figuras: no caso da primeira, dependendo da forma como a interpretamos, podemos estar a olhar para o pequeno dodecaedro estrelado ou para outra figura, que também é um poliedro, mas já não é regular. Isto é, se em vez de considerarmos como faces os pentagramas, considerarmos apenas os triângulos isósceles que compõem as "pontas" das estrelas, estamos a olhar para um poliedro (com muito mais vértices) cujas faces já não são polígonos regulares, e cujos vértices já não são congruentes (há vértices de dois "tipos").

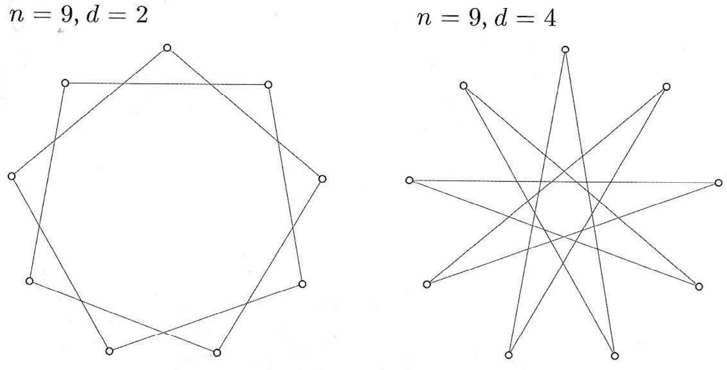


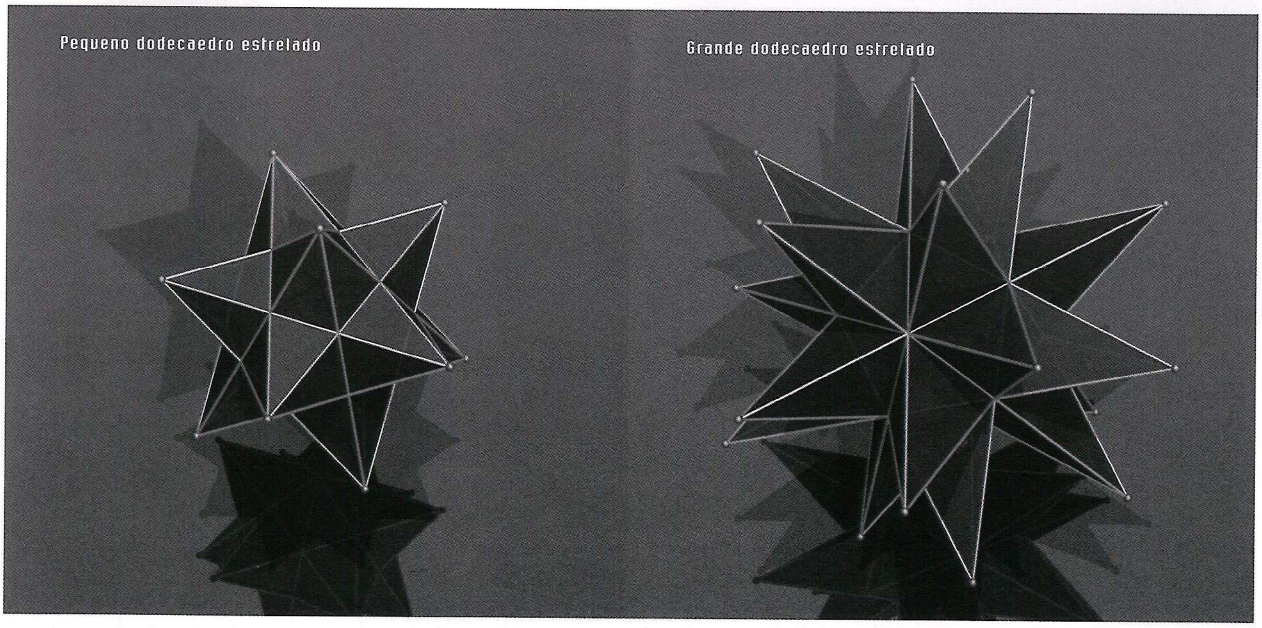

Figura 6.

Se quisermos fazer um bom exercício de visualização no espaço, podemos tentar imaginar duas maneiras (não muito diferentes) de obter este sólido. Ambas partem do dodecaedro. Para a primeira, podemos observar que um pentagrama pode ser obtido a partir de um pentágono regular se prolongarmos os seus lados (figura 8).

Ora se fizermos isto às faces do dodecaedro, os pentagramas resultantes formam um pequeno dodecaedro estrelado. A segunda é imaginar que "colamos" pirâmides pentagonais (adequadas) às faces do dodecaedro.

Uma terceira forma de o obter, bastante mais difícil de imaginar e também mais interessante, é partir do icosaedro, esquecer as suas arestas e considerar as diagonais não maximais. Isto é, considerar os segmentos de recta que unem vértices não opostos nem adjacentes.

Figura 7.



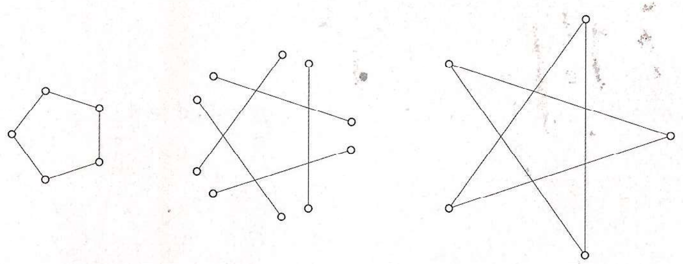


Figura 8.

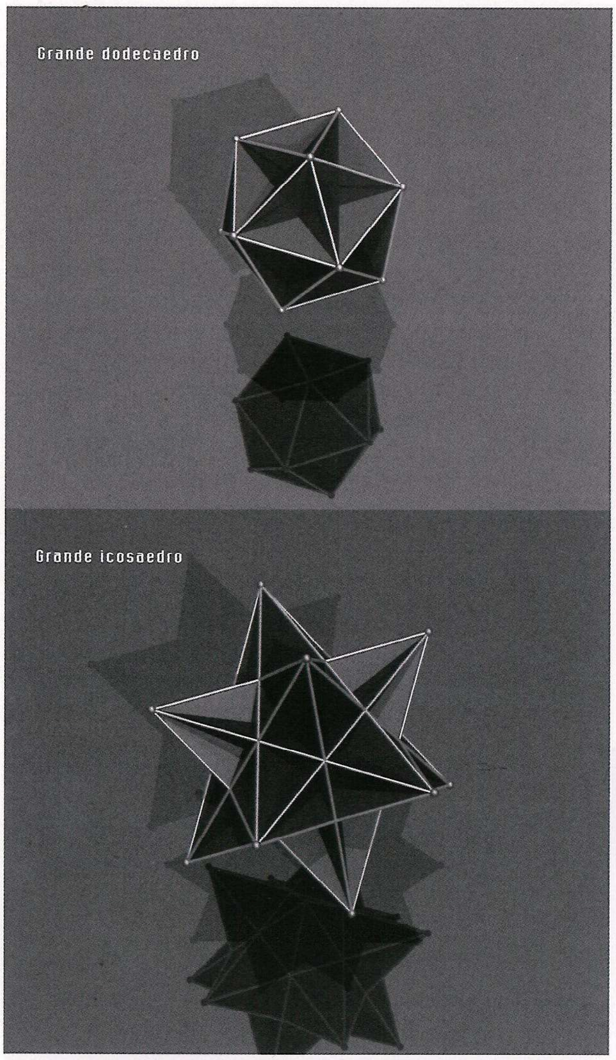



Figura 9.

Tarefa bastante mais simples é a sua construção a partir de uma planificação. Na página do GTG (que pode ser consultada a partir da página da APM, `http://www.apm.pt/`), na secção dedicada a estas notas, pode ser consultada uma planificação deste sólido, pronta para uma boa meia hora de tesoura e cola.

Podemos obter mais poliedros regulares. Se considerarmos doze pentágonos regulares iguais e "juntarmo-los" de forma a que em cada vértice se encontrem cinco, obtemos o grande dodecaedro. Se considerarmos vinte triângulos equiláteros iguais, podemos colocá-los de forma a obter o grande icosaedro (figura 9).

A definição de poliedro que considerámos permite a existência destes quatro poliedros regulares estrelados, chamados poliedros de Kepler-Poinsot, porque os dois primeiros foram descobertos em 1864 por Kepler (1571–1630), e os dois últimos em 1809 por Poinsot (1777–1859). Mais tarde, em 1813, Cauchy (1789-1857) mostrou que, aceitando estas definições, os cinco sólidos platónicos e estes quatro estrelados formam todos os poliedros regulares possíveis.

## Bibliografia


[Cox73] H.S.M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Dover, 1973.

[Fie99] J.V. Field, *Johennes Kepler*, School of Mathemathics and Statistics, University of St Andrews, Scotland,
`http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Kepler.html`
[*online*, acesso em 14 de Março de 2008], 1999

[OR97] J.J. O'Connor e E.F. Robertson, *Augustin Louis Cauchy*, School of Mathemathics and Statistics, University of St Andrews, Scotland,
`http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Cauchy.html`
[*online*, acesso em 14 de Março de 2008], 1997

[OR00] J.J. O'Connor e E.F. Robertson, *Louis Poinsot*, School of Mathemathics and Statistics, University of St Andrews, Scotland,
`http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Poinsot.html`
[*online*, acesso em 14 de Março de 2008], 2000

[Vel98] Eduardo Veloso, *Geometria: temas actuais*, Instituto de Inovação Educacional, 1998.

[Wik08] Wikipedia, *Regular polyhedron — Wikipedia, The Free Encyclopedia*,
`http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Regular_polyhedron&oldid=198207185`,
[*online*, acesso em 14 de Março de 2008], 2008.

[Wik08] Wikipedia, *Kepler-Poinsot polyhedron — Wikipedia, The Free Encyclopedia*,
`http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kepler-Poinsot_polyhedron&oldid=188763815`
[*online*, acesso em 14 de Março de 2008], 2008.


*Nota:* as figuras dos quatro poliedros regulares estrelados foram obtidas na página

`http://en.wikipedia.org/wiki/Kepler-Poinsot_polyhedra`,

e foram criadas com o software Great Stella, de Robert Webb (`http://www.software3d.com/Stella.html`).

**Pedro Macias Marques**
**Grupo de Trabalho de Geometria da APM**