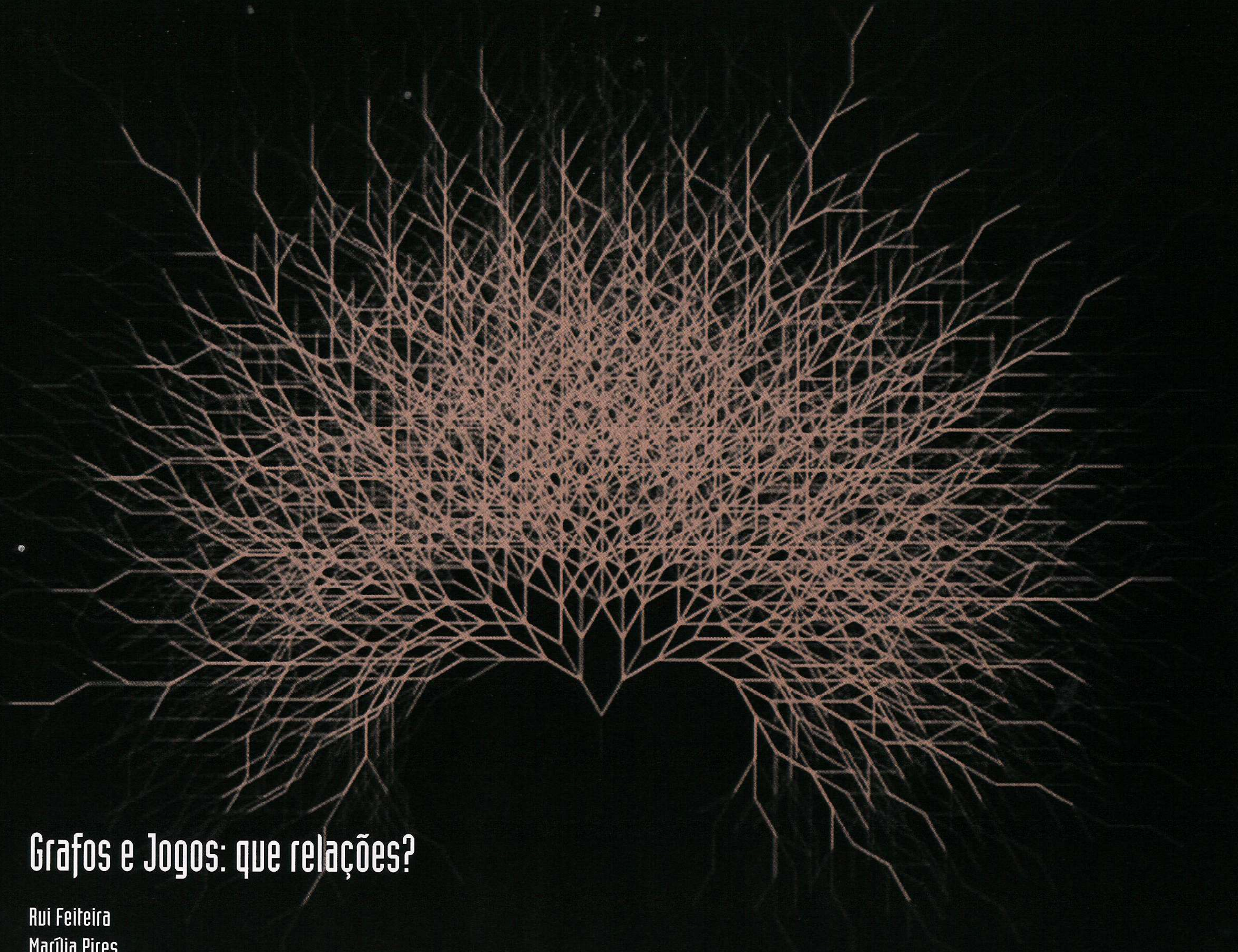

Grafos e Jogos: que relações?

Rui Feiteira
Marília Pires

Considerações iniciais

O Currículo Nacional do Ensino Básico de 2001 (CNEB) introduziu várias mudanças no ensino da Matemática neste nível de ensino. Destas, uma das mais importantes prende-se com o objectivo expresso de formar alunos matematicamente competentes. De acordo com o CNEB esta competência só pode ser atingida pondo os alunos em contacto com experiências matematicamente ricas. Exemplos destas experiências são actividades de investigação, resolução de problemas, realização de projectos e implementação de jogos. É precisamente nesta última vertente que iremos centrar a nossa atenção. Ao longo deste artigo, pretendemos apresentar um conjunto de jogos que permitem desenvolver alguns dos conceitos básicos ligados à teoria de grafos.

Foi recentemente publicado o Reajustamento dos programas de Matemática do Ensino Básico, em vigor desde 1991. Pena é que neste reajustamento não tenha sido dada ênfase à importância que jogos, criteriosamente seleccionados, podem ter na aprendizagem do aluno.

Os jogos no Currículo Nacional

Segundo o CNEB os jogos representam um veículo privilegiado de desenvolvimento do raciocínio, da reflexão e da estratégia, ajudando ainda a potenciar o trabalho cooperativo. No referido documento pode-se ler:

"A prática de jogos, em particular os jogos de estratégia, de observação e memorização, contribui de forma articulada para o desenvolvimento de capacidades matemáticas e para o desenvolvimento pessoal e social." (CNEB, 2001, p. 68)

A teoria de grafos oferece inúmeras oportunidades de apresentar aos alunos vários tipos de jogos que desenvolvem as

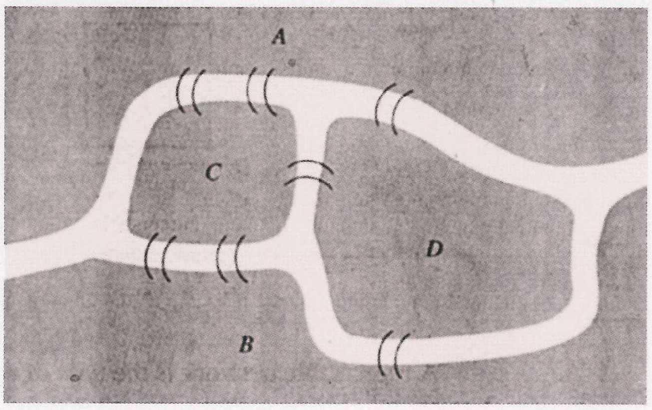

Figura 1. As sete pontes de Königsberg.

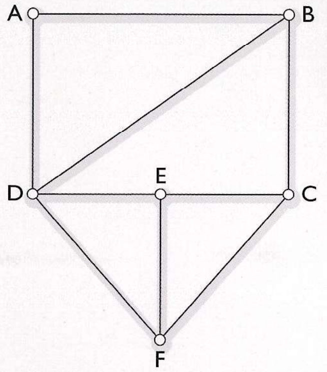

Figura 2.

capacidades de reflexão e estratégia. Uma vantagem da utilização de grafos prende-se com o facto de não ser necessário que os alunos tenham um conhecimento sólido e sistemático sobre grafos. Através de jogos que assentem em grafos os alunos podem simultaneamente apropriar-se, de modo informal, de alguns dos conceitos básicos de grafos e confrontar-se com um campo diferente e bastante actual da Matemática. Os próprios algoritmos utilizados na teoria de grafos, como por exemplo a determinação do caminho mais curto, a resolução do problema do carteiro chinês ou do problema do caixeiro-viajante assim como a obtenção de árvores de suporte mínimas podem, numa abordagem informal, ser encarados como um jogo com regras estipuladas. Segundo Hart (1992) a inclusão do estudo de grafos na Matemática escolar, propicia a utilização de uma Matemática pedagogicamente forte, que fornece hábitos matemáticos para o desenvolvimento do trabalho dentro da sala de aula. A modelação de situações da vida real, sem que haja necessidade de proceder a simplificações que fazem com que a realidade se perca, dá origem a problemas que se podem resolver com o auxílio de algoritmos muito intuitivos e fáceis de utilizar (pelo menos a um nível elementar). Segundo este autor, o mais importante é mostrar aos alunos uma Matemática activa e viva. O estudo de tópicos de teoria de grafos poderá assim contribuir para que os alunos vejam de modo imediato a Matemática como uma disciplina útil, moderna e com muitas aplicações na sociedade. Esta área permite ainda esquematizar e representar graficamente muitas situações distintas, contribuindo para mostrar a Matemática como uma ferramenta, extremamente útil no apoio a tomadas de decisão por parte das empresas, ou seja, a análise das situações que os grafos modelam pode ajudar a estimular e a desenvolver a criatividade nos alunos (Feiteira, 2007).

Algumas noções básicas

Em 1736, quando Euler resolveu a conhecida questão das pontes de Königsberg (figura 1), certamente não imaginava que estivesse a fundar um novo campo da matemática que viria a ser tão preponderante no estudo, funcionamento e desenvolvimento da sociedade. Das inúmeras áreas onde podemos encontrar a teoria de grafos destacamos as redes de transporte e comunicações e as relações internacionais. Já todos viram certamente um esquema da rede do metro de Lisboa ou Porto. Esquemas semelhantes encontram-se afixados nas paredes de todas as estações de metro do mundo e destinam-se a facilitar as deslocações dos passageiros, que assim podem planear as suas deslocações antes de entrar no comboio. Na realidade, estes esquemas não passam de grafos, em que as estações são os vértices e as linhas entre estações consecutivas as arestas. Com este exemplo, vários conceitos básicos de grafos, tais como vértice, aresta, caminho, circuito, conexidade, grau dos vértices ou árvore de suporte podem ser apresentados aos alunos de uma maneira informal.

Para melhor facilitar a leitura, nesta secção, iremos apresentar formalmente algumas das noções básicas que são necessárias para melhor perceber os jogos que propomos. É claro que, como muito bem diz o programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS), está fora de questão que esta abordagem formal seja apresentada aos alunos.

Um grafo é um par ordenado $G = (V, A)$ de conjuntos finitos, onde V é o conjunto de vértices e A é uma colecção de subconjuntos de dois elementos de V, a que se chama conjunto de arestas. Dois vértices dizem-se adjacentes se existe uma aresta que os ligue, ou seja se em A existe o conjunto cujos elementos são exactamente esses dois vértices. Uma aresta diz-se incidente aos dois vértices que une. Para ilustrar o que se disse atrás considere-se

$$V = \{A, B, C, D, E, F\} \text{ e}$$

$$A = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{E, C\}, \{E, D\}, \{D, A\}, \{D, B\}, \{E, F\}, \{D, C\}, \{F, C\}\}.$$

A figura 2 pode ser uma representação gráfica para $G = (V, A)$.

Um grafo diz-se conexo se existir sempre um caminho entre quaisquer dois vértices pertencentes ao grafo. O grau de um vértice v é igual ao número de arestas incidentes a esse mesmo vértice e denota-se por $gr(v)$. Por exemplo, no grafo da figura 2, $gr(B) = gr(C) = gr(E) = gr(F) = 3$, $gr(A) = 2$ e $gr(D) = 4$. Um caminho não é mais do que uma sequência de vértices adjacentes onde o vértice inicial pode ser diferente do vértice final. Caso o vértice inicial coincida com o final então temos um circuito. A sequência ABCEF é um ca-

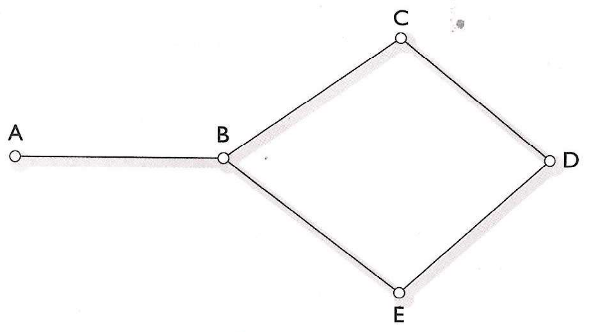

Figura 3.

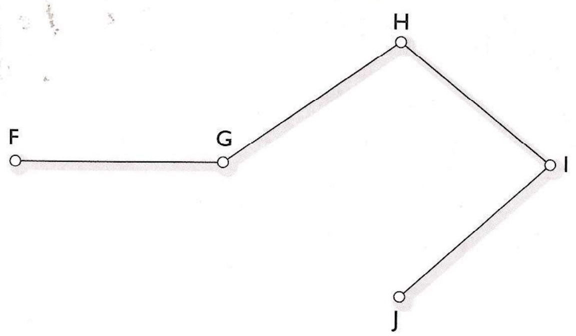

Figura 4.

minho enquanto a sequência ABDA representa um circuito. Uma árvore é um grafo conexo sem circuitos.

Por exemplo, o grafo da figura 3 não é uma árvore, visto conter um circuito. Facilmente se observa que se começarmos no vértice B e passarmos sucessivamente por E, D, C podemos voltar a B novamente. Já o grafo da figura 4 é uma árvore.

Gostaríamos de insistir na ideia que estes conceitos podem ser apresentados e desenvolvidos a partir de qualquer um dos jogos que apresentamos a seguir.

Jogo 1

O jogo que propomos de seguida pode apresentar-se de duas formas diferentes.

Na figura 5, em que os vértices já estão coloridos, os alunos devem unir os vértices de tal forma que vértices adjacentes deverão ter cores diferentes, ou dito de outra forma, dois vértices estão ligados se e só se tiverem cores diferentes.

1.ª versão: Nesta versão do jogo perde o primeiro jogador que não conseguir desenhar uma aresta (pode haver cruzamento de arestas, mas não arestas paralelas[1]). O professor deverá encorajar os seus alunos a encontrar uma estratégia que lhes permita vencer sempre. Se os alunos repetirem algumas vezes o jogo nas mesmas condições, a estratégia ganhadora não será difícil de encontrar. Como o primeiro conjunto tem 3 elementos e o segundo tem 4, isso quer dizer que de cada vértice do primeiro conjunto saem, no máximo, 4 arestas, uma para cada vértice do segundo conjunto. Então o grafo terá no máximo $3 \times 4 = 12$ arestas (número par), ganha o aluno que não iniciar o jogo. De facto, o segundo jogador irá colocar as arestas número 2, 4, 6, ..., 12, e portanto o jogador que iniciou o jogo perderá sempre que o número de arestas for par.

De notar que se o número máximo de arestas for ímpar, o que só acontece quando ambos os conjuntos tiverem um número ímpar de elementos, então quem ganha é quem começa.

Objectivos deste jogo: Tomar contacto com os grafos bipartidos[2] e bipartidos completos; Chegar à fórmula que permite determinar o número de arestas de um grafo bipartido completo; Estabelecer a estratégia ganhadora.

2.ª versão: Nesta versão não é permitido o cruzamento de arestas. Começamos com 2 vértices brancos e 3 castanhos, e depois passamos para 3 brancos e 3 castanhos. No primeiro caso, apesar da restrição de não poder haver cruzamentos de arestas, a estratégia ganhadora é a mesma do que na primeira versão. No segundo, caso o jogador que efectuar as jogadas ímpares não irá conseguir ligar os últimos dois vértices. De facto, as oito primeiras ligações são triviais e, suponhamos sem perda de generalidade, que o jogo está disposto como mostra a figura 6. Suponhamos então que os

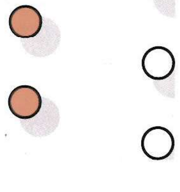

Figura 5.

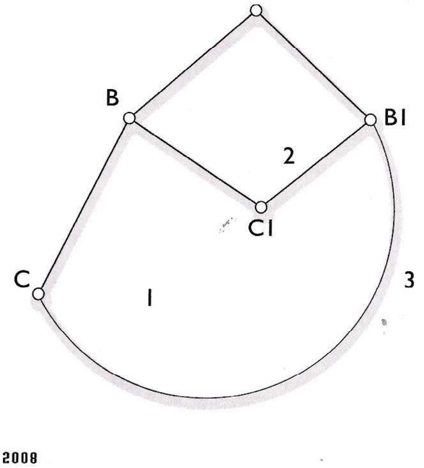

Figura 6.

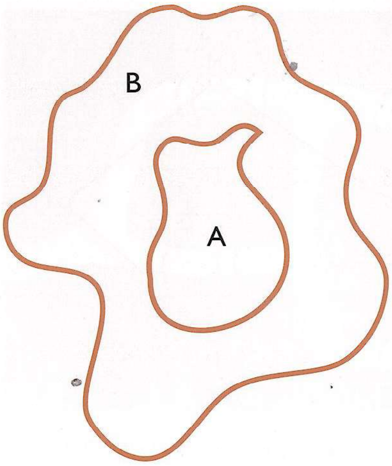

Figura 7. Adaptado de Benarroch, Moisés Coriat et al. (1989).

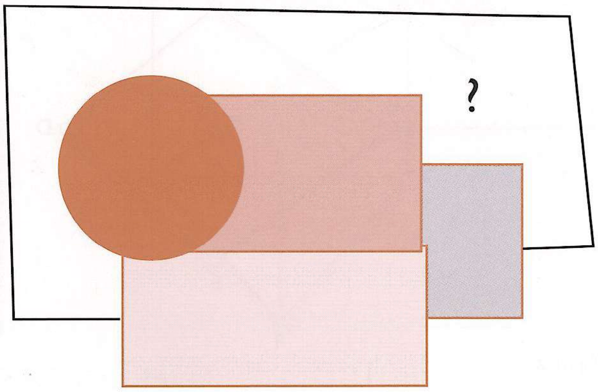

Figura 8.

vértices castanhos são representados por C, C1 e C2, enquanto que os brancos são representados por B, B1 e B2.

Se olharmos com atenção notamos que ainda falta colocar o vértice B2. Este vértice só pode ser colocado na região 1, 2, ou 3. Se colocarmos B2 na região 1 não conseguimos ligá-lo a C2. Se colocarmos B2 na região 2 não conseguimos ligá-lo a C. Finalmente se colocarmos B2 na região 3 não conseguimos ligá-lo a C1. e, portanto, não é possível fazer as nove ligações sem cruzamentos de arestas.

Objectivos do jogo: Fazer uma primeira aproximação aos grafos com e sem representação planar.

Jogo 2

Este jogo pode servir para dar a conhecer aos alunos o teorema das quatro cores. A propósito pode-se contar um pouco a história deste teorema. O facto de ter sido o primeiro teorema importante a ser demonstrado com recurso a meios computacionais, desperta sempre muito interesse por parte dos alunos.

Neste jogo intervêm apenas 2 jogadores, A e B, que dispõem de 4 cores diferentes e de uma folha em branco. O jogador A desenha uma região e o jogador B além de pintar aquela região desenha outra região adjacente à que pintou. De seguida, o jogador A pinta esta região com outra cor e desenha outra região adjacente. O jogo continua sempre desta forma. Perde o primeiro jogador que não conseguir colorir adequadamente a região proposta, por não ter mais nenhuma cor disponível. As regras do jogo são simples:

- se duas regiões têm apenas um ponto de contacto este não deve ser considerado como fronteira;
- regiões adjacentes devem ter cores diferentes;
- não é permitido desenhar uma região de tal forma que contenha totalmente uma outra região;
- não é permitido desenhar regiões que tenham apenas um ponto de contacto.

A figura 7 ilustra uma jogada considerada ilegal. A figura 8 ilustra uma sequência possível de jogadas.

Cada jogada deverá ser registada para facilitar a discussão posterior de cada um dos jogos. Depois de finalizar cada jogo os intervenientes deverão analisar o seu jogo e tentar perceber a razão pela qual o jogo terminou, mostrando qual o movimento que deveria ser feito para que o jogo não terminasse. No final de uma sequência de 3 ou 4 jogos os alunos já podem redigir um pequeno relatório onde, para além de descreverem o jogo, apresentem as suas conclusões para cada um dos jogos.

A título de curiosidade poderia colocar-se a seguinte questão: qual é o número mínimo de cores que se necessita para pintar um mapa plano? Depois de pintados alguns mapas, os alunos, devidamente orientados pelo professor, poderiam concluir que 4 cores chegam para pintar qualquer mapa plano. Esta conjectura poderia ser o ponto de partida para um trabalho de pesquisa histórica sobre o teorema das quatro cores. A este propósito pode-se dar como exemplo o teorema das 5 cores que foi formulado numa das tentativas frustradas de demonstração do teorema das 4 cores.

Objectivo do jogo: conjecturar que 4 cores são suficientes para colorir um mapa

Jogo 3

O cifrar e decifrar mensagens teve sempre um papel fundamental em qualquer conflito. Já os antigos romanos usavam a cifra de César para enviar mensagens para a frente de batalha. Os códigos de Huffman permitem muito facilmente cifrar e decifrar mensagens secretas. Este tipo de códigos trabalha apenas com os números 1 e 0, onde 1 significa "ir para a direita" e 0 significa "ir para a esquerda". Tendo transmitido esta informação, o professor começa por dividir a turma em grupos de três ou quatro alunos, e apresenta a árvore representada na figura 9 onde existe uma mensagem codificada.

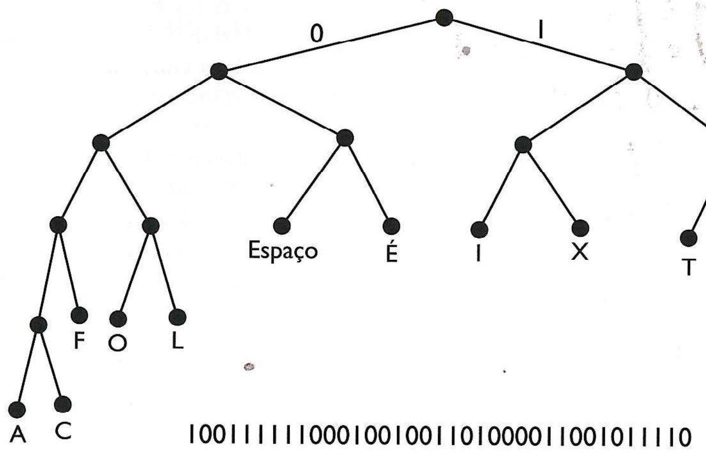

Figura 9.

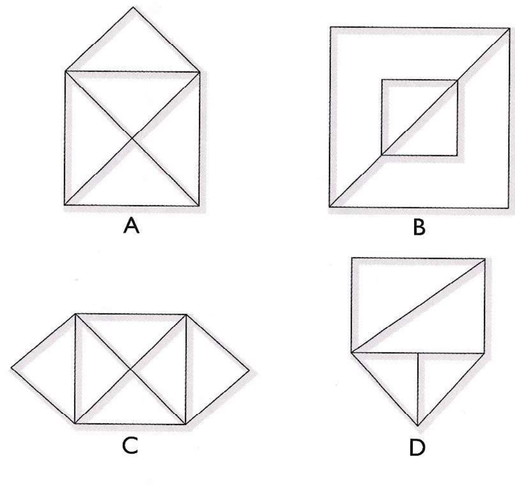

Figura 10.

O professor começa por explicar como decifrar a primeira palavra e os alunos ficariam responsáveis por decifrar o resto da mensagem. Como decifrar a primeira palavra? Comecemos por considerar os três primeiros dígitos da sequência que aparece no final da figura 9: 100. Um, zero, zero significa que começando no vértice inicial primeiro optamos pelo ramo da direita e, nos dois vértices seguintes optamos pelo vértice da esquerda, encontrando a letra I. Para descobrir as outras letras procede-se forma análoga considerando instruções com 3, 4 ou 5 dígitos. Uma vez descoberta a frase, o professor pode propor aos alunos que cada grupo codifique uma mensagem curta, usando a mesma árvore ou outra árvore qualquer. Claro que, para evitar mensagens menos próprias ou erros de codificação, o professor tem que activamente verificar o trabalho de cada grupo. Depois das mensagens codificadas e verificadas pelo professor, os grupos trocariam as mensagens entre si e cada grupo iria descodificar uma mensagem codificada por um outro qualquer grupo.

Objectivo do jogo: Trabalhar com árvores binárias; Reconhecer a utilidade das árvores binárias como esquemas de decisão.

Jogo 4

Desenhar cada uma das figuras seguintes sem levantar o lápis e sem passar por cima de segmentos já desenhados (figura 10).

Após algumas tentativas os alunos irão conseguir desenhar a figura C começando e terminando no mesmo vértice. Analisando a construção de cada uma das figuras os alunos poderão inferir que sempre que existir uma figura, em que todos os pontos possuem um número de ligações par, então consegue-se desenhar essa figura sem levantar o lápis (começando e terminando no mesmo vértice). Com ajuda do professor, e aproveitando a análise anterior, os alunos deverão inferir ainda que, caso um grafo tenha apenas 2 pontos que possuem um número ímpar de ligações, então é também é possível desenhar essa figura sem levantar o lápis, contudo o ponto onde se começa a desenhar a figura é diferente do ponto onde se acaba de desenhar, figuras A e B. Caso o número de pontos com grau ímpar, figura D, seja superior a 2 então não conseguiremos desenhar a figura nas condições impostas.

Na descrição deste jogo optámos por manter uma linguagem bastante informal sem incluirmos os termos de grafos, vértice, grau de um vértice e arestas. Contudo, defendemos que, caso se opte por trabalhar estes tópicos ao longo da escolaridade básica, poder-se-ia paulatinamente ir introduzindo estes conceitos.

Depois de trabalhada esta questão e introduzidos os conceitos referidos, poder-se-ia propor, em jeito de desafio, as seguintes questões:

Será possível desenhar um grafo tal que os graus dos seus vértices valem:

a) 4, 4, 3, 2, 1?

b) 3, 2, 3, 1?

Depois de resolvida esta questão poderá conduzir-se os alunos para o facto curioso que, num grafo, a soma dos graus dos vértices é sempre par.

Objectivo: Introduzir informalmente os conceitos de circuitos e caminhos eulerianos; Conjecturar as condições necessárias para existir um circuito de Euler e para existir um caminho de Euler.

Jogo 5

O jogo, para dois jogadores, inicia-se com um certo número de pontos (vértices) e as jogadas reduzem-se à ligação (arestas) destes pontos e à colocação de um novo ponto na nova aresta, tendo em atenção que cada vértice terá no máximo grau 3 e que as arestas não se podem cruzar. O vencedor é aquele jogador que conseguir ligar a última aresta.

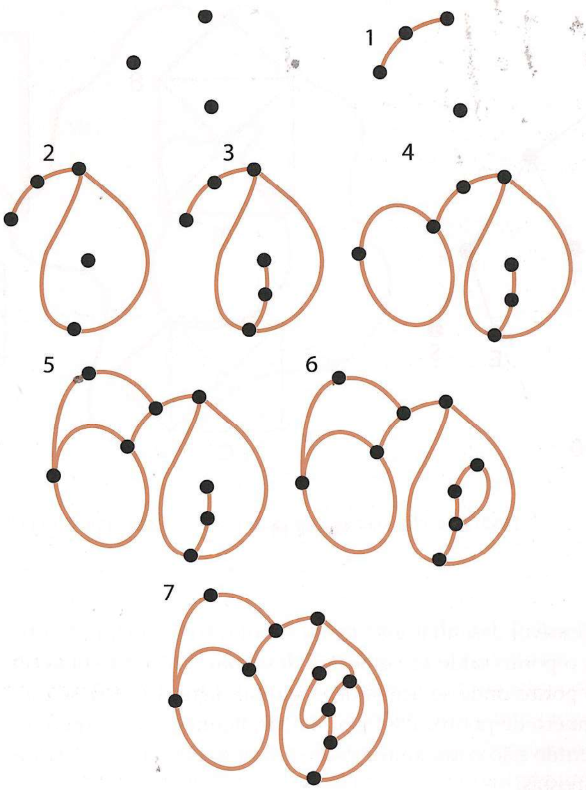

Figura 11.

À primeira vista pode parecer que este jogo se prolongará indefinidamente. Na verdade, consegue-se provar que, se o jogo começar com n vértices, este terminará no máximo ao fim de 3n − 1 jogadas. Segundo Peterson (1997), o primeiro jogador ganhará os jogos onde se comece com 3, 4 ou 5 vértices, enquanto o segundo jogador ganhará o jogo, se este começar com 1, 2 ou 6 vértices.

Objectivo do jogo: Estabelecer um primeiro contacto com grafos planares.

Considerações finais

Jogos do tipo dos que propusemos podem ser trabalhados entre conteúdos programáticos. A teoria de grafos, a um nível elementar, pode permitir que os alunos tenham boas experiências de aprendizagem, apresentando ainda a vantagem de poder ser um veículo de recuperação para aqueles alunos que tenham tido insucesso ao longo do seu percurso escolar e que por essa razão se tenham desmotivado. Por ser uma área rica em aplicações, que podem ir desde as Ciências Sociais à Matemática recreativa, coloca em evidência, de uma forma imediata, o papel e a importância da Matemática na nossa sociedade. Apresentámos apenas cinco jogos que podem ser modelados através de grafos, mas muitos outros se podem realizar dentro da sala de aula, como por exemplo, o problema do caixeiro-viajante ou o problema de construir um calendário de jogos de futebol com o número de equipas que desejarmos. Obviamente, sendo a teoria de grafos rica em problemas ou actividades que se podem desenvolver na sala de aula, existem muitas mais situações do que as aqui sugeridas. O único limite é o da nossa imaginação (Feiteira, 2007).

Notas

[1] Duas arestas dizem-se paralelas se unirem os mesmos vértices.

[1] Informalmente, um grafo designa-se por grafo bipartido se o conjunto dos vértices puder ser dividido em dois subconjuntos disjuntos, tais que não são permitidas arestas entre os vértices de um mesmo subconjunto, isto é, todas as arestas unem um vértice de um subconjunto com um vértice do outro subconjunto. Um grafo designa-se por bipartido completo se qualquer vértice de um dos subconjuntos de vértices for adjacente a todos os vértices do outro subconjunto.

Referências

Althoen, S., Brown, J., Bumcrot, R. (1991). Graph Chasing across the Curriculum: Paths, Circuits, and Applications, In Kenney, M., Hirsch, C., (eds), *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12*, p. 30–43. Virginia: NCTM.

Departamento do Ensino Básico, (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico — competências essenciais*. Disponível em

`http://www.dgidc.min-edu.pt/public/compessenc_pdfs/pt/LivroCompetenciasEssenciais.pdf`

Lima, E., (2004). *Matemática e Ensino*. Lisboa: Gradiva.

Hart, E. (1992), Discrete Mathematical Modelling in the Secondary Curriculum: Rationale and Examples from the Core-Plus Mathematics Project, In Rosenstein, J., Franzblau, D., Roberts, F., (eds), *Discrete Mathematics in the Schools*, p. 265–280, Virginia: AMS e NCTM.

Feiteira, R., (2007). *Grafos para todos — sobre o desenvolvimento da Teoria de Grafos no 3.º Ciclo do Ensino Básico* (Dissertação de Mestrado, Universidade do Algarve), Colecção de Teses, Lisboa: APM.

Peterson, I. (1997). *Sprouts for Spring*. Disponível em

`http://www.sciencenews.org/pages/sn_arc97/4_5_97/mathland.htm`

Rui Feiteira
Agrupamento Vertical de Escolas prof. José Buisel, Portimão

Marília Pires
Dep. de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Univ. do Algarve