Números incríveis

A Graça diz que arranjou dois números tais que: se os somar, se os multiplicar ou se dividir um pelo outro, os resultados são sempre iguais. Quais são esses números?

(Respostas até 31 de Dezembro)

Regresso às aulas

O problema proposto no número 94 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Na campanha de promoções do regresso às aulas, uma papelaria anunciava: "Um lápis, uma borracha e uma esferográfica, tudo por apenas 1 euro".

O Francisco reparou que:

— *Uma esferográfica é mais cara que dois lápis,*
— *três lápis custam mais que quatro borrachas,*
— *paga-se mais por três borrachas que por uma esferográfica.*

Quais são os preços de cada lápis, borracha e esferográfica?

O problema foi publicado com uma gralha: fatava o "que" na frase *três lápis custam mais que quatro borrachas*, o que dificultava a interpretação do enunciado. Mesmo assim, houve quem não se atrapalhasse e recebemos 12 respostas: Ana Machado (Guimarães), Ana Belisa Oliveira (Guimarães), Anabela Alves (Guimarães), Francisco Estorninho (Lisboa), Graça Braga da Cruz (Ovar), Iola Ribeiro e Isabel Trindade (Faro), João Costa (Guimarães), Luís Mota (Lisboa), Maria Silva (Guimarães), Patrícia Fernandes (Guimarães), Paula Gomes (Vieira do Minho) e Susana Antunes (Guimarães).

Se considerarmos os preços em cêntimos, trabalharemos apenas com números inteiros. Sejam: *L* o preço de um lápis, *B* o preço de uma borracha, *E* o preço de uma esferográfica.

As condições impostas são:

$L + B + E = 100$ (1)
$E > 2L$ (2)
$3L > 4B$ (3)
$3B > E$ (4)

A partir daqui, apareceram três processos de resolução:

— o velho método das aproximações por tentativa e erro,
— começar por relacionar as condições para enquadrar uma das variáveis e depois, se necessário, experimentar os poucos valores possíveis, ou
— eliminar uma das variáveis e resolver graficamente.

O primeiro método permite-nos, com algum trabalho, encontrar uma solução mas normalmente não nos garante que não existam mais soluções.

Pelo segundo método, associando as respostas da Iola e da Isabel e do Luís, vemos que: de (3) vem $B < (3/4)L$. De (3) e (4) vem $E < (9/4)L$. Substituindo estes resultados em (1) temos: $L + (3/4)L + (9/4)L > 100$ ou $L > 25$.

Como L é inteiro, vem $L \geq 26$. Então:

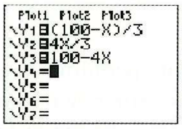
$$B<(3/4)L < (3 \times 26)/4 \leq 19{,}5.$$

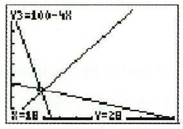
De (2) e (4) vem $L < (3/2)B$. Substituindo este resultado e (3) em (1): $(3/2)B + B + 3B > 100$ ou $B > (200/11) > 18{,}1$. Portanto, B tem de ser maior que 18,1 e menor que 19,5. Como é inteiro, só pode ser $B = 19$. Encontrado B, facilmente se chega a L e E.

O terceiro método foi usado pela Graça, pelo Francisco e pela Paula. Como diz a Ana Machado, é "necessário evidenciar uma das incógnitas" e eliminarmos outra.

Se resolvermos em ordem a L e em função de B, temos: de (1) e (2), $L < (100 - B)/3$. De (3), $L < (4/3)B$. De (1) e (4), $L > 100 - 4B$.

Agora é fácil se, por exemplo, usarmos a calculadora gráfica. Introduzimos as funções relacionadas com estas três inequações e, como L e B poderão estar entre 0 e 100, escolhemos uma janela com $X \in [0, 100]$ e $Y \in [0, 100]$.

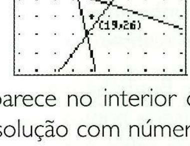




Fazendo TRACE vemos que a solução estará perto de X=18 e Y=28.

Vamos fazer um gráfico ampliado e, para visualizar a solução, usamos um artifício. Escolhemos uma janela perto destes valores, com Xscl e Yscl iguais a 1, e em FORMAT seleccionamos GridOn.

Com isto vamos fazer com que apareça uma grelha com os pontos em que as coordenadas de X e Y são números inteiros. As soluções do problema estarão contidas no triângulo formado pelas três rectas.



Um único ponto da grelha aparece no interior do triângulo. Existe portanto uma única solução com números inteiros: X=19 e Y=26.

Resposta: um lápis custa €0,26, uma borracha €0,19 e uma esferográfica €0,55.