Uma corda à volta da terra

José Paulo Viana, Esc. Sec. Marquês de Pombal

Um dos mais antigos problemas que me entusiasmou é o da corda à volta da Terra. Suponho que quase todos o conhecerão já:

"Temos uma corda bem justa à volta da Terra, no equador, por exemplo. Se acrescentarmos um metro à corda e a esticarmos uniformemente, ela deixa de estar justa e passa a haver uma folga. Que animal consegue passar entre a corda e o chão?"

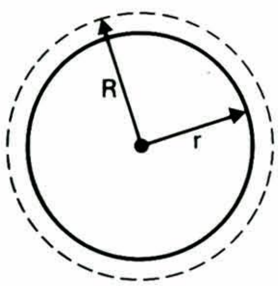
Se nunca viram este problema, pensem um bocado nele, tentem resolvê-lo, antes de continuar a ler.

A resposta é surpreendente: um gato passa à vontade! E surpreendente é também que a folga não depende do tamanho inicial da circunferência. Com efeito, se for

r = raio da circunferência inicial

P = perímetro do círculo inicial

a nova circunferência terá comprimento P+1.



Seja R o seu raio.

Então $2\pi R = P + 1$

$$2\pi R = 2\pi r + 1$$

$$2\pi(R - r) = 1$$

$$R - r = \frac{1}{2\pi}$$

Ora R–r é precisamente a folga procurada e que, portanto, é igual a $1/2\pi = 0{,}159$ m ou seja, quase 16 cm.

Vemos também que este valor não depende do raio inicial. Assim, se tivermos um fio à volta de uma laranja e lhe acrescentarmos um metro, o fio ficará afastado os mesmos 15,9 centímetros.

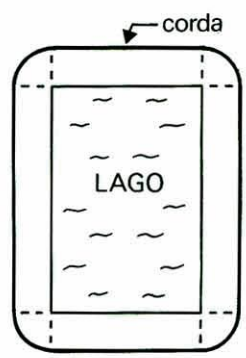
No limite, podemos até considerar um ponto (circunferência de raio zero). Se pegarmos num fio de um metro, construimos uma circunferência de raio 15,9 centímetros à volta do ponto.

Uma corda à volta do lago

Aqui há tempos ouvi a Adelina, da Escola Secundária Camões, contar que tinha proposto este problema aos seus alunos do 8.º ano e que, para confirmar (e mesmo convencer alguns mais cépticos...) resolveu fazer com eles uma experiência concreta. Para isso, aproveitou um lago redondo que existe na praça em frente à escola e lá foram todos, munidos de corda e fita métrica. Esticaram a corda à volta do lago, acrescentaram um metro e voltaram a esticar tentando que a folga se distribuisse igualmente. Mediram e lá estavam os 15,9 cm (ou, pelo menos, muito próximo...).

Fiquei entusiasmado com esta ideia da Adelina, sobretudo porque tinha já verificado que algumas pessoas continuam inabalavelmente descrentes. Para eles, a intuição continua a ser mais forte que a demonstração matemática e não conseguem acreditar que a folga seja mesmo tão grande. Ora, nestes casos, não há como ver para crer.

Como tinha uma turma de 10.º ano onde desde a primeira aula vínhamos fazendo e discutindo problemas, resolvi avançar com este e comecei logo à procura de lagos redondos. Corri as cercarias da escola e, com grande desgosto, não encontrei nada circular. Só rectângulos! Pus-me a pensar então no que aconteceria se a corda estivesse à volta de um rectângulo e lhe acrescentasse um metro. Surpresa! Acontecia o mesmo, exactamente o mesmo, que com as circunferências. Não só a folga não dependia das dimensões do rectângulo, como continuava a ser de 15,9 centímetros. Nem queria acreditar no que *via*. Mas lá estava, reparem na figura. Se



eu esticar a corda de modo a que fique toda a igual distância do rectângulo inicial, o que acontece é que ela fica direita e paralela aos lados, excepto nos cantos. Aí, para que todos os pontos fiquem equidistantes do rectângulo, a corda tem de se dispor num arco de circunferência com centro no vértice do rectângulo. Portanto, as partes rectas da corda têm o mesmo comprimento que o rectângulo inicial. O metro adicional vai-se repartir em arcos de circunferência que, no total, formam uma circunferência inteira (de perímetro um metro, claro). Como a folga é exactamente o raio destes arcos, cá vamos obter $2\pi r = 1$ m, ou seja, $r = 0{,}159$ m.

Claro que já não parei aqui. Se isto acontecia com círculos e rectângulos, também aconteceria nos outros polígonos? Deitei mãos à obra e lá estava: acontecia. Desde que o polígono fosse convexo, a folga continuava a ser a mesma, quaisquer que fossem a forma e as dimensões iniciais. Aliás, nem era preciso partir de um polígono. Basta a figura ser convexa. Experimentem ver o que acontece com um triângulo, ou um pentágono, ou ...

Andava eu nestas lidas quando encontrei o Eduardo Veloso e lhe comecei a contar estas coisas, todo satisfeito.

— Claro, claro — interrompeu ele. — O Papert tem um capítulo do livro "Logo: Computadores e Educação"(*) onde fala nisso tudo.

Fui ver ao livro. Era verdade. São assim os desgostos da vida: de vez em quando julgamos estar a descobrir coisas que afinal já tinham sido descobertas. O que vale é que para nós foram mesmo descobertas e ninguém nos tira a alegria desses momentos.

Uma turma à volta da corda

Claro que todas estas implicações do problema da corda reforçaram a ideia de que o tinha de apresentar e discutir na tal turma. Era uma turma que gostava de problemas: a aula de apresentação começou com um problema e acabou com outro; um mês depois de se iniciar em várias turmas o "problema da quinzena", propuseram que, para eles, se fizesse antes o "problema da semana".

Quando apresentei os dados e fiz a pergunta "Que animais conseguiriam passar entre a corda e o chão?", surgiram logo as respostas: "Uma minhoca", "Não, não, só um micróbio", "Um micróbio? Qual o quê, só se passar entre as fibras da corda!", "Uma toupeira, escavando...".

Nas aulas seguintes foram aparecendo comentários intrigados de que, afinal, cabiam alguns animais. Quando fizemos a discussão das resoluções, verifiquei que todos eles tinham seguido, com pequenas variações, o método de, conhecido o comprimento do equador (40.000 quilómetros), determinar a diferença entre os dois raios.

Os cálculos eram muito fáceis e rápidos utilizando a calculadora. Propus-lhes por isso que verificassem logo ali, em pequenos grupos, o que aconteceria se, em vez da Terra, tivessem uma moeda, uma laranja, uma bola de futebol, um lago redondo... E lá apareceram de novo os 15,9 centímetros. Fizemos depois a resolução para um raio **r** qualquer e confirmámos a independência da folga relativamente ao raio inicial.

Para a semana seguinte ficaram encarregues de investigar o que aconteceria com um rectângulo ou com um triângulo. Como devem imaginar, foi mais uma semana de discussões durante os intervalos onde iam surgindo as exclamações de "como é possível?".

Uma corda mais curta

Terminada a semana e feita a análise destas variantes do problema, diz-me o João:

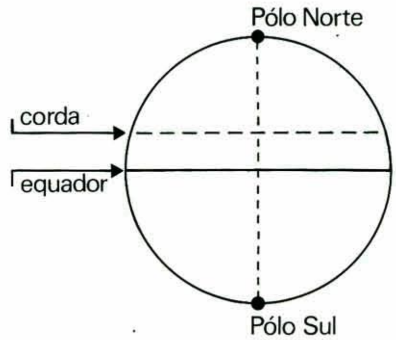
— Hoje sou eu que tenho um problema para si!

O João era, de todos, o mais entusiasta dos problemas. Resolvia-os quase todos com enorme alegria, seguindo por vezes estratégias pouco habituais, inesperadas e perfeitamente eficazes.

Era este o problema do João:

"Temos a tal corda à volta da Terra. Se lhe retirarmos um metro, já não é possível pô-la ao longo do equador. Vamos então pousá-la no chão "paralela" ao equador (todos os seus pontos estarão assim a igual distância do equador).

Qual vai ser a distância da corda ao equador? Cabe lá algum país?".



Querem tentar resolver este problema? (Solução noutra página desta revista).

(*) Papert, S. (1985). Logo: Computadores e Educação. São Paulo: Brasiliense.