

Pitágoras até aos nossos dias e o raciocínio visual

Jael Andrade
Manuel Joaquim Saraiva



Introdução

O Teorema de Pitágoras conta com centenas de demonstrações diferentes e as últimas são bem recentes (século XX). Trata-se de um resultado que tem apaixonado os matemáticos ao longo dos séculos até aos nossos dias.

Algumas dessas demonstrações são sem palavras, realçando-se o raciocínio visual (“o raciocínio que faz um uso essencial da informação visual” — Dreyfus, 1991).

Em cada uma delas, e para quem tem formação em Matemática, basta olhar... e ver que “o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”.

Apresentaremos algumas dessas demonstrações sem palavras, procurando realçar a sua beleza e a importância que, desde sempre, o raciocínio visual tem tido na actividade matemática — infelizmente muito desvalorizado nos dias de hoje, nomeadamente na apresentação dos resultados matemáticos.

Apresentaremos, ainda, uma demonstração da generalização do Teorema de Pitágoras para polígonos semelhantes e terminaremos com uma breve conclusão. Nesta referimos, também, as possíveis implicações da visualização no ensino

A. Hartwell del.

Fundelton Lith.

PYTHAGORAS.

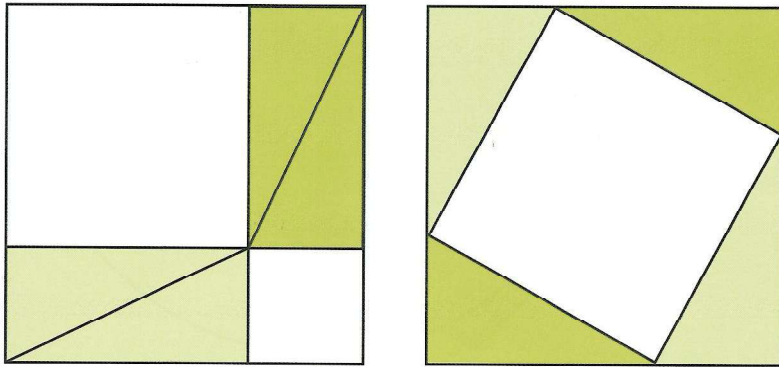


Figura 1. [Retirada de Proofs Without Words, Roger Nelsen, 1993]

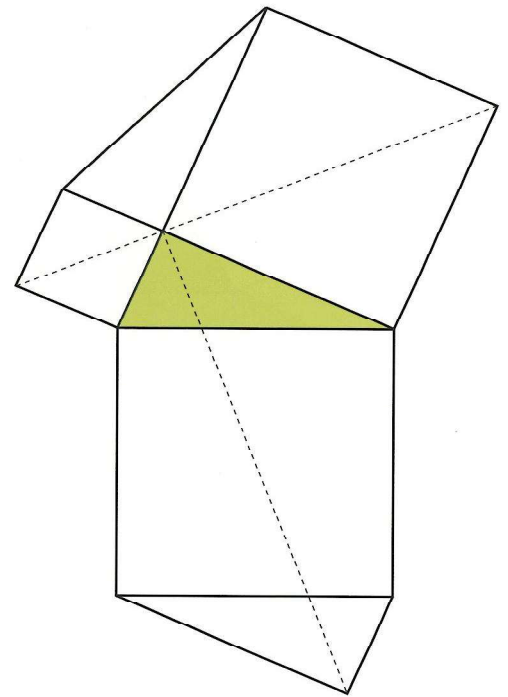


Figura 2. [Retirada de Proofs Without Words, Roger Nelsen, 1993]

e aprendizagem da Matemática, nomeadamente a sua importância para a transição para um pensamento mais abstracto e dedutivo.

A prova de Chou pei suan...ching

Cerca de duzentos anos antes de Cristo foi elaborada a obra *Chou pei suan...ching*, onde constava a demonstração visual do Teorema de Pitágoras (ver figura 1).

Esta é feita através da construção de um quadrado de lado $(b + a)$, que se decompõe em quatro triângulos rectângulos congruentes, de catetos b e a e hipotenusa c , e num quadrado de lado c (ver o quadrado da direita da figura 1).

A ideia luminosa do autor foi considerar dois quadrados congruentes (ver figura 1) — logo, com a mesma área — o que evidencia (que se vê!) que a soma das áreas dos polígonos em que cada um dos quadrados se decompõe também tem que ser a mesma!

Ao olhar-se para a figura 1, pode ver-se que ambos os quadrados se podem decompor em quatro triângulos com a

mesma área $(b \times a)/2$ e o quadrado da esquerda contendo ainda mais dois quadrados, de lados a e b , respectivamente, e o da direita apenas um, de lado c . Ora, se os triângulos têm as mesmas áreas, então a restante área de cada um dos quadrados iniciais também tem que ser a mesma; portanto, a soma das áreas dos dois quadrados incluídos na decomposição do quadrado da esquerda é igual à área do quadrado incluído na decomposição do quadrado da direita, ou seja, $a^2 + b^2 = c^2$. É o que se quer demonstrar, pois a e b são os catetos de um triângulo rectângulo qualquer e c é a sua hipotenusa — e que é facilmente apreendido com um *simple*s olhar para a figura 1.

A prova de Leonardo da Vinci

No século XVI, Leonardo da Vinci elaborou uma demonstração visual do Teorema de Pitágoras cuja beleza não deve ser desconsiderada (ver figura 2).

Esta demonstração é feita através da construção e análise de quadriláteros congruentes, e a ideia brilhante do autor

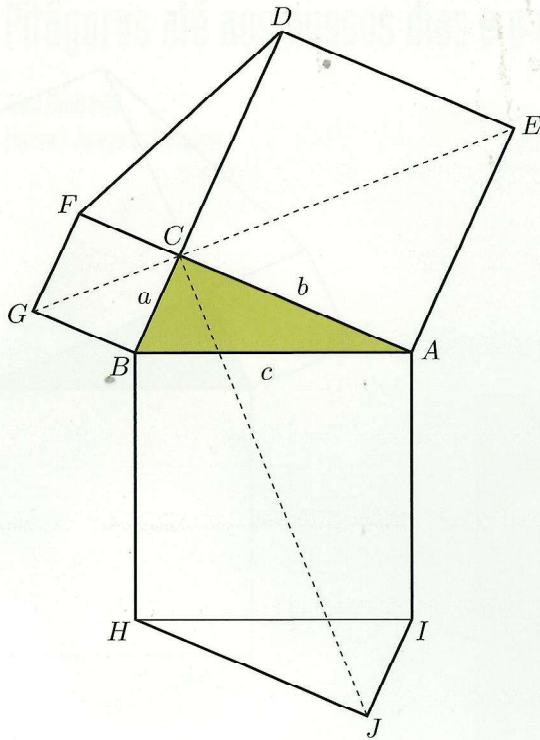


Figura 3.

foi, presumivelmente, unir dois dos vértices dos quadrados construídos sobre os catetos — construindo um triângulo igual ao inicial — sendo suficiente, a partir daí, aplicar os seus conhecimentos sobre simetrias e rotações.

Com base na figura 3, vê-se que o segmento CJ divide o polígono $ACBHJI$ em dois quadriláteros congruentes e o mesmo acontece com o segmento GE , relativamente ao polígono $ABGFDE$, pois GE pertence a um eixo de simetria deste polígono. Consequentemente, as áreas dos quadriláteros $GFDE$ e $ABGE$ também são iguais.

Fazendo uma rotação de centro B e amplitude -90° do quadrilátero $ABGE$ obtém-se o quadrilátero $HBCJ$, o que implica que os quadriláteros têm todos a mesma área, ficando, assim, demonstrado o Teorema de Pitágoras.

A prova publicada por Michael Hardy

No século XX, Michael Hardy publicou uma demonstração visual do Teorema de Pitágoras cuja simplicidade mostra que, muitas vezes, uma imagem vale mais do que mil palavras (figura 4).

$$\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a} \quad a^2 + b^2 = c^2$$

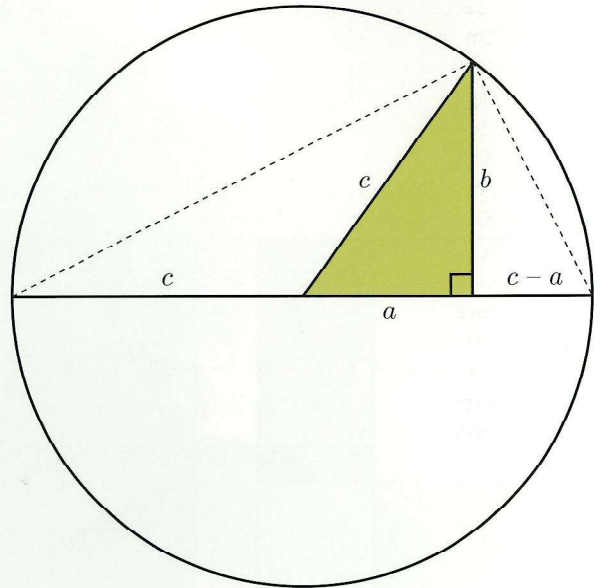


Figura 4.

[Retirada de *Proofs Without Words*, Roger Nelsen, 1993]

A partir da figura 4, o autor vê o triângulo retângulo inscrito na semi-circunferência superior, em que um dos seus vértices coincide com o vértice do triângulo retângulo dado que está sobre a circunferência, e recorda-se que num triângulo retângulo a altura referente à hipotenusa é meio proporcional entre os segmentos que determina na hipotenusa. Daqui resulta:

$$\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}, \text{ como se pretendia.}$$

Rapidamente se chega à igualdade $c^2 = a^2 + b^2$, estando assim demonstrado o Teorema de Pitágoras.

A prova de Poo-sung Park

Há apenas uma década, Poo-sung Park, professor numa universidade da Coreia, conseguiu uma nova demonstração do Teorema de Pitágoras (ver figura 5).

A partir de um triângulo retângulo, de catetos a e b e hipotenusa c , o autor constrói um quadrado com lado de comprimento b . Traça as suas diagonais e obtém quatro tri-

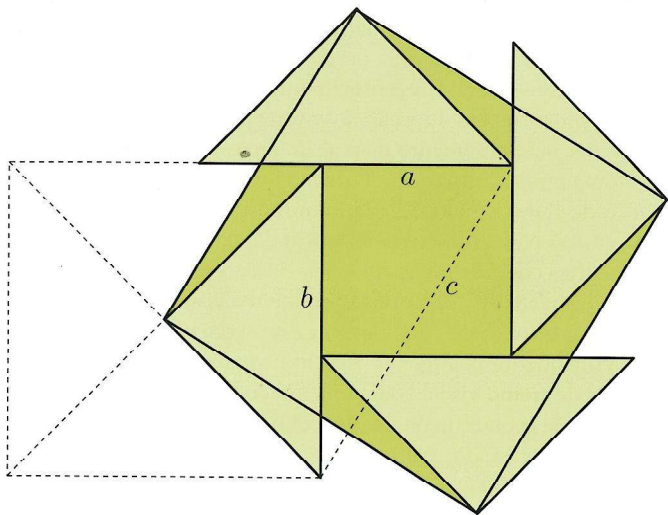


Figura 5.

[Adaptada de Proofs Without Words, Roger Nelsen, 1993]

ângulos rectângulos, em que a hipotenusa de cada um deles é b .

Os quatro triângulos assim obtidos são dispostos de modo a obter-se um quadrado de lado a ; além disso, unindo os vértices dos quatro ângulos rectos dos triângulos obtém-se um novo quadrado — de lado c — e quatro triângulos exteriores a este (em que cada um deles é congruente com cada um dos quatro triângulos interiores ao quadrado de lado c e exteriores ao quadrado de lado a e aos triângulos de hipotenusa b). Agora vê-se claramente que a área do quadrado de lado c é igual à soma da área do quadrado de lado a com a área do quadrado de lado b .

Uma das grandes curiosidades desta demonstração está no facto da figura 5 nos fazer lembrar a vela de um moinho de vento.

Generalização do Teorema de Pitágoras para polígonos semelhantes

Partindo de um triângulo rectângulo, constroem-se sobre os seus lados três polígonos semelhantes quaisquer. Demons-

$$A_{ABGHI} = A_{CAJKL} + A_{BCMNO}$$

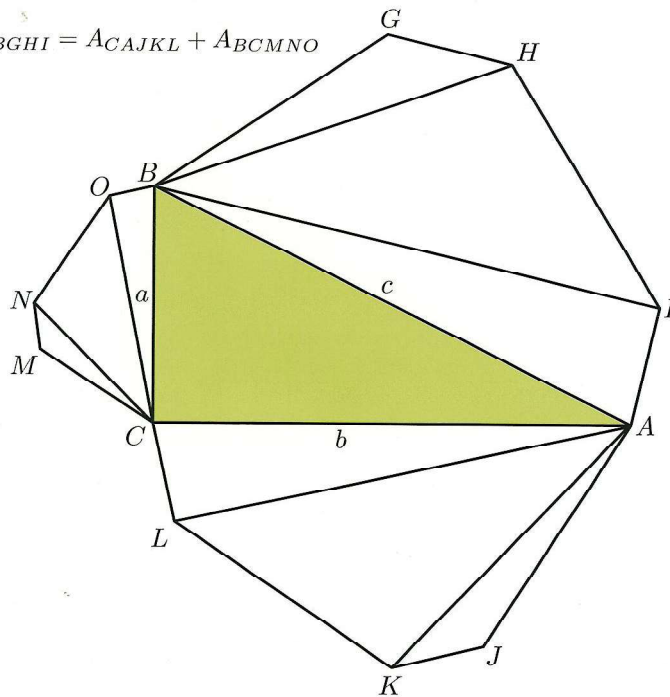


Figura 6.

tra-se que a área do polígono construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos polígonos construídos sobre os catetos, recorrendo, para tal, à decomposição dos polígonos em triângulos, como mostra a figura 6.

Sabendo que qualquer polígono pode ser decomposto em triângulos e que dois polígonos semelhantes podem ser decompostos no mesmo número de triângulos semelhantes, cada um a cada um, e semelhantemente dispostos, a figura 6 evidencia como se pode decompor cada um dos polígonos $AJKLC$ e $BCMNO$ em triângulos semelhantes aos triângulos que compõem o polígono $ABGHI$ (e em igual número).

Por outro lado, a razão das áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança, o que nos permite escrever

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{c}{b}\right)^2.$$

Assim,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{c^2}{b^2},$$

e, conseqüentemente,

$$A_1 = A_2 \times \frac{c^2}{b^2},$$

sendo A_1 a área do triângulo ABI e A_2 a área de ACL .

Seguindo o mesmo raciocínio para o polígono de menor área, vem

$$A_3 = A_2 \times \frac{a^2}{b^2},$$

sendo A_3 a área do triângulo BCO .

Resta mostrar que $A_1 - A_2 = A_3$:

$$\begin{aligned} A_1 - A_2 &= A_2 \times \frac{c^2}{b^2} - A_2 = A_2 \left(\frac{c^2}{b^2} - 1 \right) = \\ &= A_2 \left(\frac{c^2 - b^2}{b^2} \right) = A_2 \frac{c^2 - b^2}{b^2} \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow c^2 - b^2 = a^2$, logo,

$$A_1 - A_2 = A_2 \frac{c^2 - b^2}{b^2} = A_2 \times \frac{a^2}{b^2} = A_3.$$

Repetindo este raciocínio para os restantes triângulos semelhantes podemos afirmar que

$$A_{ABGHI} = A_{CAJKL} + A_{BCMNO},$$

como queríamos provar.

Deixamos aqui o seguinte desafio: E se em vez de polígonos tivéssemos três figuras não poligonais semelhantes? Como relacionar as suas áreas?

Conclusão

Vários indicadores apontam para o facto de que muitos matemáticos, no seu trabalho criativo, confiam fortemente no raciocínio visual; no entanto, com raras excepções, esses mesmos matemáticos fazem esconder esse facto.

Hadamard (1945) reconhece que na sua actividade matemática usa imagens vagas que, muitas vezes, são de uma natureza geométrica. Afirma, ainda, que as palavras e a linguagem, escrita ou oral, parecem não desempenhar qualquer papel no seu pensamento. Os constructos psicológicos que são os elementos do pensamento apresentam-se como sendo "certos sinais ou figuras, mais ou menos claras, que podem ser reproduzidas e combinadas em liberdade" (p. 82). Ainda segundo este autor, o próprio Euler, para explicar a uma princesa sueca as propriedades do silogismo, representou as ideias principais através de círculos.

O raciocínio visual não significa ser apenas o suporte para a descoberta de novos resultados e de novas vias para os fornecer, mas deverá ser desenvolvido de forma total — ser aceitável e aceite como raciocínio. São muitos os matemáticos que defendem que o raciocínio visual não está por baixo, nem por cima do algébrico ou do verbal. É necessário promover a sua integração.

As críticas ao reforço do raciocínio visual no ensino e aprendizagem da Matemática vão muito no sentido de que isso pode provocar uma prisão a aspectos visuais dos objectos geométricos e, eventualmente, tornar-se um obstáculo ao progresso em direcção ao conhecimento geométrico, que exige um pensamento mais abstracto e dedutivo. Trata-se de uma preocupação justa. Porém, vários estudos, por exemplo o de Razel e Eylon, 1990, têm mostrado que os alunos do ensino básico que tiveram possibilidade de trabalhar matemática com materiais didácticos visuais desenvolveram uma capacidade para identificar conceitos visuais em contextos complexos, bem como aplicar estes conceitos em situações visualmente complexas. Eles mostraram ainda a importância do treino visual como um antecedente para a aprendizagem da geometria na escola secundária.

Deste modo, é urgente dar ao raciocínio visual um estatuto e uma atenção de acordo com a sua importância — educacional e matemática.

Referências

- Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. *Proceedings Fifteenth PME Conference*, pp. 33–48, Assis.
- Hadamard, J. (1945). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton University Press.
- Nelsen, R. (1993). *Proofs without words*. Washington: The Mathematical Association of America.
- Nelsen, R. (2000). *Proofs without words II*. Washington: The Mathematical Association of America.
- Razel e Eylon (1990). Development of visual cognition: Transfer effects of the Agam program. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 11, 459–484.

Jael Andrade

Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior

Manuel Joaquim Saraiva

Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior e CIEFCUL