Será o infinito um ponto?!

Pedro Miguel Oliveira

Os números e a geometria desde há muito que revelam segredos comuns apesar de nem sempre os associarmos ou trabalharmos em conjunto. Por exemplo, fará sentido explorar geometricamente o inverso de um número real? Que relação terá com a inversão de um ponto num plano? E que propriedades terá a transformação que faz corresponder a cada ponto do plano o seu *inverso*? É sobejamente aceite que um determinado número multiplicado pelo seu inverso é igual a um. E, além disso, se pensarmos na sucessão dos números naturais esta tende para infinito, ao invés da sucessão dos seus inversos, cuja sequência tende para zero. Mas poderão estas noções implicar algo de tão extraordinário na procura de propriedades geométricas?

Jacob Steiner, no século XIX, produziu uma interessante descoberta desenvolvendo uma geometria que, com a sua própria concepção devidamente alicerçada, permitiu resolver problemas que até então eram considerados irresolúveis pela geometria de Euclides. Um desses exemplos é *o problema das três circunferências de Apolónio* que consiste na determinação da circunferência (ou das circunferências) tangente (ou tangentes) a três circunferências dadas. Também problemas de difícil resolução no âmbito da geometria euclidiana puderam ser demonstrados de forma mais simplificada como foi disso exemplo o *Teorema de Ptolomeu*, em que se afirma que o produto das diagonais de um quadrilátero convexo inscrito numa circunferência é igual à soma dos produtos dos lados opostos. Para melhor entendermos estes e outros problemas Steiner deixou-nos então como legado as bases da *geometria inversiva* que nos têm levado numa viagem, onde se apresentam outras perspectivas sobre o que é

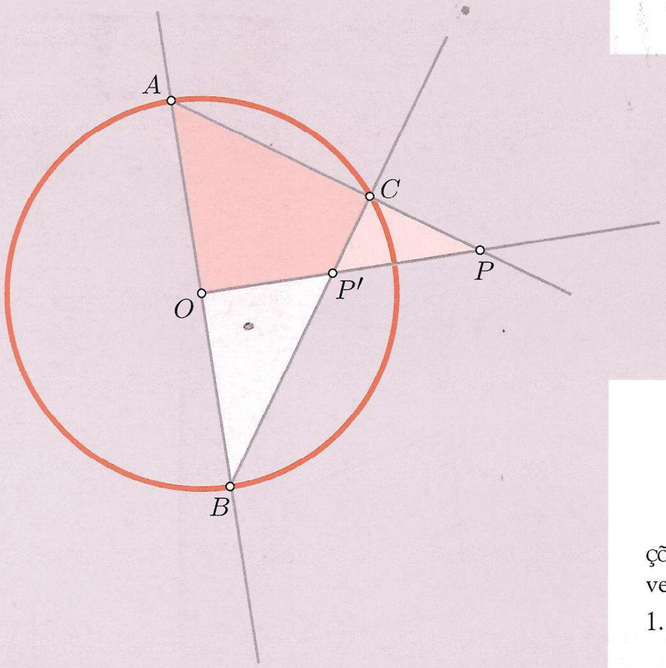

Figura 1.

Os triângulos rectângulos OPA e OBP' são semelhantes logo

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} \leftrightarrow \overline{OA} \times \overline{OB} = \overline{OP} \times \overline{OP'}$$

Como $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ então

$\overline{OP} \times \overline{OP'} = r^2$.

a geometria, combatendo mesmo preconceitos firmados de definições estanques que limitam a capacidade de explorar o conhecimento.

Vamos começar por ver a condição inicial necessária ao entendimento desta geometria não euclidiana:

Dada uma circunferência de centro em O e raio r, dizemos que a *inversão* é a transformação que faz corresponder, a cada ponto P do plano, diferente de O, o ponto P' que se encontra sobre a semi-recta OP e que verifica o facto de $\overline{OP} \times \overline{OP'} = r^2$.

A inversão pode então ser comparada como uma espécie de reflexão onde a chamada *circunferência de inversão* funciona como um eixo de reflexão. Mas para melhor entender esta transformação, identifiquemos geometricamente as condições que nos permitem obter a localização de um ponto inverso de um dado ponto, diferente de O (figura 1):

1. Desenhar a *circunferência de inversão* de centro em O e raio r;
2. Marcar um ponto P e desenhar a semi-recta OP;
3. Passando por O, traçar a perpendicular à semi-recta OP e assinalar os pontos A e B de intersecção com a circunferência;
4. Traçar a semi-recta AP e assinalar o ponto C, outro ponto que intersecta a circunferência;
5. Traçar a semi-recta BC;
6. Assinalar o ponto P', inverso de P, que resulta da intersecção das semi-rectas OP e BC.

Através da construção apresentada verifica-se que é possível transformar um ponto no seu inverso em quase todo o plano. Mais, verifica-se que o afastamento de um qualquer ponto do centro da circunferência de inversão leva a uma aproximação do seu inverso desse mesmo centro e vice-versa. Neste particular, o único caso que requer uma atenção especial é mesmo o ponto O cujo inverso não é possível construir. Se intuitivamente entende-se que o afastamento de um ponto P leva a uma aproximação do seu inverso, ambos relativamente ao centro da circunferência de inversão, então levanta-se a questão: *será o infinito um ponto?* A resposta é um convencional sim para que possamos estabelecer uma transformação biunívoca e assim a inversão ser uma verdadeira transformação geométrica segundo a definição mais usual (ver, na mesma secção desta revista, o artigo de Rita Bastos, *Transformações Geométricas*). Assim, ampliamos o plano euclidiano com um ponto (Ω), que designamos por ponto do infinito, obtendo então o chamado *plano inversivo*. A inversão torna-se então numa transformação definida em todo o plano e com valores em todo o plano, convencionando-se que o transformado do centro da circunferência de inversão, O, é o ponto Ω e o transformado de Ω é o ponto O.

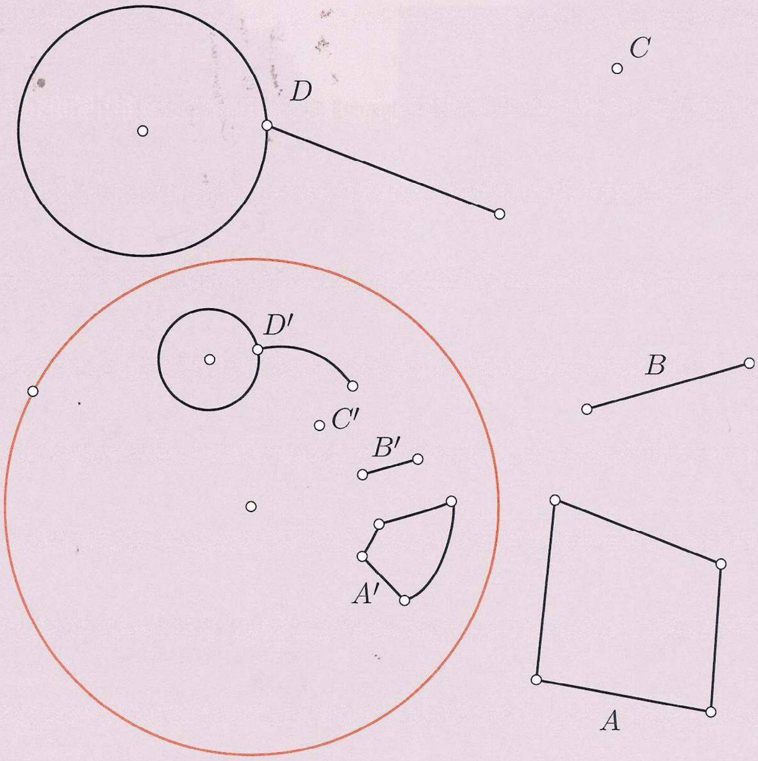

Figura 2. Inversão

Destaque-se aqui a possibilidade que a geometria nos oferece de criar e recriar uma teoria que, apesar de uma aparente lacuna, com o simples acrescento de um ponto passa a ser sempre válida. O leitor poderá ver uma situação semelhante a esta na geometria projectiva, onde uma recta é a solução necessária para se poder construir uma projecção sem limitações.

Estamos agora em condições de enunciar um conjunto de resultados que permitem descobrir e construir a geometria inversiva. Contudo desafiamos o leitor, caso seja possível, a acompanhar esta descoberta usando em paralelo um programa de geometria dinâmica, como por exemplo o *The Geometer's Sketchpad*.

- A inversão é uma transformação que faz corresponder a cada ponto do exterior da circunferência um ponto do interior da mesma e vice-versa.
- O transformado pela inversão de uma recta que passa pelo centro da circunferência de inversão é a própria recta.
- O transformado pela inversão de uma recta que não passa pelo centro da circunferência de inversão é uma circunferência que passa por esse centro. Além disso, o seu diâmetro que parte de O é perpendicular à recta considerada.
- Assim, um segmento de recta é transformado, pela inversão, ou noutro segmento de recta ou num arco de circunferência, conforme a sua recta suporte passe ou não pelo ponto O.
- Rapidamente se pode verificar que a inversão não preserva as distâncias logo não é uma isometria.
- O transformado pela inversão de uma circunferência que não passa pelo centro de inversão O é uma outra circunferência que também não passa por O.
- Uma circunferência ortogonal à circunferência de inversão é transformada pela inversão nela mesma (duas circunferências são ortogonais se as tangentes nos pontos das suas intersecções formam ângulos rectos).

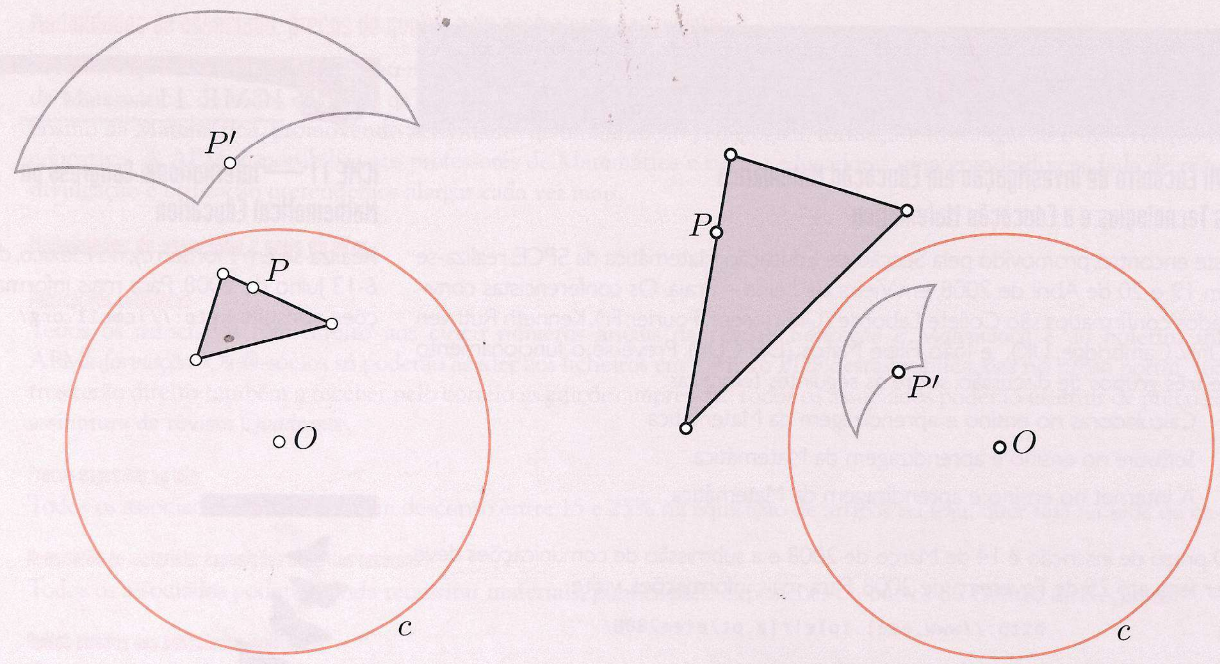

Figura 3.Inversão de triângulo

- A inversão é uma transformação conforme, ou seja, preserva os ângulos, contudo inverte o seu sentido. Particularmente, se duas circunferências são tangentes então as suas inversas também o são e o mesmo se passa relativamente à ortogonalidade.

Com base nestes resultados podemos agora explorar um conjunto de desafios com diferentes graus de dificuldade. Por exemplo: Como serão as figuras transformadas, pela inversão, de um triângulo equilátero ou de um quadrado? Que efeito geométrico terá a inversão de uma pavimentação de triângulos que se encontre no exterior da circunferência de inversão? Conseguirá o leitor encontrar a solução do *problema das três circunferências de Apolónio*? E do *Teorema de Ptolomeu*?

As potencialidades que a inversão oferece são alargadas e não se limitam apenas às construções geométricas no plano inversivo. A projecção estereográfica ou os números complexos também se relacionam de forma directa com a inversão. Como tal convidamos os leitores, em particular os professores, a descobrir e a explorar a inversão. E, para estes últimos, porque não tentar trabalhar algumas noções e propriedades da inversão em sala de aula e, em conjunto com os alunos, conjecturar, negar ou validar resultados? Será que *geometrizar* com temas pouco vistos e trabalhados não será importante para estimular e formar o aluno na procura da formalização de conceitos e propriedades geométricas?...

Notas

1 Para melhor acompanhar este artigo pode fazer *download* dos ficheiros de *Sketchpad* disponibilizados na revista *on-line*.

2 Pode ainda consultar as páginas:

http://www.atractor.pt/mat/inversao/index.html
http://whistleralley.com/inversion/inversion.htm
http://en.wikipedia.org/wiki/Inversive_geometry
http://www.mat.uab.es/departament/Varis/material/inversions.pdf

Pedro Miguel Oliveira
Grupo de Geometria da APM