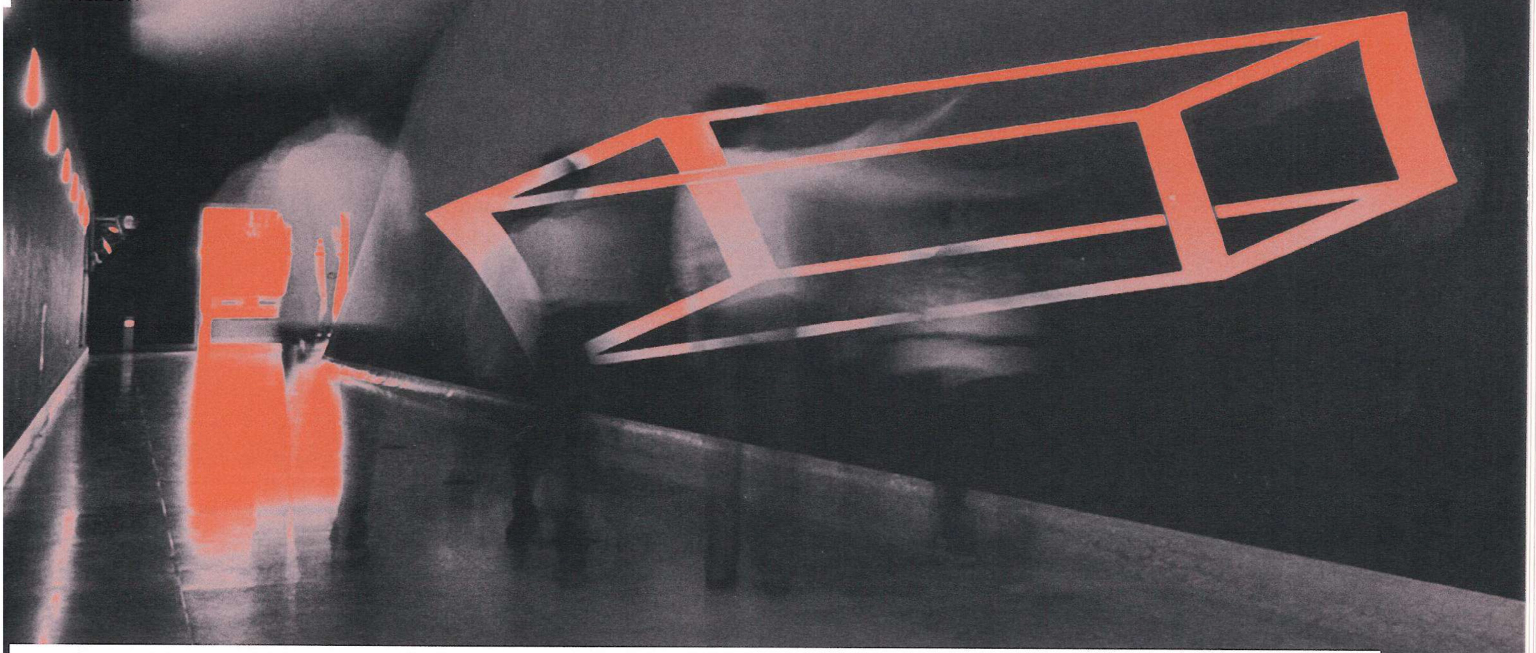
As cónicas sob múltiplas perspectivas

Manuela Ribeiro



Desenvolvi no ano de 2005/2006, no âmbito do Projecto Pencil (projecto dinamizado por *Permanent Resource Centre for Informal Learning*), em duas turmas do 11° ano do Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias, em sala de aula e no Pavilhão do Conhecimento, um trabalho sobre dois temas: *As cónicas sob múltiplas perspectivas* e *As sucessões e os fractais*. Trago-vos hoje o primeiro e numa próxima oportunidade virá o segundo.

Embora o estudo das cónicas apareça, nos programas de 10° e 11° anos, sempre com carácter facultativo e no 10° ano já tivesse abordado com os mesmos alunos:

- a elipse como circunferência deformada e como lugar geométrico;
- a parábola como gráfico de uma função quadrática

pareceu-me pertinente aproveitar a abordagem da hipérbole como gráfico de uma função homográfica, no tema Introdução ao Cálculo Diferencial I do 11° ano, para fazer o estudo comum das três cónicas sob múltiplas perspectivas:

- como secções de uma superfície cónica;
- como envolventes de famílias de rectas;
- como lugares geométricos

e demonstrar que as curvas obtidas pelos três processos são as mesmas.

Tal multiplicidade de perspectivas permitiu estabelecer conexões variadas com os temas: Geometria no Plano e no Espaço I tratado no 10° ano e Geometria no Plano e no Espaço II tratado no 11° ano.

O trabalho desenvolvido ocupou três blocos de 90 minutos, englobou uma visita à Exposição Matemática Viva do Pavilhão do Conhecimento e decompôs-se em seis partes:

- na Parte 1 foram abordadas as três cónicas como secções de uma superfície cónica, recorrendo a um cone de enchimento;
- na Parte 2 foram obtidas as três cónicas como envolventes de famílias de rectas, recorrendo a dobragens;
- na Parte 3 foram abordadas as três cónicas como lugares geométricos, começando por traçar cada uma delas com um fio esticado e em seguida, desse traçado, deduzir a propriedade característica;
- na Parte 4 foi verificada a igualdade das curvas obtidas com fio esticado e como secções de uma superfície cónica, recorrendo aos cones com as esferas de Dandelin;
- na Parte 5 foi verificada a igualdade das curvas obtidas com fio esticado e como envolventes de famílias de rectas, e encontrada uma justificação para a propriedade reflectora de cada uma das cónicas, recorrendo ao *Sketchpad*;
- na Parte 6 foi dado um cheirinho da história das cónicas, ligando estas ao problema da duplicação do cubo e abordando as secções cónicas antes de Apolónio e com Apolónio.

Os alunos trabalharam em grupos de quatro, tendo nas partes 3, 4 e 5 cada grupo trabalhado apenas uma cónica. Na Parte 5 o uso do *Sketchpad* limitou-se à exploração de *sketches* previamente construídos. Em cada um dos três blocos de 90 minutos foram trabalhadas duas partes, tendo a visita ao Pavilhão do Conhecimento antecedido o último bloco.

Para auscultar a reacção dos alunos a todo o trabalho realizado pedi-lhes que respondessem a um pequeno questionário. Entre todas as perspectivas trabalhadas, a preferida foi *As cónicas como envolventes de famílias de rectas*, seguindo-lhe de perto *As cónicas como secções de uma superfície cónica*.

"Foi interessante ficar na expectativa, dobrar e dobrar para descobrir o que iria aparecer".
"Acho engraçada a forma de como simplesmente com rectas é possível formar uma cónica".
"Foi a forma mais divertida de aprender".
"Como era a primeira vez que via de um cone tirar múltiplas secções, fiquei impressionada".
"Porque é aquela que nos permite visualizar as cónicas traçadas no espaço".

A adequação dos materiais utilizados foi reconhecida pela totalidade dos alunos e o maior interesse despertado foi para os cones, seguindo-se-lhe o fio esticado.

"Porque variando a posição do cone obtemos as três cónicas".
"Porque usar uma figura tridimensional torna mais fácil e agradável o trabalho".
"Foi uma maneira mais fácil de visualizar as secções definidas".
"Deu para verificar que com uma haste e uma corda consegue-se uma hipérbole".
"Porque permitiu sermos nós a traçar a elipse".

Dos comentários a todo o trabalho realizado destaco:

"Foi diferente. Sem darmos conta demos uma parte da matéria quase de uma maneira auto-didáctica".
"Acho que contribuiu para perceber melhor o assunto já que foi realizado por etapas tornando mais acessível apreender os conhecimentos".
"Gostei do trabalho apesar de nos termos atrasado algumas vezes. Foi diferente daquilo que costumamos fazer nas aulas por envolver vários tipos de materiais, a visita, ...".
"Algumas partes, em particular, as partes com uma representação física provaram ser bastante mais fáceis de atingir os objectivos que nas restantes partes".
"Penso que trabalhar em grupo é interessante pois podemos discutir os nossos pontos de vista e chegar de forma mais rápida e eficaz a uma solução. Também considero interessante trabalhar com diversos materiais de forma a aplicarmos os nossos conhecimentos".

O balanço final foi positivo embora tenha ficado aquém das minhas expectativas. Porque eram alunos que eu acompanhei desde o 10° ano e que já estavam habituados a trabalhar muitas vezes em grupo e com materiais manipuláveis, e algumas vezes com o *Sketchpad*, esperava encontrá-los mais autosuficientes. Tal sabor a pouco no entanto serviu-me de estímulo para aproveitar todas as oportunidades que surgirem para desenvolver trabalho do mesmo tipo, é preciso que este tipo de trabalho seja cada vez mais um hábito e não uma excepção.

Trabalho desenvolvido em sala de aula

O trabalho desenvolvido em sala de aula assentou, para cada aluno, em: seis fichas de trabalho, tantas quantas as partes anteriormente referidas, e no uso de materiais variados: papel vegetal, modelos acrílicos comercializados (cone de enchimento e cones com as esferas de Dandelin), instrumentos artesanais de fio esticado e *software* de Geometria Dinâmica (*Geometer's Sketchpad*).

Os alunos em geral aderiram bem ao trabalho, tendo havido no entanto alguns casos de desmobilização logo à primeira dificuldade.

Embora o trabalho fosse muito dirigido, cedo me apercebi da falta de autonomia de grande parte dos alunos pelo que, nos dois primeiros blocos, desempenhei um papel não apenas de observador e mobilizador mas também de auxiliar na descoberta e aprendizagem. Nestes dois blocos foram trabalhadas as partes 1 a 4 e os materiais nelas manipulados mostraram-se decisivos como auxiliares na compreensão dos conceitos envolvidos. No último bloco resolvi ter um papel menos interventivo, já porque na Parte 5 tinham o auxílio precioso do *Sketchpad* já porque era a última parte do trabalho e como tal as falhas eventualmente havidas não teriam repercussão em fases subsequentes. Mais uma vez ficou patente a falta de autonomia e foram muito poucos os que levaram a bom termo as Partes 5 e 6.

Visita ao Pavilhão do Conhecimento

A visita ao Pavilhão do Conhecimento teve por objectivo a exploração dos módulos, existentes na Exposição Matemática Viva, intimamente relacionados com as cónicas e a exploração, no Cib@rcafé, de algumas animações em flash construídas pelo Atractor.

A visita à Exposição Matemática Viva começou logo no exterior do Pavilhão com a exploração da Hipérbole-Fenda, continuou com a exploração dos módulos: Hiperbolóide de fios, Bilhares elíptico, hiperbólico e parabólico e terminou com uma passagem pelos restantes módulos.

Foi preparado um pequeno guião com o objectivo de estimular a exploração mais aprofundada dos primeiros módulos. Tal estímulo, que por vezes precisou de ser renovado oralmente, nalguns surtiu efeito, levando-os a procurar informação complementar e a tomar notas.

Seguiu-se um tempo no Cib@rcafé, igualmente apoiado num pequeno guião, para a exploração das animações em flash: Cortes do cone, Elipse método do jardineiro e Cónicas obtidas por um candeeiro.[2]

A reacção dos alunos foi muito positiva, tendo sido as Cónicas obtidas por um candeeiro a animação sensação, já porque numa mesma animação se obtêm as três cónicas, já porque viram estas evoluir de um modo contínuo.

As diferentes partes do trabalho desenvolvido tiveram como suporte as fichas *As cónicas como secções de uma superfície cónica*, *As cónicas como envolventes de famílias de rectas*, *As cónicas como lugares geométricos*, *Igualdade das curvas obtidas como secções de uma superfície cónica e com fio esticado*, *Igualdade das curvas obtidas com fio esticado e como envolventes da família de rectas*, *Propriedades reflectora* e as *Secções cónicas antes de Apolónio e em Apolónio*, publicadas nas páginas seguintes.

Ficha 1 — As cónicas como secções de uma superfície cónica

Figura 1.

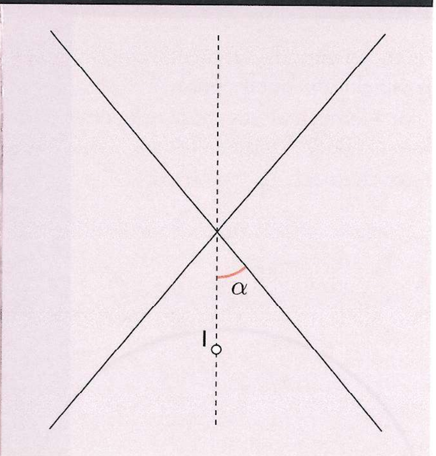


Figura 2.

1. Pega em duas canetas e simula com elas duas rectas concorrentes, r e s. Roda uma delas em torno da outra, que figura obténs? Que papel desempenha nela cada uma das rectas consideradas? E o ponto intersecção?

2. Tens na tua mão um cone circular recto de enchimento, deita-lhe um pouco de água e simula com a superfície do líquido um plano que intersecta o cone (figura 1).

a] Começa por considerar planos que não contenham o vértice.

- Como colocar o cone de modo que o plano intersecte todas as geratrizes?

  Qual a secção determinada na superfície cónica pelo referido plano?

- Coloca agora o cone de modo que o plano seja paralelo a uma única geratriz.

  Qual a secção determinada na superfície cónica pelo referido plano?

- Por último coloca o cone de modo que o plano seja paralelo a duas geratrizes.

Qual a secção determinada na superfície cónica pelo referido plano?

b] Olha agora a vista de frente da superfície cónica. Seja α o ângulo formado pela geratriz e pelo eixo — semi-abertura do cone. Entre que valores pode variar α?

Considera planos que passam por I e desenha a cores diferentes (figura 2):

- a vista de frente de um plano paralelo a uma única geratriz. Marca o ângulo β que o plano faz com o eixo.

  Que relação existe entre β e α?

- a vista de frente de um plano que intersecte todas as geratrizes. Marca o ângulo β que o plano faz com o eixo.

  Que relação existe entre β e α? E qual o maior valor de β?

- a vista de frente de um plano paralelo a duas geratrizes. Marca o ângulo β que o plano faz com o eixo.

  Que relação existe entre β e α? E qual o menor valor de β?

c] Considera agora planos que contenham o vértice satisfazendo as três relações encontradas entre β e α.

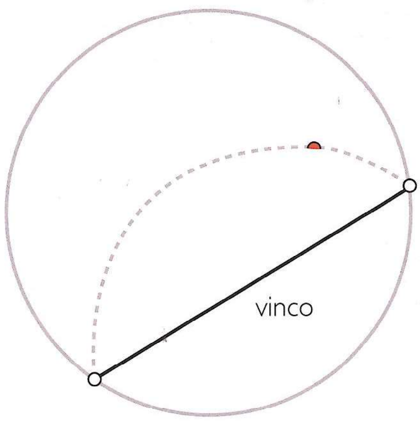
Qual a secção determinada por cada um deles?

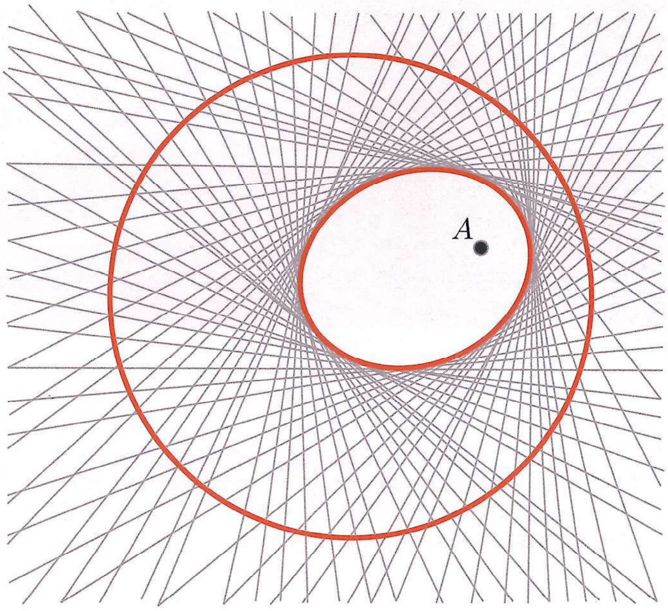
3. Acabas de investigar quais os diferentes tipos de secções determinadas numa superfície cónica por um plano, isto é, as cónicas degeneradas ou não (cónicas degeneradas determinadas por um plano que contenha o vértice e cónicas não degeneradas determinadas por um plano que não contenha o vértice).

a] Faz uma síntese em que as enumeres e em que, usando os ângulos α e β, identifiques a maneira de obter cada uma delas.

b] Sabendo que a razão $\cos\beta/\cos\alpha$ é a excentricidade de uma cónica, atendendo à relação conhecida entre β e α diz o que podes concluir quanto aos valores da excentricidade de cada uma das cónicas.

Ficha 2 — As cónicas como envolventes de famílias de rectas





1. Numa folha de papel vegetal, desenha uma circunferência e no seu interior marca um ponto A.

   Dobra o papel de modo que o ponto A fique sobre a circunferência, e faz um vinco. Repete esta operação tantas vezes quantas a tua paciência te permitir, procurando percorrer todas as zonas da circunferência.

   Qual a linha envolvida pelos vincos do papel?

2. Procede de modo análogo considerando o ponto A exterior à circunferência.

   Qual a linha encontrada?

3. Procede de modo análogo substituindo a circunferência por uma recta e sendo A um ponto não pertencente à recta.

   Qual a linha encontrada?

4. Acabas de obter as três cónicas como envolventes de famílias de rectas.

   a] Seja P o ponto genérico da circunferência/recta consideradas.

   O que é em cada caso o vinco em relação ao segmento de recta $[AP]$?

   Justifica a tua resposta.

   b] Qual a posição relativa do vinco e da cónica em cada caso?

Ficha 3 As cónicas como lugares geométricos[1]

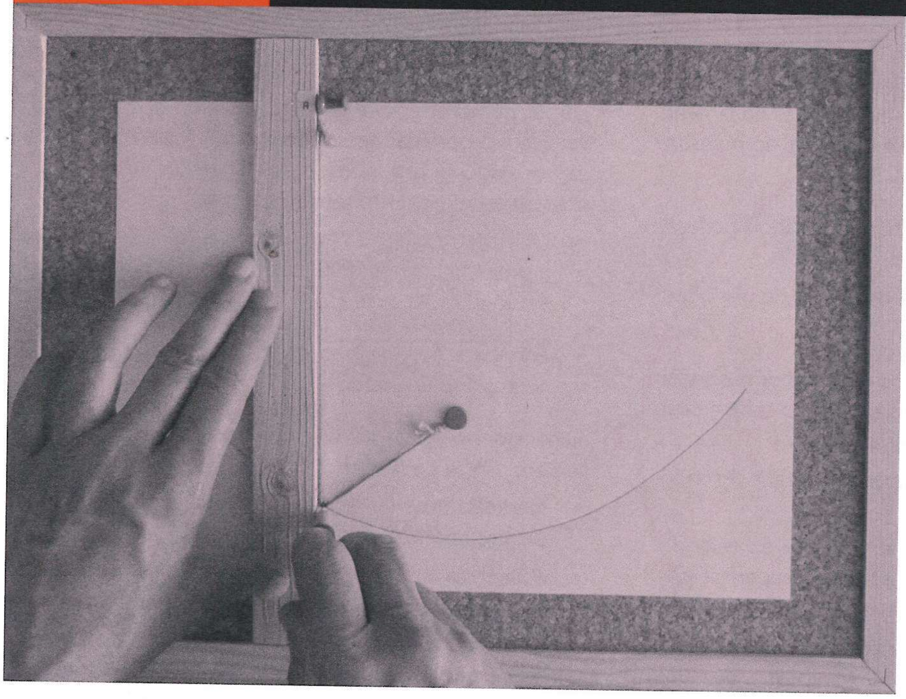


Figura 1.

1. Pega no placard, nos dois punaises, na haste e no fio.
   - Coloca sobre o placard uma folha de papel A4.
   - Prende a folha ao placard com um dos punaises.
   - Ajusta a haste a duas das tabelas do placard.
   - Prende uma extremidade do fio no punaise que prende a folha, à distância de 10 cm da tabela inferior do placard, a outra no topo da haste, ponto A, com o outro punaise.
   - Estica o fio com o bico da tua lapiseira e encosta este à haste.
   - Mantendo o fio esticado e o bico encostado à haste e assente sobre o papel, desliza a haste ao longo das tabelas do placard.
   - Passa agora a haste para o outro lado do punaise que prende a folha e repete a operação deslizando a haste em sentido contrário (figura 1).

2. Acabas de traçar uma parábola recorrendo ao método do jardineiro.

   O ponto onde o punaise que prende a folha está colocado é o foco da parábola — F.

   a] Identifica o vértice, V, e o eixo da parábola.

   b] Traça uma recta, d, perpendicular ao eixo que não contenha o foco e tal que a distância do Foco ao Vértice é igual à distância do vértice à recta.

   $d \rightarrow$ Directriz

   c] Seja P o ponto corrente da parábola.
   - Coloca a haste sobre o vértice e verifica que o comprimento do fio é igual à distância de A à directriz.
   - Que relação tem o comprimento do fio com a distância de P a F? E de P à directriz?

   Completa de dois modos diferentes

   Fio $= \overline{AP} + \ldots$

   Fio $= \overline{AP} + \ldots$

   O que podes concluir?

Podemos então definir a parábola como o lugar geométrico dos pontos do plano tais que ....

Ficha 4 — Igualdade das curvas obtidas como secções de uma superfície cónica e com fio esticado[1]

Já trabalhaste as cónicas como secções determinadas numa superfície cónica por um plano, como envolventes de famílias de rectas, e já traçaste uma parábola recorrendo ao método do jardineiro.

1. Recorda a propriedade característica da parábola deduzida desse traçado

   A parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano tais que ....

2. Verifica que a secção cónica com o mesmo nome satisfaz essa propriedade (figura 1). Para isso pega no cone e olha com atenção tudo o que nele existe:

   - um plano que secciona a superfície cónica segundo uma parábola
   - uma esfera inscrita no cone e tangente ao referido plano. A esfera tem em comum com a superfície cónica uma circunferência e, com o plano um ponto — Foco.

     Está assim identificado o foco da parábola.

Para identificares a directriz considera:

- a circunferência que a esfera tem em comum com a superfície cónica
- o plano C_1 que contém a circunferência anterior
- o plano C_2 que contém a parábola

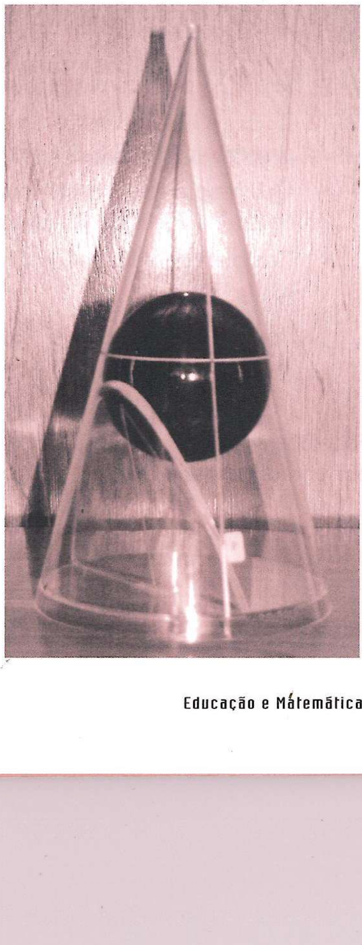


Figura 1.

a) A directriz d é a intersecção dos planos C_1 e C_2. Pretendemos demonstrar que o ponto genérico da parábola, P, verifica a propriedade recordada em 1 (figura 2). Começa por ver uma propriedade das tangentes a uma esfera tiradas de um ponto exterior. Para isso:

- Demonstra que, no plano, se PA e PB são tangentes a uma circunferência C em pontos distintos A e B, então $d(P, A) = d(P, B)$
- Enuncia a propriedade correspondente para as tangentes a uma esfera.

b) Olha agora o ponto genérico da parábola, P, o foco F, a geratriz PV e a esfera E.

- Identifica duas tangentes a E tiradas por P e os respectivos pontos de tangência.
- Aplicando a propriedade enunciada em a) completa $d(P, F) =$ ....
- Tira por P. uma perpendicular à directriz, seja D o pé da perpendicular; uma paralela ao eixo do cone, seja B o ponto intersecção desta com o plano C_1
- Identifica os ângulos α — semi-abertura do cone (ângulo que a geratriz faz com o eixo) e β — ângulo que o plano C_2 que contém a parábola faz com o eixo.
- Exprime $\overline{PB}$ em função de α e da distância de P ao foco, e $\overline{PB}$ em função de β e da distância de P à directriz.

  O que podes concluir?
- Atendendo a que, como já viste, a excentricidade de uma cónica é $\cos\beta/\cos\alpha$ e a excentricidade de uma parábola é 1, completa

  $d(P, \text{foco})$ .... $d(P, \text{directriz})$
- Então as curvas obtidas pelo método do jardineiro e como secção de uma superfície cónica são as mesmas?

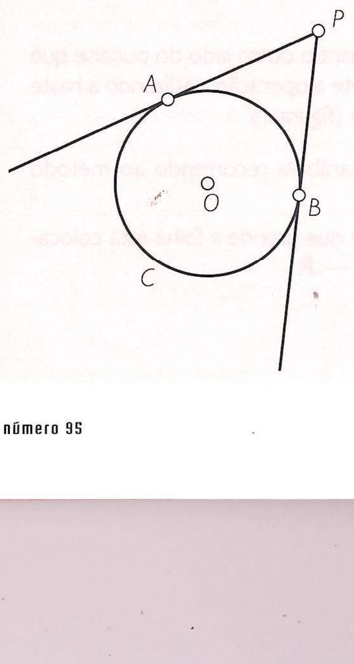


Figura 2.

Ficha 5

Igualdade das curvas obtidas com fio esticado e como envolventes das famílias de rectas. Propriedade reflectora[1]

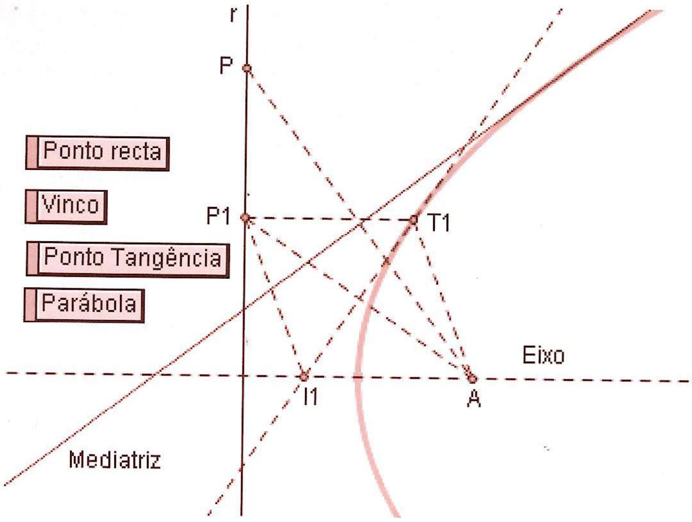


Figura 1. Parab1

Temos ainda duas questões por resolver:

1. Mostrar que a curva obtida como envolvente de uma família de rectas é a mesma que a traçada recorrendo ao método do jardineiro.
2. Encontrar uma justificação para a propriedade reflectora da parábola.

Proponho-te que as resolvas recorrendo ao uso do *Sketchpad*.

1. Abre o ficheiro `Parab1`. Nele tens uma recta r e um ponto A que não lhe pertence. *Faz sucessivamente click* sobre os botões: `Ponto recta`; `Vinco`.

E em seguida *arrasta* P sobre a recta. Acabas de encontrar mais uma vez a parábola como envolvente de uma família de rectas. Para verificares que é a curva obtida com o método do jardineiro recorda a propriedade característica deduzida desse traçado.

A parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano tais que ....

Em seguida *faz sucessivamente click* sobre os botões: `Ponto Tangencia`; `Parábola`.

Apaga os traços, arrasta P_1 sobre a recta e constata que:

- a família de rectas obtida envolve a parábola;
- o ponto de tangência T_1 é o ponto corrente da parábola.

Identifica o foco e a directriz da parábola e traduz por uma expressão, a ser verificada por T_1, a propriedade característica da parábola. Procura por último assegurar a sua verificação. Para isso:

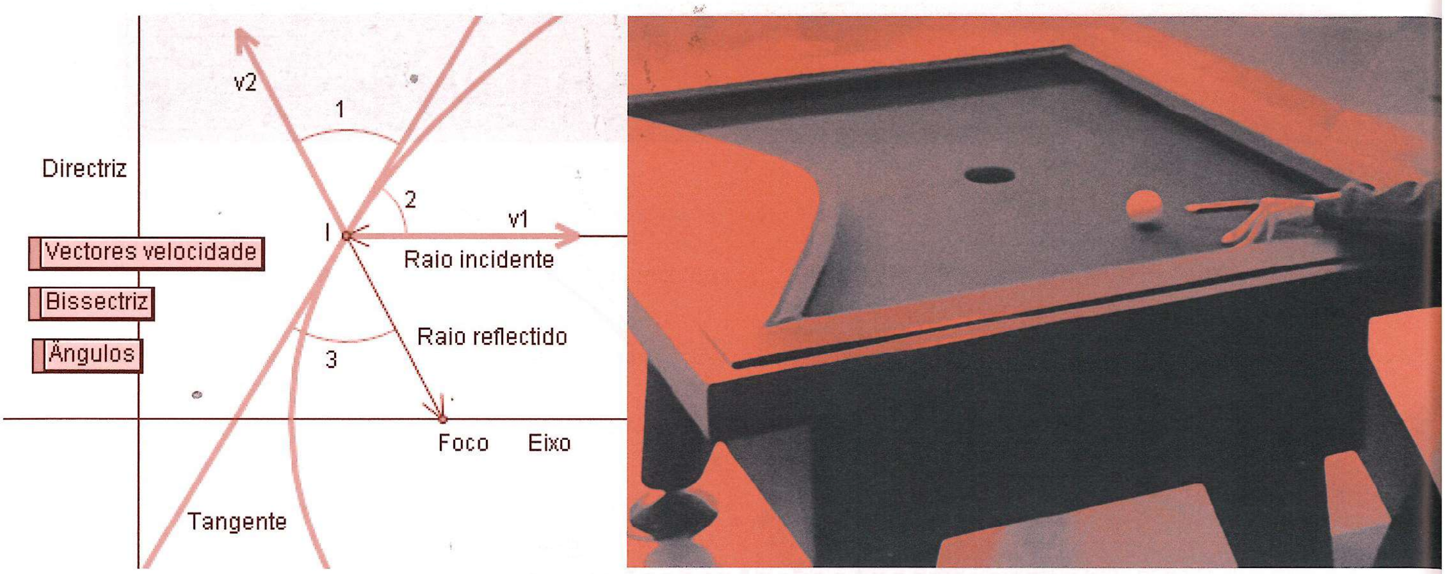
- Tem em atenção que:

  P_1 é um ponto da recta r

  O vinco feito para fazer coincidir A com P_1 intersecta o eixo da parábola no ponto I_1

  O ponto de tangência T_1 foi marcado de modo que T_1 está sobre o vinco e $\overline{T_1A} = \overline{I_1A}$
- Identifica o quadrilátero $[T_1P_1I_1A]$.
- Procura assegurar a expressão a ser verificada por T_1.

Figura 2. Parab2



2. Abre o ficheiro `Parab2`. Nele tens uma parábola, os seus foco, directriz e eixo, um raio incidente, o ponto de incidência I e o respectivo raio reflectido. *Arrasta o ponto I sobre a parábola.* Como vês o *sketch* ilustra a experiência que efectuaste na exposição *Matemática Viva* com o bilhar parabólico — colocada a bola em qualquer ponto da mesa e lançada em direcção à tabela curva, paralelamente às laterais (paralelamente ao eixo), a bola caía no buraco (foco).

Se a parábola for espelhada estás perante uma propriedade tua conhecida da Óptica — Quando um raio incide sobre um espelho o ângulo de incidência 1 e o ângulo de reflexão 2 são iguais (figura 3).

O ângulo de incidência/ângulo de reflexão é o ângulo formado pelo raio incidente/raio reflectido com a tangente ao espelho no ponto de incidência (se o espelho for plano com o próprio espelho).

Então encontrar uma justificação para a propriedade reflectora da parábola é encontrar uma justificação para a igualdade dos ângulos de incidência e reflexão. Para isso:

a] Procura a tangente à parábola no ponto I.

Tendo presente que em Física, a direcção do movimento de um corpo, em cada ponto da sua trajectória, é definida pela tangente à trajectória nesse ponto procura a direcção do movimento do ponto I.

Arrasta o ponto I sobre a parábola e repara que à medida que se afasta do foco se afasta também da directriz.

Faz click sobre o botão `Vectores velocidade`

Tens agora exemplificados os vectores velocidade de afastamento do foco, V_2, e afastamento da directriz, V_1. Repara que atendendo a que $d(I, \text{foco}) = d(I, \text{directriz})$ o afastamento do foco e o afastamento da directriz é feito à mesma velocidade.

Ora o movimento do ponto I é a resultante dos dois movimentos anteriores, logo definido pela soma dos vectores V_1 e V_2.

Como determinas essa soma?

Faz agora *click* sobre o botão `Bissectriz`

Ficaste com a direcção do movimento do ponto I, tangente à parábola no mesmo ponto.

b] *Faz click* sobre o botão `Ângulos` e:

- identifica os ângulos de incidência e reflexão;
- procura assegurar a sua igualdade.

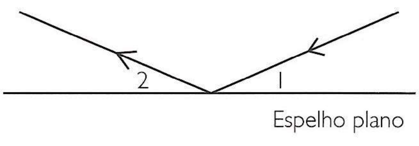


Figura 3.

Ficha 6 — As secções cónicas antes de Apolónio e com Apolónio

As origens exactas da teoria das secções cónicas são um tanto ou quanto nebulosas, mas parecem estar ligadas ao problema da duplicação do cubo.

O célebre problema da duplicação do cubo teve origem na Grécia Antiga e é também conhecido por *problema de Delos*.

Diz a lenda que uma delegação da cidade de Atenas deslocou-se ao oráculo em Delos para perguntar como poderia ser combatida a peste que dizimava a cidade.

Ainda segundo a lenda, o oráculo respondeu que o altar de Apolo, que tinha forma cúbica, deveria ser duplicado.

Os atenienses terão construído um novo altar com o dobro da aresta, mas daí resultou um cubo oito vezes maior ... e a peste não foi eliminada.

1. Identifica o erro cometido pelos atenienses e encontra a solução correcta do problema da duplicação do cubo.

O problema permaneceu para além da lenda e consistia em determinar, *geometricamente*, a medida da aresta de um cubo que tivesse o dobro do volume de um cubo dado.

Hipócrates de Quios (séc.V A.C.) esteve entre os primeiros a atacar o problema. Descobriu que o problema pode ser resolvido com dois meios proporcionais entre dois números a e $2a$, ou seja com a determinação de dois números x e y verificando a condição

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

2. Verifica que se for a a aresta do cubo dado, x será a aresta do cubo de volume duplo.

Para isso completa:

$x^2 = \ldots\ldots$

$xy = \ldots\ldots$

e resolve o sistema das duas equações.

Como vês a solução do problema com Hipócrates de Quios está na intersecção de duas curvas, hoje por ti conhecidas como ....

Como obter essas curvas?

Estamos no séc.V A.C. e os gregos dispõem apenas de dois processos para obter curvas:

— Composição de movimentos uniformes

— Intersecção de superfícies geométricas conhecidas

Só mais tarde, séc. IV A.C., Menecmo descobre uma família de curvas, das quais aquelas duas fazem parte, cortando um cone circular recto por um plano perpendicular a uma geratriz. Os diferentes tipos de curvas eram obtidas consoante a *abertura* do cone.

Cerca de um século e meio depois Apolónio na sua obra prima *As cónicas* mostrou que de um único cone podem ser obtidas todas as três espécies de secções cónicas, simplesmente variando a inclinação do plano da secção. Aqui tens as secções cónicas tal como as estudaste.

3. Recorda mais uma vez como se podem obter as três cónicas a partir de um único cone circular recto.

Notas

1. As fichas correspondentes às apresentadas para a elipse e a hipérbole, podem ser encontradas na página do Pavilhão do Conhecimento-Ciência Viva em *Projectos — Pencil*. Uma vez aqui basta aceder aos links: *mais — materiais produzidos*.
2. As animações em *flash* podem ser encontradas na página do Atractor em `www.atractor.pt/stereoP/imgs/icons/menus/outros-flash.htm` e `www.atractor.pt/stereoP/descri/candeeiro-net.htm`
3. Os ficheiros `Parab1` e `Parab2` estão disponíveis na revista *on-line*.

Manuela Ribeiro
ES3 Padre António Vieira
Grupo de Trabalho de Geometria da APM