

Uma regra de perspectiva inédita

João Pedro Xavier

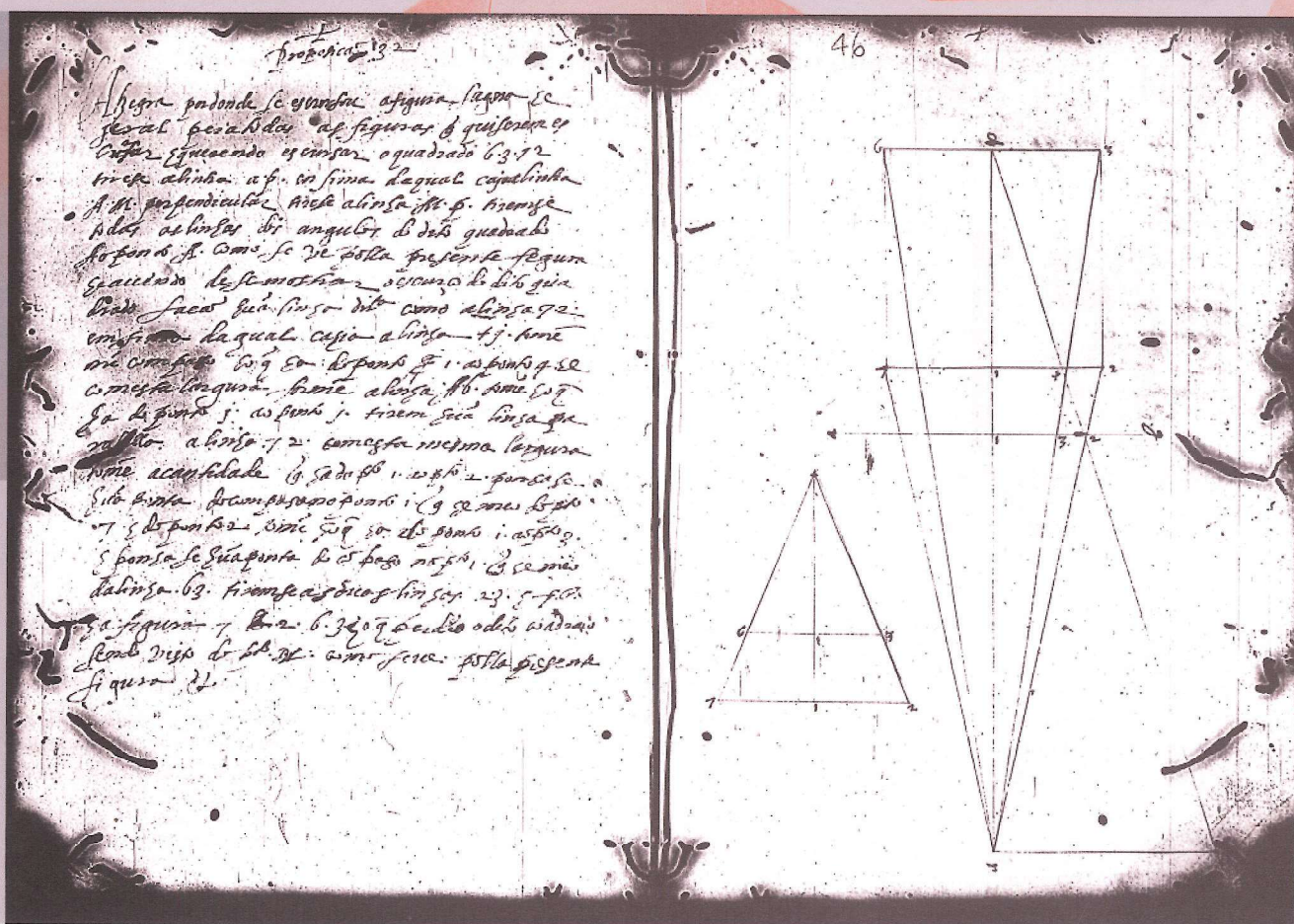


Figura 1. Proposição 32 do Livro de Perspectiva [BN. Cód. 3675. fol. 45v e fol. 46r]

A proposição 32 do Livro de Perspectiva do Tratado de Arquitectura de António Rodrigues¹, de 1576², descreve o conjunto de procedimentos a seguir para se obter a perspectiva de um quadrado, cujos vértices se identificam com os números 6, 3, 7 e 2 (figura 1).

Acompanhem os, actualizando a transcrição do texto e do desenho original, e isolando cada um dos passos da construção.³

E querendo *escursar* o quadrado 6.3.7.2,

- 1) tire-se a linha $A.P$
- 2) em cima da qual caia a linha $A.M$ perpendicular,
- 3) tire-se a linha $M.P$
- 4) tirem-se todas as linhas dos ângulos (vértices) do dito quadrado ao ponto A
- 5) e havendo de se mostrar o *escorço* do dito quadrado façam uma linha direita (recta) como a linha $7''.2''$ em cima da qual caia a linha $1''.1'''$
- 6) tomem num compasso o que há do ponto 1 ao ponto 4
- 7) e com esta largura formem a linha ab
- 8) tomem o que há do ponto 1 ao ponto $1'$, tirem uma linha paralela à linha $7''.2''$, com esta mesma largura
- 9) tomem a quantidade que há do ponto $1'$ ao ponto $2'$, ponha-se uma ponta do compasso no ponto $1''$ que é meio do ponto $7''$ e do ponto $2''$
- 10) tomem o que há do ponto $1'$ ao ponto $3'$ e ponha-se uma ponta do compasso no ponto $1'''$ que é meio da linha $6''.3''$
- 11) tirem-se as duas linhas $2''.3''$ e $7''.6''$
- 12) a figura $7''.2''.6''.3''$ é o que perdeu o dito quadrado sendo visto do ponto A como se vê pela presente figura.

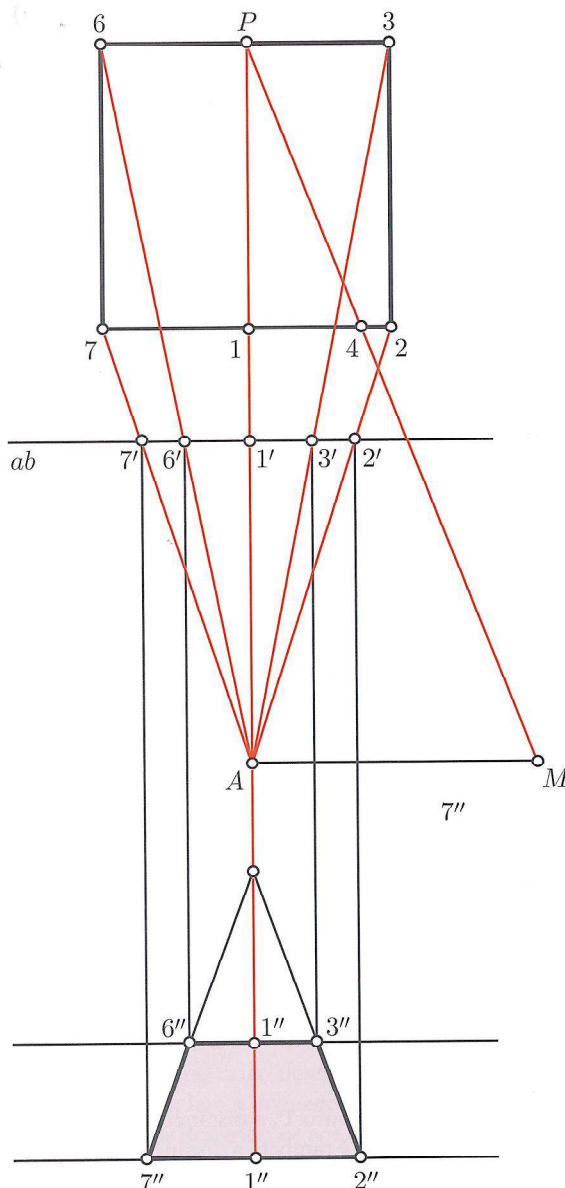


Figura 2. Desenho actualizado da proposição 32.

Como a *regra* em causa, a primeira das duas apresentadas no *Livro de Prespectiua*⁴, é susceptível de nos causar alguma estranheza, vale a pena analisar, em pormenor, cada um dos passos identificados ...

1] tire-se a linha $A.P$

A é o pé do Observador⁵ e, por conseguinte, parece estar definida a relação do Observador com o quadrado: posição e distância recíprocas. Parece estar, digo, porque na realidade não está como adiante teremos ocasião de comprovar.

De acordo com as definições iniciais do *Livro de Perspectiva*, a linha $A.P$ é a *linha cêntrica*. Como a referida linha passa por P , ponto médio do lado 6.3, é seguro afirmar que o quadrado se apresenta simetricamente em relação ao Observador.

2] em cima da qual caia a linha $A.M$ perpendicular

Esta operação corresponde, em linguagem actual, ao rebatimento do Plano Visual Principal sobre o Plano de Terra. Mas também se pode dizer, aproximando-nos mais do que seria a linguagem da época, que passámos a ter o perfil sobreposto à planta. Nesta projecção ortogonal de perfil a linha $A.P$ representa o Plano de Terra e a linha $A.M$ (que nela cai na perpendicular) representa o Plano Neutro. M é o Olho⁶. A medida de $A.M$ é a altura a que se encontra o Olho ou a altura do Observador. O segmento $1.P$ representa o quadrado visto de perfil. Como coincide com a linha $A.P$ podemos afirmar que a figura está contida no Plano de Terra.

3] tire-se a linha $M.P$

A linha $M.P$ é um raio visual traçado no perfil. Corresponde à *linha de distância*, de acordo com a definição de Rodrigues.

Trata-se de uma definição peculiar, que procura relacionar o Observador com o Objecto, completamente estranha ao conceito de distância conforme a definição original de Alberti para a qual o que conta é a distância do Observador ao Quadro. Definição esta que prevaleceu.

Note-se que até ao momento o Plano do Quadro ainda não foi mencionado. Nem será.

4) tirem-se todas as linhas dos ângulos (vértices) do dito quadrado ao ponto A
Trata-se do traçado da projecção horizontal dos raios visuais que unem o pé do Observador a cada um dos vértices do quadrado: A.7, A.6, A.3 e A.2.

5) e havendo de se mostrar o escorço do dito quadrado façam uma linha direita (recta) como a linha 7".2" em cima da qual caia a linha 1".1"

Passámos, neste momento, para a perspectiva propriamente dita com o pedido de traçar duas linhas perpendiculares entre si: a linha 7".2" e a linha 1".1". Em linguagem actual diríamos que o pedido se refere ao traçado da Linha de Terra (LT) e da Linha Principal (LP).

Optei por fazer coincidir o traço do Plano Visual Principal no Plano de Terra (a *linha cêntrica*) com a Linha Principal fazendo, no fundo, o desdobramento da Linha de Terra. No original, a perspectiva do quadrado está situada no quadrante inferior esquerdo do fólio.

6) tomem num compasso o que há do ponto 1 ao ponto 4

Voltámos ao perfil. O ponto 4 é a intersecção do raio visual $M.P$ com a linha coincidente com a projecção horizontal do lado 7.2 do quadrado. Embora o Autor não o indique sabemos que essa linha corresponde à posição do Quadro no perfil e, por conseguinte, o ponto 4 será o traço do raio visual $M.P$ no Quadro. Como o ponto 1 é a projecção do lado 7.2 visto de perfil e o ponto P do lado 6.3, o segmento 1.4 será, adaptando a linguagem de Rodrigues, *o que perdeu a figura vindo-se do ponto A*. Na verdade não é de A que a figura é vista mas sim de M , que é o Olho, mas é evidente que é isso que se quer referir.

7) com esta largura formem a linha ab

Limitemo-nos a seguir as instruções e tracemos, na planta, uma linha ab paralela ao lado 7.2 do quadrado à distância correspondente à medida 1.4. Ou seja, em planta, 1.4 será igual a 1.1'.

É evidente que o fazemos com alguma perplexidade pois não conseguimos descortinar de imediato qual poderá ser o serviço que a referida linha nos poderá prestar...

8) tomem o que há do ponto 1 ao ponto 1'

O que há do ponto 1 ao ponto 1', a distância do lado 7.2 à linha ab , sabemos nós que é também a distância que no perfil vai do ponto 1 ao ponto 4, ou seja, aquilo que a figura *perdeu* vista de M .

tirem uma linha paralela à linha 7".2". com esta mesma largura

Perfeito. Voltámos à perspectiva e aí, com esta mesma medida, tracemos uma paralela à linha 7".2". Designemo-la por linha 6".3" já que será sobre essa linha que se irá situar, garantidamente, a perspectiva do lado 6.3 do quadrado.

9) tomem a quantidade que há do ponto 1' ao ponto 2'

Ficamos agora a perceber o que é, e para que serve a linha ab . Representa o Quadro em projecção horizontal e, por conseguinte, a medida 1'.2' sobre ab é a projecção da medida 1.2 correspondente a metade do lado 7.2 do quadrado representado em projecção horizontal.

Não se descortina, para já, o motivo que levou o Autor a pedir para colocarmos a linha ab à distância 1.4 do lado 7.2 do quadrado⁷...

ponha-se uma ponta do compasso no ponto 1" que é meio do ponto 7" e do ponto 2"
Voltámos de novo à perspectiva. Com a medida 1'.2' tomada anteriormente, colocando a ponta do compasso no ponto 1", médio de 7".2", poderemos localizar o ponto 7" e o ponto 2" e assim definir a perspectiva do lado 7.2.

Confirma-se que a linha ab é efectivamente a representação do Quadro em projecção horizontal, ou seja, LT.

10) tomem o que há do ponto 1' ao ponto 3'

Novamente na linha ab ... o segmento 1'.3' sobre esta linha é a projecção de $P.3$ metade do lado 6.3 do quadrado que se encontra mais distante.

e ponha-se uma ponta do compasso no ponto 1" que é meio da linha 6".3"

De regresso à perspectiva para se definir o lado 6.3: com centro no ponto 1" e raio igual a 1'.3', medida tomada sobre ab , localizamos o vértice 6" e o 3".

Desconcertante!...

O Quadro não tem no perfil a mesma posição que apresenta em planta!

Lembro que no perfil passava pelo ponto 1, intersecção de $A.P$ com 7.2; em planta é a linha ab .

Pergunta-se: será que isto pode ser?...

Adianto que a resposta é positiva e será isso que me proponho demonstrar a seguir. Mas, para já, confiando na possibilidade do traçado, passemos à etapa seguinte...

11) tirem-se as duas linhas 2".3" e 7".6"

Para concluir o *escorço* do quadrado basta traçar os lados 2".3" e 7".6".

12) a figura 7".2".6".3" é o que perdeu o dito quadrado sendo visto do ponto A como se vê pela presente figura.

Note-se que o lado 7".6" e o lado 2".3" são prolongados intersectando-se, naturalmente, no Ponto Principal — ponto de fuga das rectas de topo (ou ortogonais ao Quadro). No entanto, de acordo com a descrição, depreende-se que este ponto não foi utilizado na construção.

Nem sequer se faz referência ao prolongamento dos lados do quadrado. No entanto, em desenho isso foi feito e poderá dever-se a uma certificação do rigor do traçado. Ademais, a distância do ponto 1, médio de 7.2, a este ponto, teria de ser igual à medida $A.M$, correspondente à altura do Plano do Horizonte. E, de facto, é. Verifique-se o original (figura 1). Isso constitui uma prova irrefutável de que o desenho é preciso.

Acompanhada que foi, a par e passo, a descrição constante na proposição 32 para se *escursar* um quadrado ficaram, como assinalai, duas importantes questões por esclarecer:

- o condicionamento na colocação da linha ab (representativa do Quadro em planta) indicado no 7º passo da construção;

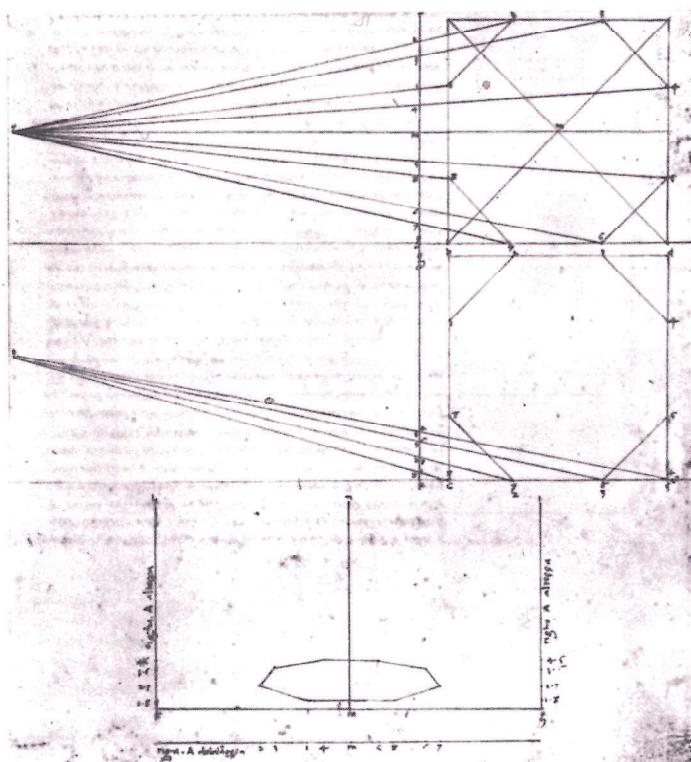


Figura 3. Perspectiva de um octógono regular segundo a *costruzione legittima*. Piero della Francesca. De Prospectiva Pingendi, c. 1460. Tenrema XLVI

- o posicionamento distinto do plano do Quadro em planta e no perfil.

Abordarei, seguidamente, esta última questão, sem dúvida a mais essencial, porque sem a certificação da possibilidade de operar com uma posição variável do Quadro na projecção horizontal e na projecção de perfil não é possível validar a regra de Rodrigues.

Não há dúvida de que, à semelhança da *costruzione legittima*⁸, o caminho para a obtenção da perspectiva por via da sua regra é feito *con la pianta e profilo e per via della intersega-zione*⁹ (figura 3).

Só que o desencontro do posicionamento do Quadro em ambas as projecções é um claro desvio em relação à essência desta verdadeira regra. Com efeito, deixa de ser possível a articulação das duas projecções ortogonais e, naturalmente, os raios visuais representados em projecção horizontal não se correspondem com os da projecção de perfil e reciprocamente. Mas o que é notável é que apesar de não estarmos em presença de uma dupla projecção ortogonal sistematizada, a construção perspéctica exposta não deixa de ser válida, já que as distâncias horizontais que se vão buscar à linha que representa o Quadro na respectiva projecção são passíveis de ser combinadas com as distâncias verticais que se vão colher na linha que o representa de perfil, como veremos.

Não se estranha, por isso, que os *escorços* obtidos por esta regra, presentes no *Tratado*, tenham verosimilhança,

apesar do processo poder ser considerado pouco canónico se comparado com a construção clássica, a dita *costruzione legittima*.

E como não haveriam de ter se estão correctos!?

Sempre utilizando como referência a figura da proposição 32, generalizável a outros polígonos, verifiquemos então se é ou não possível fazer a sua restituição perspéctica, ou seja, comprovar se o seu *escorço* corresponde ou não a um quadrado.

Note-se que no novo desenho que agora apresento atualizei por completo a linguagem e a nomenclatura¹⁰ tendo atribuído outras designações aos elementos geométricos em presença (figura 4). Tive igualmente o cuidado de fazer uma translação lateral da projecção de perfil para clarificação da leitura mas deixei-a, também, sobreposta à projecção horizontal tal como acontece no desenho de Rodrigues.

Primeiramente, confirma-se o que o Autor já tinha verificado: os lados ortogonais do quadrado convergem para o Ponto Principal (PP). Referi há pouco que isso se poderia dever a uma certificação do rigor do traçado. E poderá. Mas também pode ser um gesto que visa demonstrar a correcção da construção perspéctica em si mesma.

Determinado o PP pode traçar-se a Linha do Horizonte (LH) e, se a figura é um quadrado, uma das suas diagonais cruzará LH num Ponto de Distância (PD). A distância do PD ao PP dá-nos a distância do Observador ao Quadro que na planta confirmamos ser igual à medida do segmento *PF*

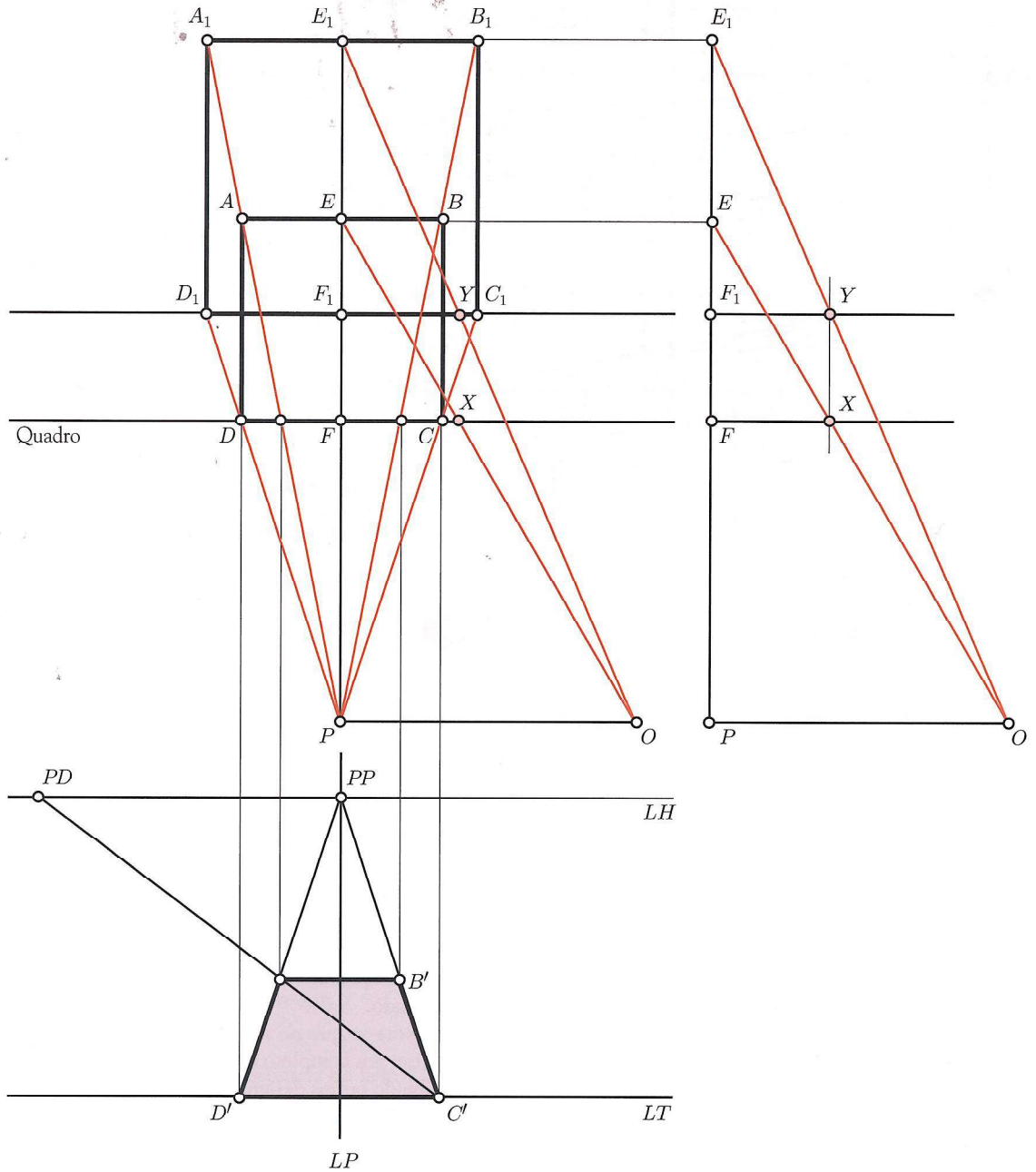


Figura 4. Interpretação da 1ª regra de perspectiva [Proposição 32]

e, por conseguinte, ficamos a conhecer com segurança a posição exacta do plano do Quadro. Também se confirma no perfil a altura do horizonte: a distância de LH a LT é a medida do segmento OP .

Como consequência do que acabei de referir conclui-se que o quadrado *escorçado* não é afinal o quadrado $A_1B_1C_1D_1$

representado em projecção horizontal mas sim o quadrado $ABCD$ (que o Autor nunca representa) homotético desse, cujo lado CD pertence a LT , sendo o centro de homotetia a projecção horizontal do Observador ou o seu pé — P .

Garantida que está essa relação de homotetia, e é exactamente aqui que está o segredo(!) desta construção pers-

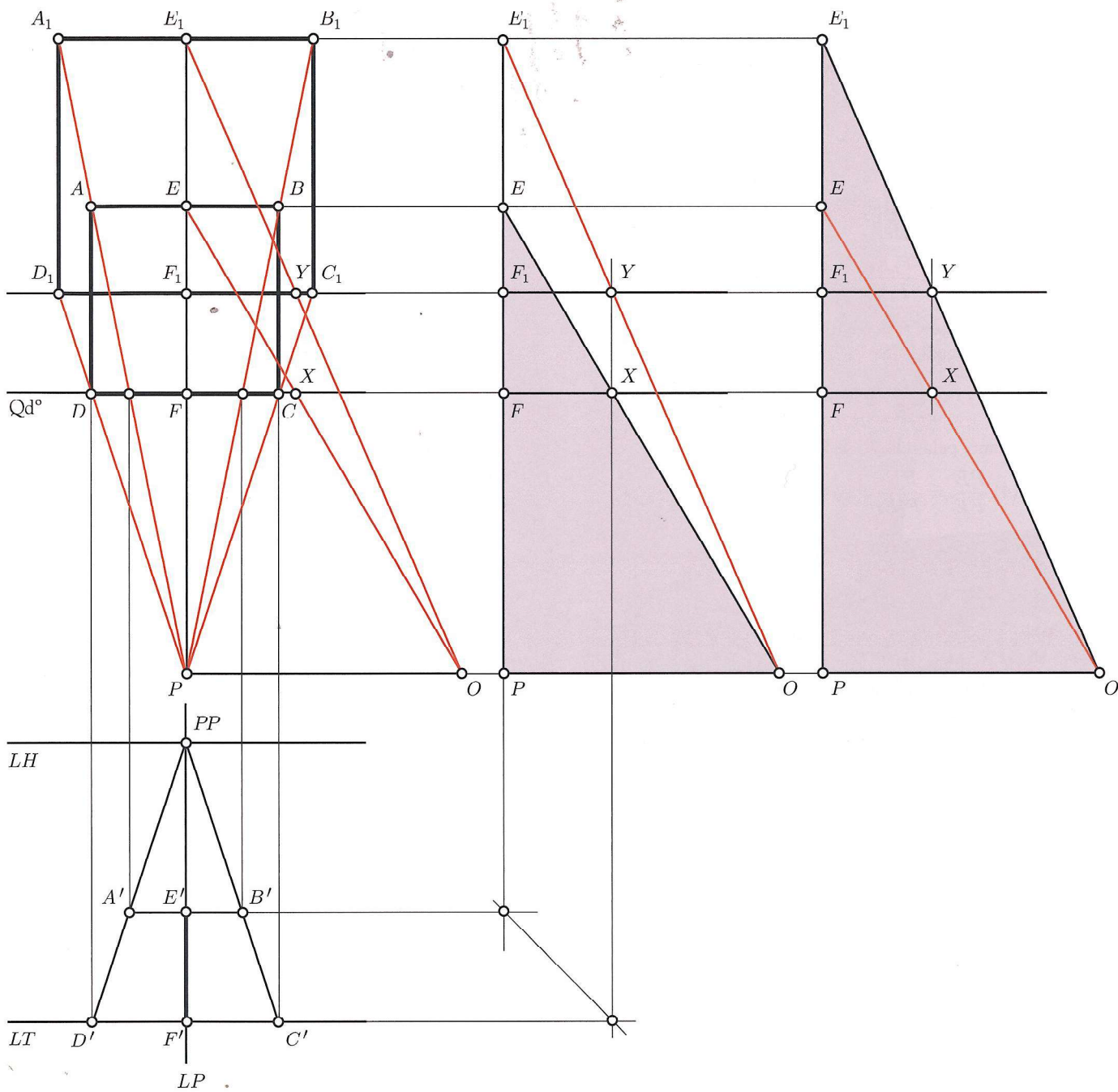


Figura 5. Da semelhança dos triângulos PEO e FEX e dos triângulos PE_1O e F_1E_1Y conclui-se que: $FX = F_1Y = F'E'$

péctica, constata-se que a escala de alturas correspondente ao afastamento das transversais paralelas ao Quadro, obtida na projecção de perfil, é sempre constante seja qual for a localização do quadrado efectivamente representado em planta. Vejamos, então, se estamos perante um teorema, ou seja, tentemos por fim certificar a universalidade da regra.

Utilizarei agora, para o efeito, um desenho com um duplo desdobramento da projecção de perfil para destacar os dois pares de triângulos semelhantes a que recorrerei no curso da demonstração (figura 5).

No caso vertente teremos então de demonstrar que, para qualquer posição do quadrado $A_1B_1C_1D_1$, homotético

de $ABCD$ na homotetia de centro P , o segmento FX será sempre igual ao segmento F_1Y .

Recorrendo ao Teorema de Thales podemos afirmar que o triângulo PEO é semelhante ao triângulo FEX , pelo que:

$$(1) \frac{PE}{PO} = \frac{FE}{FX}$$

Por outro lado, o triângulo PE_1O é semelhante ao triângulo F_1E_1Y , donde:

$$(2) \frac{PE_1}{PO} = \frac{F_1E_1}{F_1Y}$$

Destas duas relações proporcionais podemos extrair a seguinte igualdade:

$$(3) PO = \frac{PE}{FE} \cdot FX = \frac{PE_1}{F_1E_1} \cdot F_1Y$$

Como, pela relação de homotetia de centro P ,

$$(4) \frac{PE}{FE} = \frac{PE_1}{F_1E_1}$$

conclui-se a partir da expressão (3) que,

$$FX = F_1Y$$

... QED

E assim se confirmou a validade da 1ª regra de perspectiva de António Rodrigues, na verdade uma regra inédita, algo bizarra, mas, ainda assim, justa!

Notas

- 1 *Tratado de Architectura*. [Manuscrito]. BN, Cód. 3675 (microfilme F-603).
- 2 A datação e atribuição do *Tratado* deve-se a Rafael Moreira. Moreira, Rafael — *Um tratado português de arquitectura do séc. XVI (1576–79)*. Lisboa: FCSH-UNL, 1982. Mestrado em História de Arte.
- 3 A notação apresentada na primeira parte deste artigo segue a original apresentada no tratado de António Rodrigues. Ape-

nas se acrescentam plicas aos pontos para clarificação da leitura. Por exemplo: o ponto 1 aparece repetido em diferentes situações e para evitar equívocos é nomeado em cada uma delas como 1, 1', 1'' e 1'''.

- 4 Para uma análise extensiva do *Liuro de Prespectiua* de António Rodrigues ver: Xavier, João Pedro — *Sobre as origens da perspectiva em Portugal*. O Liuro de Prespectiua do Códice 3675 da Biblioteca Nacional, um Tratado de Architectura do século XVI. Porto: FAUP Publicações, 2006.
- 5 Segundo a tradição italiana este ponto designava-se por P de Piedi.
- 6 Em italiano a letra reservada para nomear este ponto era o O de Occhio.
- 7 Ver acima: passo 7) da construção.
- 8 A primeira utilização explícita da *costruzione legittima* encontra-se no *De Prospectiva Pingendi*, c. 1460 (Della Francesca, Piero — *De Prospectiva Pingendi*. Org. por G. Nicco-Fasola. Florença: Casa Editrice Le Lettere, 1984 [1ª Ed. in LIBRI, Guglielmo — *Histoire des Sciences Mathematiques en Italie*. Paris: s/e, 1841; Reprodução anastática da edição Sansoni de 1942]). É, porém, verosímil que esta construção, que depende da realização prévia de desenhos de extracção arquitectónica, como são a planta e o perfil, tenha sido utilizada anteriormente por Filippo Brunelleschi.
- 9 Vasari, Giorgio — *Le vite de' eccellenti pittori, scultori ed architetti scritte da Giorgio Vasari, pittore Aretino*. Ed. P. Barocchi. Florença: 1966, vol. 1, p. 279.
- 10 As notações actuais utilizadas são as seguintes: O — Observador (centro de projecção); $Quadro$ — Plano de Projecção; P — Pé do Observador (projecção horizontal de O); PP — Ponto Principal (intersecção do raio visual principal com o Quadro); PD — Ponto de Distância (ponto de fuga de rectas que fazem ângulos de 45° com o Quadro); LH — Linha do Horizonte (intersecção do Plano do Horizonte com o Quadro); LT — Linha de Terra (intersecção do Plano de Terra com o Quadro); LP — Linha Principal (intersecção do Plano Visual Principal com o Quadro).

João Pedro Xavier

Faculdade de Arquitectura da Universidade do Porto

Material para a aula de Matemática

A Casa da Música

O material aqui proposto foi retirado e adaptado de uma proposta disponibilizada nas páginas on-line *Matemática e Arte*, da APM (www.apm.pt).

A actividade *A Casa da Música* foi concebida por José Santos dos Santos, em 2007, e tem por base um esquema produzido pelo OMÃ, *Office for Metropolitan Architecture* que gentilmente o cedeu e autorizou o seu uso. Esta institui-

ção está interessada em receber relatos do trabalho em aulas onde o esquema seja usado. No verso da ficha encontra-se a planificação da figura que esteve na base da construção da Casa da Música. A impressão da planificação é fundamental para a utilização deste material.

Deixamos aqui o desafio: use a actividade e relate a experiência.