Às voltas com noções a aptidões geométricas no cubo...

Paulo Dias

Será que ainda não vimos tudo o que há no cubo? *Tudo o que há num cubo...* foi um artigo de Eduardo Veloso, publicado na *Educação e Matemática* nº 26, em 1993, uma actualidade que se tornou recomendada nos programas de Matemática A e Matemática B, em 2004.

No programa de Matemática B, a "Geometria inclui assuntos de geometria sintética e métrica, geometria analítica e trigonométrica, com as competências de cálculo numéricas a elas associadas" (DES, 2001, p. 2). Nesta disciplina, ao nível da Geometria, preconiza-se o desenvolvimento das seguintes competências matemáticas: a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis, a computadores e calculadoras gráficas; a aptidão para utilizar a visualização, a representação e o raciocínio (espacial ou outro) na análise e tratamento de situações problemáticas e na resolução de problemas. Também, é sugerido que no tema de Geometria se insista no trabalho por via intuitiva com uma grande ênfase no desenvolvimento de capacidades de visualização geométrica.

Os episódios de aula relatados neste texto dizem respeito a aulas do 10º ano de uma turma de Matemática B (10º A4), no entanto, a actividade desenvolvida pelos alunos podia, com as devidas adaptações, ser proposta a alunos de qualquer ano. Na Matemática B, com o intuito de consolidar e fazer uso de conhecimentos essenciais do 3º ciclo, existe um Módulo inicial, onde um dos enunciados dos problemas propostos é o seguinte: "Que relação existe entre o volume de um cubo com o do tetraedro cujas arestas são as diagonais faciais do cubo? Que polígonos é possível obter cortando um tetraedro por um plano paralelo a duas arestas? Qual o perímetro e a área dos polígonos que constituem as secções?" (DES, 2001, p. 19). Para obter a resposta a este problema foi necessário fazer um longo caminho, os alunos envolveram-se em várias actividades, construíram intuitivamente noções geométricas e desenvolveram as suas aptidões geométricas. Exploraram "um dos sólidos mais simples e mais conhecido, supostamente, é o cubo" (Veloso, 1993, p. 26).

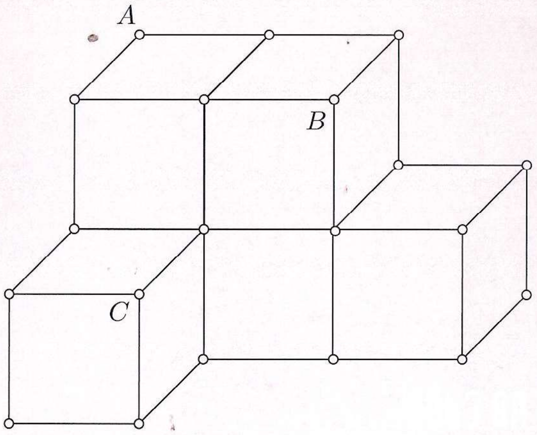


Figura 1

Figura 2

Vamos empilhar cubos

A figura 1 representa um conjunto de cubos empilhados, quantos cubos são necessárias para a reproduzir? A questão é simples e pode assumir vários graus de complexidade, com mais ou menos cubos, consoante a faixa etária dos alunos. Este "monte" de cubos, expressão usada pelo João (aluno do 10° A4), é fácil de construir com material manipulável (*polidrons* — figura 2) e pode ser colocado em posições distintas. Depois de empilhar os vários cubos, representa no papel o que vês quando te colocas na vista de cima. E do lado esquerdo, observas o mesmo? (figura 3)

Esta capacidade de visualização, que está relacionada com a percepção das relações espaciais (Matos & Gordo, 1993), pode ser trabalhada com os alunos do primeiro ciclo ou do pré-escolar. No secundário, verifiquei que a generalidade dos alunos do 10° ano não a detém. Por um lado, porque não conhecem as diferentes perspectivas que os ajudam a representar no papel o que se vê, não distinguem as regras a que é necessário obedecer (por exemplo na perspectiva cavaleira ou na perspectiva do ponto de fuga). No caso da perspectiva cavaleira, os alunos tendem a desenhar o cubo com todas as arestas em verdadeira grandeza, esquecendo que "as faces de frente para o observador são em verdadeira grandeza e as arestas paralelas são representadas por segmentos paralelos" (Loureiro *et al.*, 1997, p. 78). Por outro lado, os alunos têm dificuldade em conhecer as propriedades que permitem distinguir os diferentes objectos geométricos.

Planificação do cubo

Mas, afinal o que é um cubo? Disse-me o Miguel. É um poliedro regular, convexo, com 8 vértices, 12 arestas e 6 faces. Desisto — disse o Miguel. Não, espera! Sabes o que é um quadrado? — disse. O Miguel responde que sim. Ah — retorquiu o Miguel — Já sei, um cubo é um conjunto de 6 quadrados! Não, não, ... Um cubo é ... um cubo. E fui explicando ao Miguel, — Não é verdade que qualquer disposição de 6 quadrados adjacentes podem formar um cubo. Às disposições de 6 quadrados chamam-se hexaminós, existem 35 figuras nessas condições e com apenas 11 delas é possível obter o cubo. E entrámos numa nova actividade de investigação: quais as disposições de seis quadrados que formam um cubo? (figura 4)

A Neise resolve colocar a questão "fatal", com a qual, todos os anos, me confrontam: — para que é que isto serve? A resposta surge através de um problema: "Uma formiga está no centro de uma face do cubo que tem 10 centímetros de aresta. A certa altura decide mudar-se para o centro de outra face, passando por todas as outras faces. Contudo,

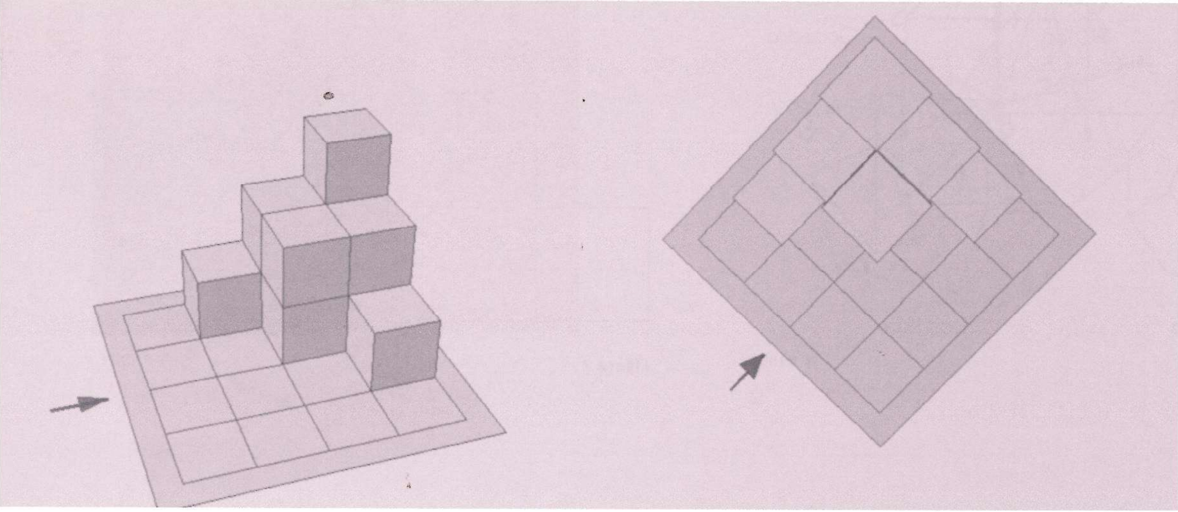


Figura 3.

a formiga tem receio dos vértices e por isso nunca passa a menos de um centímetro deles. Qual é o trajecto mais curto que a formiga consegue fazer? (O problema deste número, *Educação e Matemática* n° 41).

O caminho mais curto, são problemas de optimização que podem ser usados com outros sólidos, desenhar a planificação (figura 5) permite a visualização de possibilidades que, no modelo ou na representação em perspectiva, podem não ser perceptíveis. — Porque usamos tanto o cubo? — O Cubo é-nos mais familiar e é mais fácil de desenhar, de compreender e de relacionar, é por isto que usamos o cubo tantas vezes. Não terás de saber qual o trajecto mais curto de uma formiga, mas podes querer saber onde deve passar o fio, numa sala, para ligar a lâmpada à tomada (sem que o fio fique suspenso) e propus um novo problema.

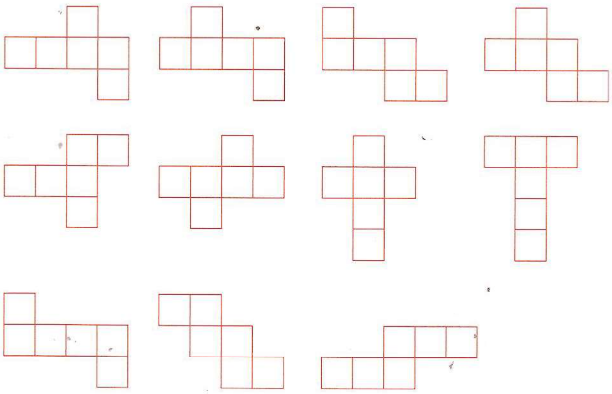


Figura 4

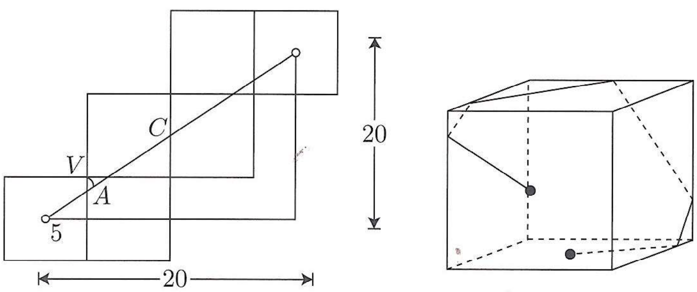


Figura 5

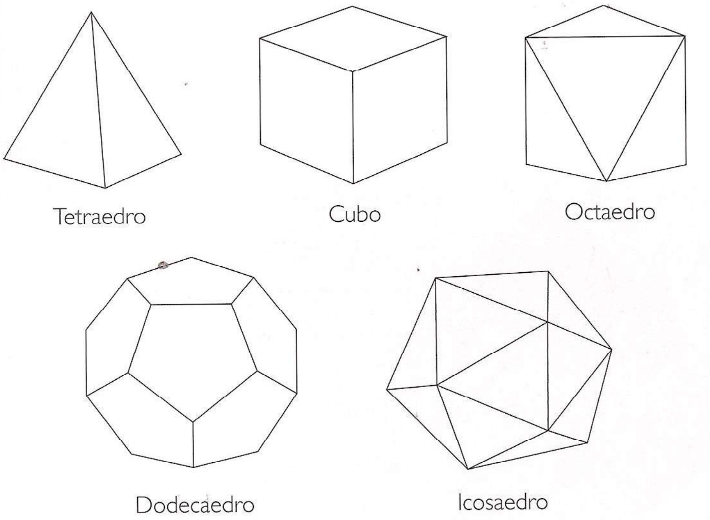


Figura 6.

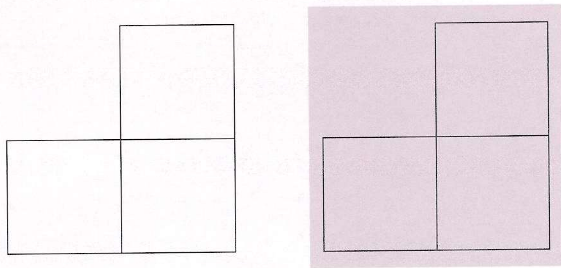


Figura 7

A fórmula de Euler

Em qualquer poliedro convexo, o número de faces F, o número de arestas A e o número de vértices V verificam a condição $F + V - A = 2$. A Marisa (aluna), que gosta de ter definições para tudo: — Stor, Stor, eu posso escrever que todos os poliedros que verificam a fórmula de Euler são regulares. — Não, Não. Todos os poliedros convexos verificam a fórmula de Euler, mas apenas cinco são regulares (figura 6).

O céptico do Pedro (aluno): — Como é que o professor pode afirmar que existem apenas cinco? — Vamos iniciar uma nova investigação: Quantos poliedros regulares existem? (na mesma condição que o cubo) E porquê? Se voltarmos aos hexaminós, a concorrer num mesmo vértice temos no máximo três faces quadradas (figura 7), porquê? Para poder dobrar e construir o cubo. Ora, com quatro faces quadradas já não era possível dobrar, a figura era plana e a soma dos ângulos internos era de 360°.

Ana: — Então para poder dobrar temos de ter menos de 360°. Logo, poliedros regulares com faces quadradas, só existe o cubo. Vamos repetir com o triângulo equilátero, com o pentágono regular, o hexágono regular, o heptágono regular, etc... o que verificam? Três hexágonos, a soma dos ângulos internos é 360°, logo não é possível construir um poliedro regular. Então, temos o Tetraedro, o Cubo, o Octaedro, o Dodecaedro e o Icosaedro. — O cubo não está sozinho! Exclamou a Liliana.

Duais

Os duais resultam de um procedimento fácil de compreender e que é acessível à maioria dos alunos. Os duais envolvem figuras complexas e atraentes, através delas os alunos fascinam-se com a harmonia da geometria. Qual o dual do cubo? E o que é um dual? Jorge: o octaedro encaixa perfeitamente no cubo. Com o auxílio de *software* de Geometria ou de *applets* (figura 8) disponíveis na Internet foi possível explorar, com relativa facilidade, a intuição geométrica dos alunos a este nível. No entanto, o desenvolvimento da noção de ponto central de uma face do cubo faz apelo a noções que são assumidas como primitivas e que alguns alunos têm dificuldades em apropriarem-se delas.

A representação da figura 9 foi realizada pelo Jorge, a propósito de uma investigação dos duais, realizada numa aula com computador.

O cubo e a medida

O que significa para um aluno dizer que o ponto central de uma face é o ponto equidistante dos 4 vértices contidos nessa face, ou das 4 arestas dessa face? No caso desta turma, a preocupação da generalidade dos alunos foi a de saber quanto mede a aresta do cubo. Para eles, só era possível saber se a distância é a mesma sabendo a medida.

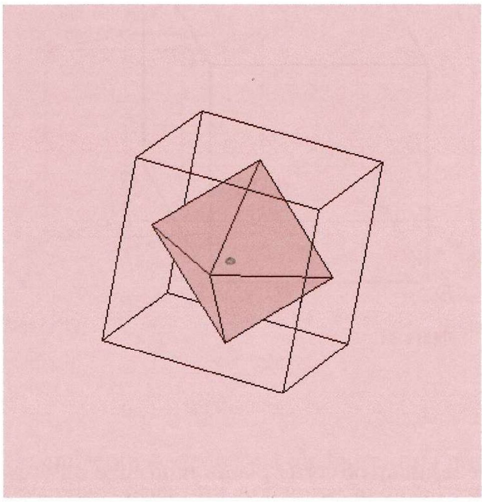


Figura 8.

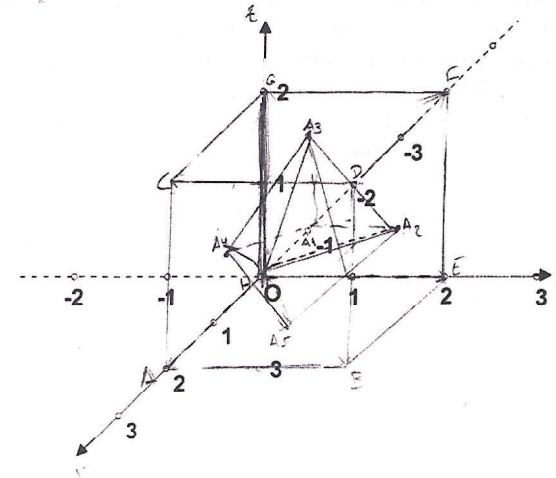


Figura 9.

A necessidade de ultrapassar questões deste tipo implicou a seguinte tarefa: Quais as medidas das diagonais de um cubo de aresta 1? E de aresta 2? E de aresta a? A generalização pela intuição é uma prática corrente em determinada faixa etária, e com alguns conteúdos. Assim, a informação quantitativa passou a ser uma relação métrica entre elementos de uma figura. A medida ajudou a compreender que, independentemente do comprimento da aresta do cubo, o ponto central da face existe e é identificável. Mas, os cálculos foram importantes. Os alunos aprenderam que a medida da diagonal da face (figura 10) é $\sqrt{2}a$, a medida da diagonal espacial é $\sqrt{3}a$, o perímetro da face $4a$, a área da face a^2 e a área lateral... E a área total... E o volume...

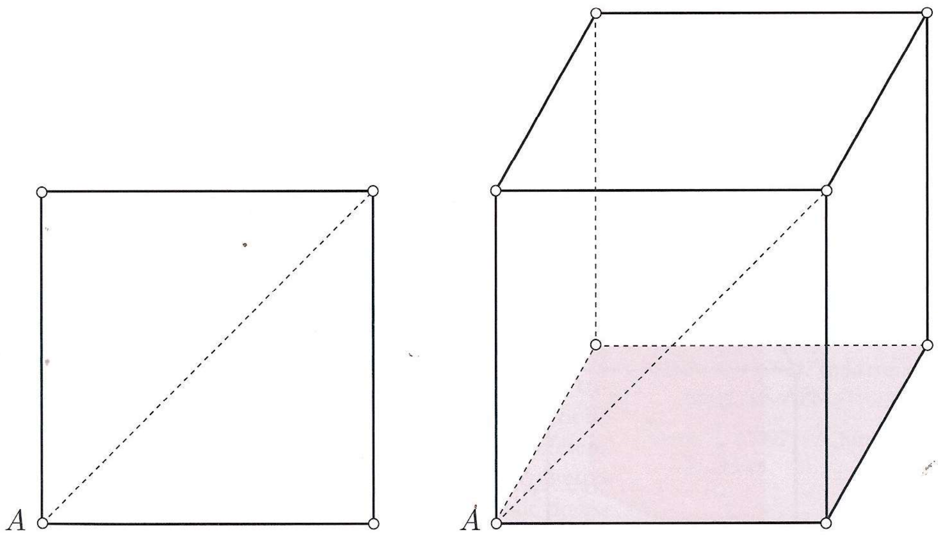


Figura 10

Paralelismo e perpendicularidade

O tema que precedeu as secções no cubo (figura 11). Como dizer aos alunos que a secção que se obtém no cubo por corte, através de um plano paralelo a uma face, é um quadrado — sem as noções de paralelismo e perpendicularidade. Inicialmente, existe alguma confusão entre paralelismo e perpendicularidade, mas intuitivamente, verifica-se que os alunos confundem os nomes e não as noções. Um exercício típico, e que se pode encontrar em vários manuais, é o seguinte: Na figura ao lado está representado um cubo. Utiliza as letras dos vértices para indicar, se possível: dois planos paralelos; dois planos concorrentes perpendiculares; dois planos concorrentes não perpendiculares; uma recta aposta a um plano; uma recta perpendicular a um plano; duas rectas não complanares; e duas rectas concorrentes não perpendiculares.

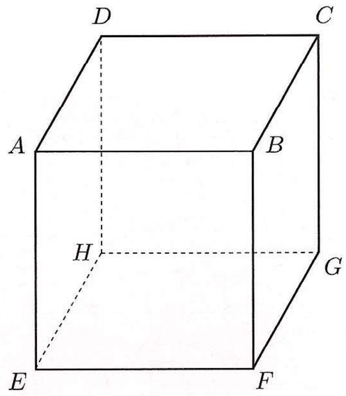
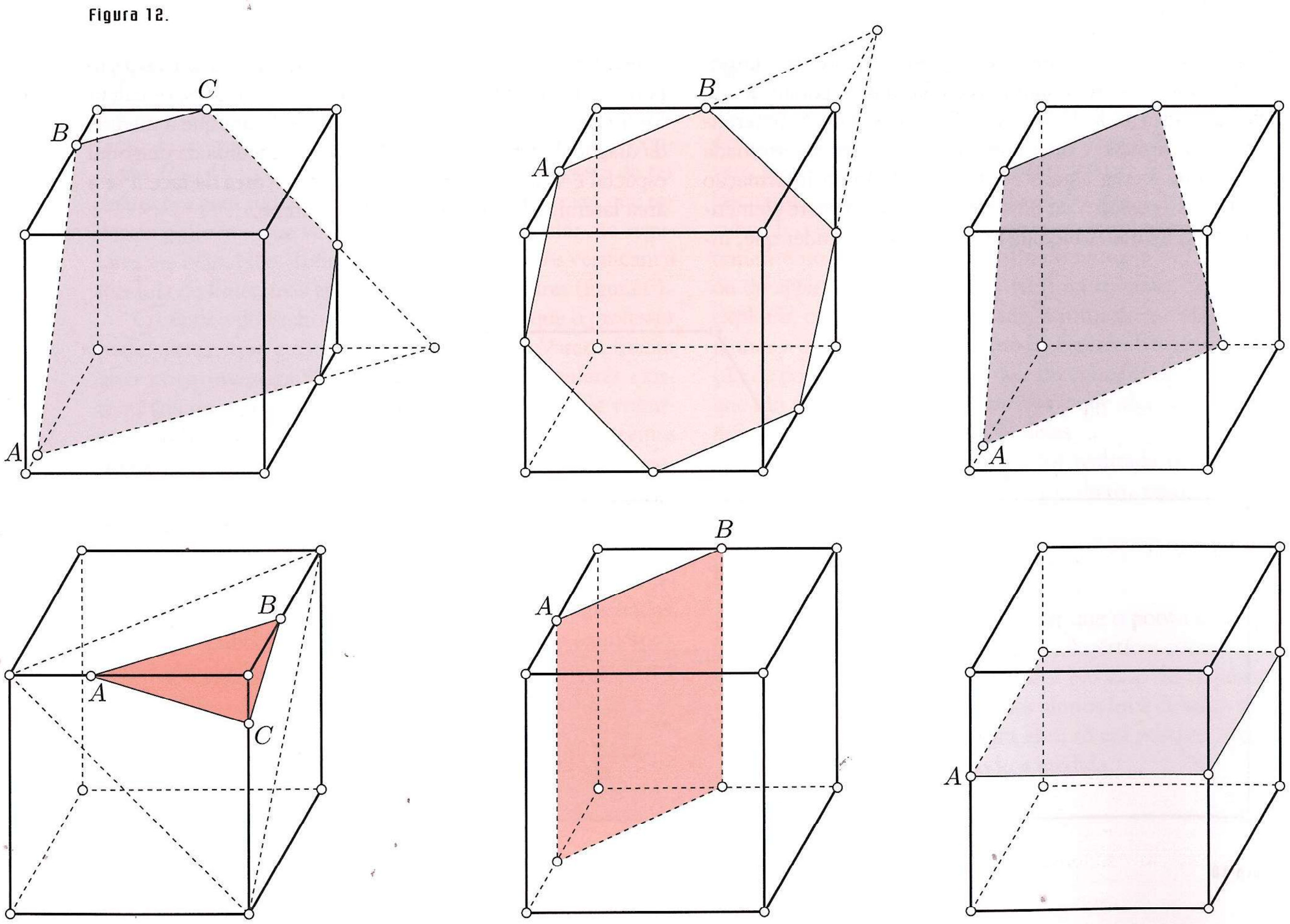


Figura 11.

Secções no cubo

As secções (figura 12), vulgarmente designadas por *cortes*, permitem observar propriedades que na visualização espacial ou na representação através das perspectivas são difíceis de identificar. Eduardo Veloso, em 1993, identifica os polígonos que resultam de cortes planos num cubo e as, respectivas, propriedades dos planos. Os alunos tiveram oportunidade de explorar estas secções em duas vertentes: usando os cubos de enchimento e uma aplicação computacional,

Figura 12.



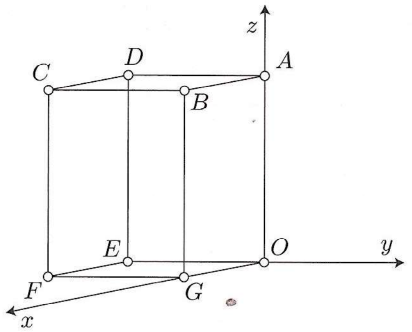


Figura 13.

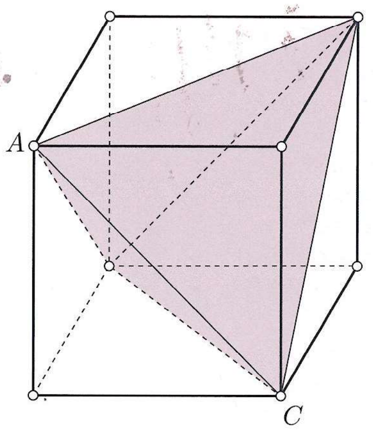


Figura 14.

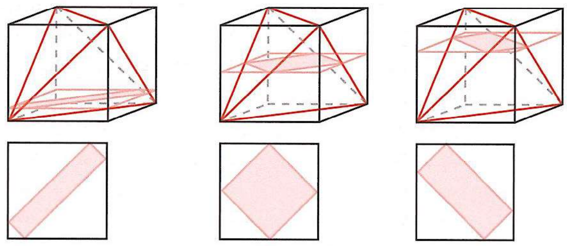


Figura 15.

em ambiente de geometria dinâmica. Esta metodologia esteve relacionada com a organização da aula: cinco computadores e cinco cubos em acrílico, para dezoito alunos. Enquanto uns alunos viam as secções, pré-construídas em *GSP* (*Geometer's Sketchpad*), onde podiam movimentar os pontos A e B (figura 12) e assim responder a perguntas numa ficha de acompanhamento, outros alunos, enchiam os cubos, experimentavam as diferentes posições do cubo (do plano de corte) e caracterizavam a secção obtida.

Nos sólidos de enchimento, a maior dificuldade é a de colocar a quantidade certa de líquido para caracterizar o pentágono e o hexágono. — Impossível encontrar o hexágono! Referiu o Miguel várias vezes. O João, enquanto trabalhava com a aplicação em *GSP*, afirmou: — Stor, isto tem quadriláteros que nunca mais acaba... É quase verdade... Os alunos colocaram o ponto A em muitas posições diferentes e tiveram alguma dificuldade, no ambiente computacional, em distinguir trapézios, rectângulos e quadrados. O que foi ultrapassado quando usaram os cubos acrílicos e através do meu apelo para que os alunos escrevessem as propriedades que permitem distinguir os diferentes quadriláteros. Nesse dia, o entusiasmo dos alunos foi grande, mas eu repeti vezes sem conta: — vamos mudar o cubo de posição... a secção é a mesma?

Coordenadas no plano e no espaço

René Descartes (1596–1650) trouxe para o estudo da Geometria Analítica os referenciais cartesianos. Qual é o objecto matemático que usei, com maior frequência, para identificar as coordenadas dos vértices num referencial tridimensional? O CUBO. O centro do cubo num referencial do espaço, um vértice a coincidir com a origem do referencial, sei lá..., as inúmeras posições que usei. A Geometria Analítica abre, ao nível do 10° ano, a possibilidade do estudo dos lugares geométricos: plano mediador, esfera, esfera inscrita no cubo, superfície esférica (circunscrita) e inscrita ao cubo, etc... Embora, em Matemática B, este tema não tenha sido aprofundado (figura 13).

Voltando ao problema inicial, que relação existe entre o volume de um cubo com o do tetraedro cujas arestas são as diagonais faciais do cubo (figura 14)? Que polígonos é possível obter cortando um tetraedro por um plano paralelo a duas arestas? Qual o perímetro e a área dos polígonos que constituem as secções?

Fez parte de uma actividade de investigação e avaliação em que os alunos deveriam escrever um relatório. Os resultados (figura 15) foram muito significativos, a generalidade dos alunos concluiu que: os "cortes" só podiam ser triângulos e quadriláteros (esquecendo o facto do plano ser paralelo a duas arestas do cubo); e o perímetro da secção obtida é sempre o mesmo (para quem aprofundou os quadriláteros).

No relatório do Gonçalo lia-se:

$$V_{tetraedro} = V_{cubo} - 4 \times V_{pirâmide}$$

porque o tetraedro tem 4 vértices e o cubo tem 8 vértices, logo ao cubo é necessário tirar 4 para obter o tetraedro. Este aluno encontrou no cubo, através da sua intuição, um tetraedro e 4 pirâmides, que mais haverá no cubo?

Bibliografia

Loureiro et al. (1997). *Geometria — 10° ano de escolaridade*. DES.

Matos, J. & Gordo, F. (1993). Visualização espacial: algumas actividades. *Educação e Matemática* n° 26. APM.

Ministério da Educação (2003). *Programa de Matemática B*. DES.

Veloso, E. (1993). Tudo o que há num cubo... *Educação e Matemática* n° 26. APM.

Viana, J. (1997). A formiga no cubo. *Educação e Matemática* n° 41. APM.

Paulo Dias
Escola Secundária da Moita