Piero della Francesca e a Geometria Projectiva[1]

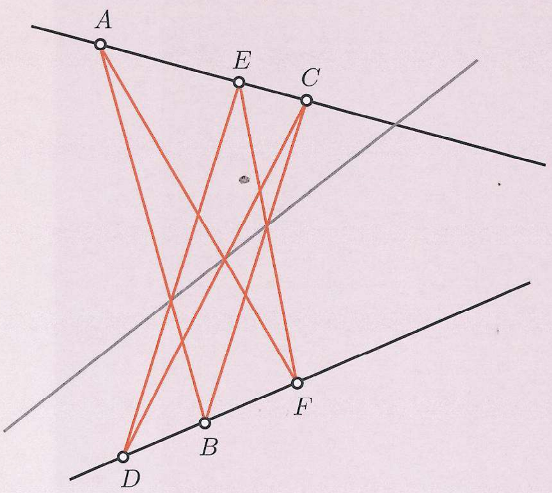
Eduardo Veloso

Introdução

Embora a geometria projectiva, como teoria matemática, seja resultado dos trabalhos de Jean-Victor Poncelet (1788–1867) nos inícios do séc. XIX, é habitual afirmar-se que as suas origens remontam ao século XVII, quando Desargues publica as suas ideias sobre novos métodos na geometria, em particular o estudo das secções cónicas como resultantes da projecção central de uma circunferência e a invenção do infinito: "quando, num plano, nenhum dos pontos de uma recta está a distância finita, dizemos que a recta está a distância infinita"[2].

No entanto, isto não significa que matemáticos anteriores não tenham tratado de questões que mais tarde vieram a enquadrar-se na geometria projectiva. Um exemplo é o teorema de Papo (c. 290–c. 350) de Alexandria, o último dos matemáticos gregos do helenismo (ver caixa). Neste artigo, pretendo mostrar como Piero della Francesca, nas instruções que dá aos pintores sobre a forma de construir a imagem perspectiva de diversos polígonos, define uma transformação que não é mais do que uma transformação projectiva de um plano sobre si próprio.

Teorema de Papo



Se os vértices de um hexágono ABCDEF estão alternadamente sobre duas rectas, então os pares de lados opostos encontram-se em três pontos colineares.

Notas

1. Adopta-se uma definição de polígono em que os lados podem encontrar-se em pontos diferentes dos vértices.
2. A demonstração baseada nos *Elementos* de Euclides é muito trabalhosa. Na geometria projectiva este teorema é uma consequência quase imediata do teorema fundamental da geometria projectiva.[3]

Figura 1. Detalhe de um fresco na Igreja de S. Francisco, em Arezzo.

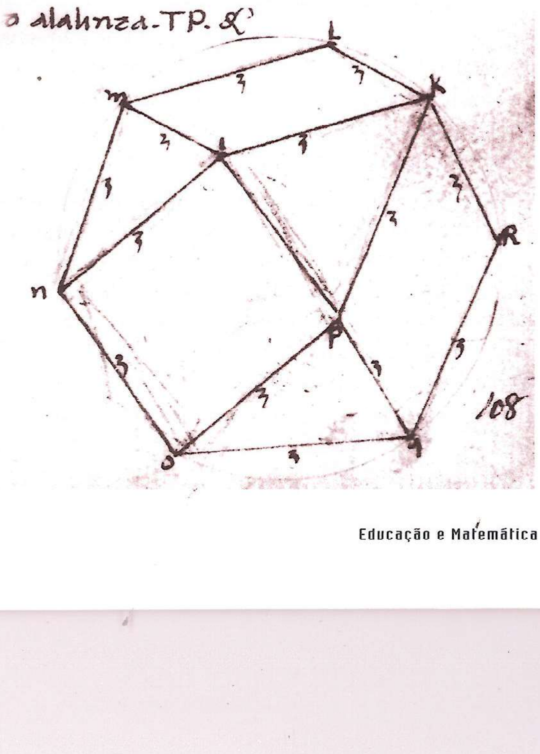


Figura 2.

Piero della Francesca (c. 1413–1492) foi simultaneamente um grande pintor — embora relativamente ignorado até ao fim do séc. XIX, devido ao carácter moderno da sua pintura (figura 1) — e um grande matemático. Nasceu em Borgo San Sepulcro (a cerca de 100 km de Florença), e preencheu a sua vida a pintar e — presume-se, pois não se sabe quais as fontes do seu conhecimento dos matemáticos gregos — a estudar latim e geometria euclidiana pela edição latina dos *Elementos*. Escreveu em vernáculo (isto é, em italiano da época) pelo menos três tratados que chegaram até nós:

- *Trattato d'abaco* — uma espécie de manual escolar de matemática comercial e técnicas práticas de geometria para as chamadas "escolas de ábaco"; estas escolas tinham aparecido em Itália, na segunda metade do séc. XIII, com o objectivo de preparar jovens para o trabalho

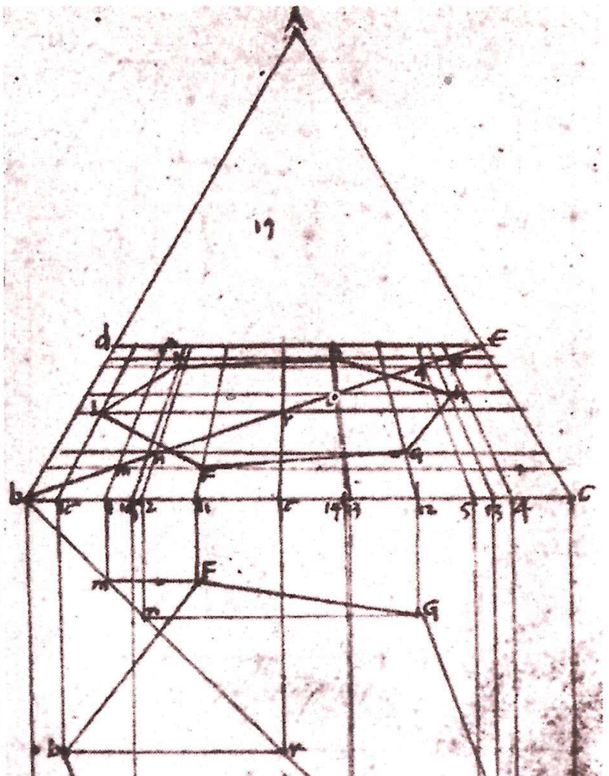


Figura 3. Ilustração da Prop. I.19. De Prospectiva Pingendi.

na sociedade comercial que iniciava o seu rápido desenvolvimento e eram uma alternativa às tradicionais escolas "latinas", onde se ensinava gramática e retórica em latim; a figura 2 mostra a ilustração de Piero que acompanha um problema sobre o cuboctaedro;

- *Libellus de quinque corporibus regularibus* (*Tratado dos Cinco Sólidos Regulares*) — problemas geométricos postos em termos numéricos, que se referem em grande parte aos poliedros regulares, mas que exigem conhecimentos de geometria plana e do espaço; este tratado foi usado (plagiado, diríamos hoje) por Luca Paciolli, um contemporâneo e conterrâneo de Piero della Francesca;
- *De Prospectiva Pingendi* (*Da perspectiva em pintura*) — um tratado sobre a perspectiva linear, que mostra preocupações de estabelecer uma relação com a tradição da matemática grega; o estilo é o de um livro para formação

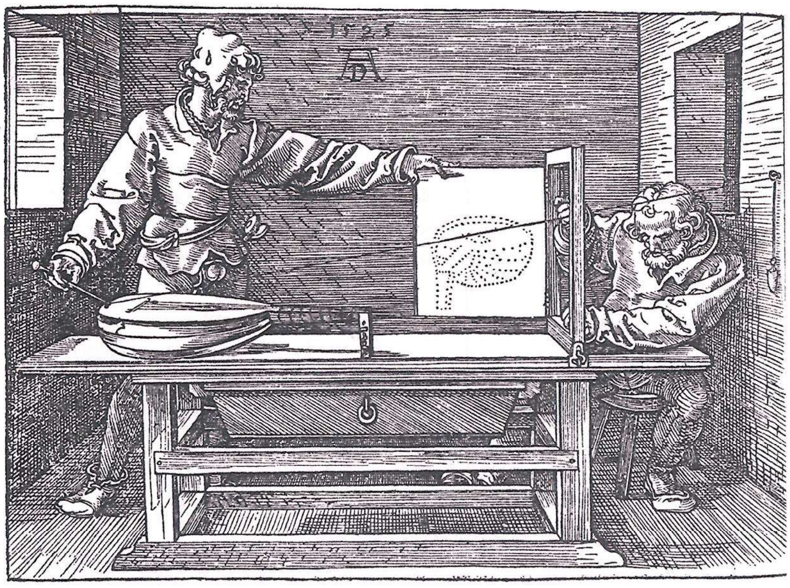


Figura 4. Perspectógrafo de Dürer.

de pintores em perspectiva, com instruções detalhadas sobre as diversas construções (figura 3), mas ao mesmo tempo segue claramente a tradição dos Elementos, apresentando uma sequência de proposições (enunciados e demonstrações).[4]

Não é possível desenvolver aqui, mesmo brevemente, as experiências pioneiras em perspectiva do arquitecto Filippo Bruneleschi (1377–1446) — de que não existem quaisquer textos originais —, nem do humanista e arquitecto de Florença Leon Battista Alberti (1404–1472), o primeiro a fazer uma exposição escrita do método da perspectiva para representar a realidade tridimensional no plano do quadro do pintor. Digamos apenas que Piero della Francesca foi o primeiro a adoptar, embora num livro de instruções para pintores — o tratado *De Prospectiva Pingendi* —, um ponto de vista verdadeiramente científico, nomeadamente geométrico, na sua concepção da perspectiva linear. Vamos apenas referir as proposições desse tratado que nos permitem chegar, o mais brevemente possível, ao nosso objectivo: mostrar a transformação projectiva que Piero criou na segunda metade do século XV, mais de trezentos anos antes de Poncelet.

Perspectiva de um quadrado horizontal

Como sempre, na origem de tudo está um problema. No caso de Bruneleschi, Alberti e Piero, o que experimentavam e procuravam eram métodos de desenho que permitissem pintar rigorosamente num quadro, que suporemos vertical e quadrado, o espaço e os objectos tridimensionais que o pintor via enquadrados pelos seus lados. Dürer inventou com esse objectivo o chamado perspectógrafo (figura 4) (que qualquer de nós, graças à Associação Atractor, pode ver se quiser).[5] Pensemos num exemplo extremamente simples, que é o de um quadrado horizontal — o chão de um

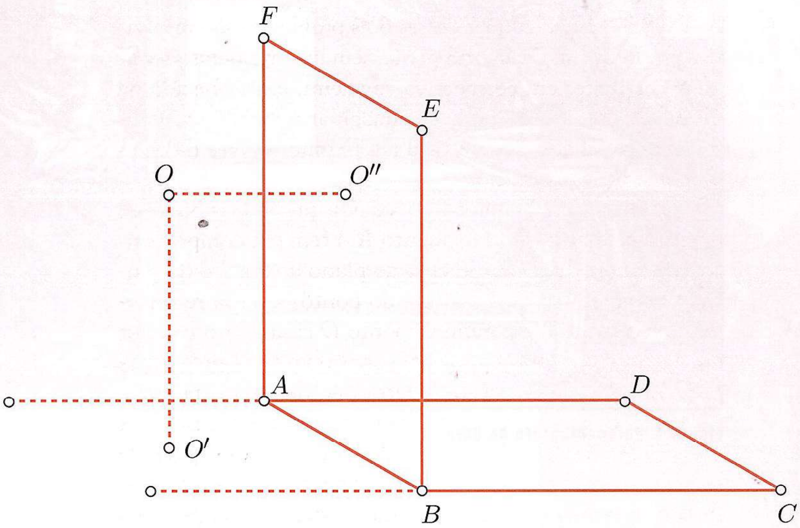


Figura 5.

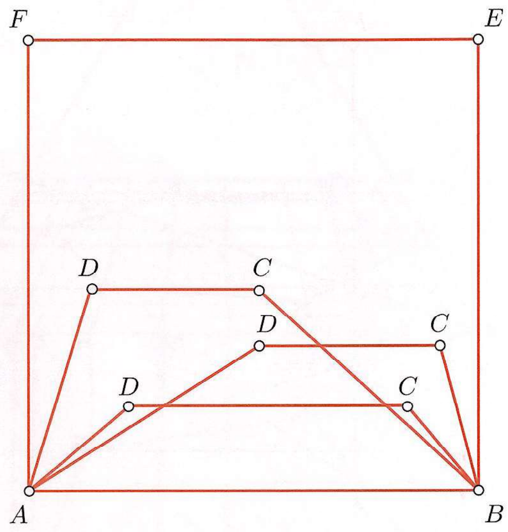


Figura 6.

quarto ou o tampo de uma mesa, muito frequentes em pinturas da época. Embora rapidamente possamos perceber que tipo de figura iremos ver como representação do quadrado, sem um auxiliar mecânico deste tipo teremos que encontrar uma construção rigorosa, no plano, para a traçar.

Mais concretamente, observemos a figura 5. O plano vertical do quadro do pintor é $ABEF$ e está assente sobre o bordo AB do tampo quadrado $ABCD$ de uma mesa horizontal. O ponto O é o ponto de vista do pintor (acrescentámos as projecções ortogonais O'' e O' desse ponto de vista, respectivamente sobre o plano do quadro e sobre o plano horizontal, para se ver melhor em perspectiva cavaleira a posição do ponto O). Note-se que se o pintor não pode utilizar um processo mecânico, como o do perspectógrafo de Dürer, apenas tem diante de si um quadro quadrado $ABEF$ e sabe que o tampo horizontal ABCD é um quadrado igual. O problema — como obter a imagem do quadrado horizontal no plano do quadro? — reduz-se portanto a saber onde deverão ser desenhados no quadrado $ABEF$ as imagens dos vértices C e D do quadrado horizontal, (pois é óbvio que os pontos A e B se representam a si mesmos no quadro do pintor). Para quem já tem alguma facilidade em visualização espacial — como era certamente o caso de Piero —, é quase óbvio que CD vai ser um segmento paralelo ao segmento AB. Mas diversas posições são possíveis... e diversos comprimentos também, como na figura 6! Como determinar a imagem verdadeira de CD?

Resumindo, temos agora dois problemas:

1. A que distância de AB fica o segmento CD?
2. Qual o comprimento de CD?

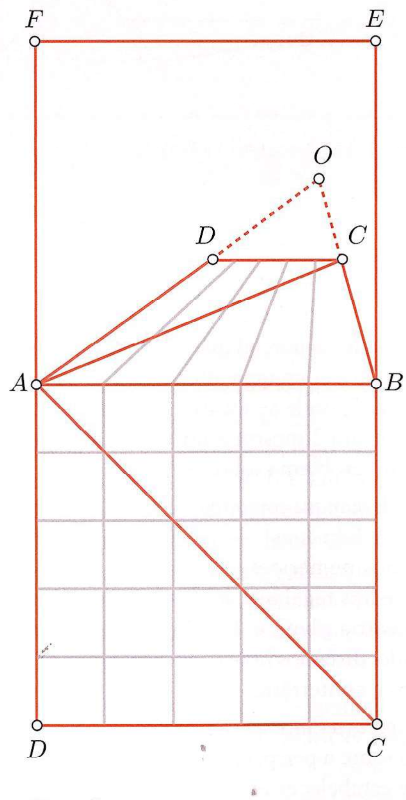


Figura 8a.

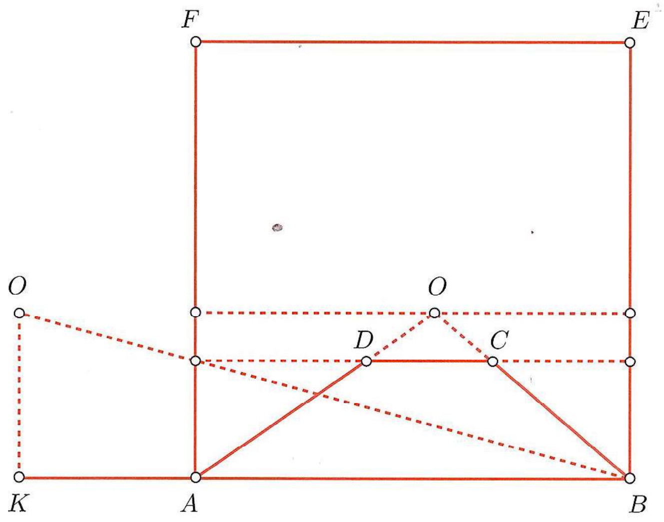


Figura 7.

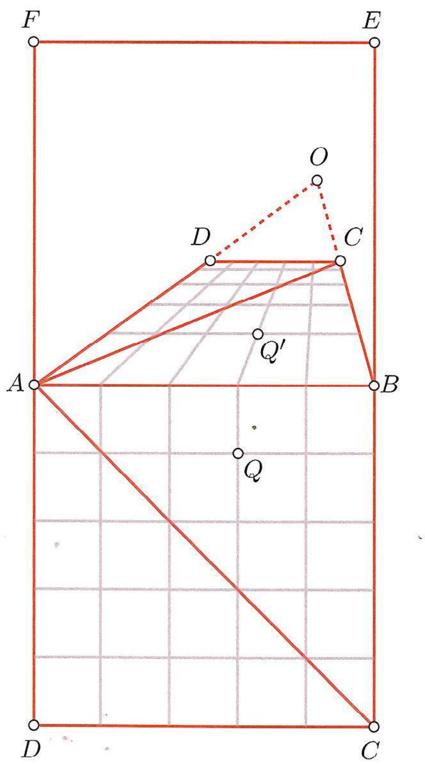


Figura 8b.

Piero resolve estes dois problemas nas suas proposições I.12 e I.13, com demonstrações rigorosas de resultados já descobertos por Alberti.

Note-se que qualquer destes dois problemas são resolvidos por Piero em geometria plana, sem mostrar quaisquer figuras auxiliares em perspectiva cavaleira, desconhecida na altura. Assim, apenas podemos imaginar qual era a visualização espacial que Piero estava a ter como suporte das suas demonstrações no plano.

A solução final englobando os dois problemas pode ser descrita pela figura 7. O segmento KA tem por comprimento a distância do ponto de vista ao plano do quadro do pintor. O segmento OK é a altura do ponto de vista relativamente ao plano horizontal. O ponto O situado no interior do quadro representa a projecção ortogonal do ponto de vista O no plano do quadro (a letra que designa o ponto é a mesma, como era habitual em Piero della Francesca). A posição (em altura) da imagem do segmento CD, paralela a AB, obtém-se unindo por um segmento o ponto de vista com o ponto B e determinando a sua intersecção com AF. Finalmente, o comprimento do segmento imagem CD obtém-se por meio dos segmentos OA e OB, como indicado na figura. Assim, *o quadrado $ABCD$ no plano horizontal transforma-se no trapézio $ABCD$* no quadro do pintor (ver simultaneamente as figuras 5 e 7). Antes de Piero o ponto O (interior ao quadro) estava sempre situado a igual distância dos lados verticais do quadrado, mas esta demonstração mostra que isso não é necessário. Ou seja, esta construção é válida para qualquer posição do ponto de vista em relação ao quadro (portanto não necessariamente central). Não temos espaço para apresentar aqui as demonstrações de Piero das proposições I.12 e I.13, mas o leitor pode recorrer a um esplêndido artigo no *Mathematical Intelligencer* (e ficar a conhecer, se ainda não conhece, uma estimulante revista sobre matemática, de leitura sempre muito acessível).[6]

Perspectiva de um pavimento

Na proposição I.15 Piero dá instruções para a construção em perspectiva de um quadrado horizontal mas quadriculado, ou seja dividido num certo número de quadrados mais pequenos, por exemplo 25 (5×5). É o problema da perspectiva de um pavimento, elemento presente em tantas pinturas da época. Na figura que Piero utiliza como ilustração das suas instruções, o quadrado e o trapézio são representados numa mesma figura plana, que inclui ainda o ponto O (projecção ortogonal do ponto de vista sobre o quadro do pintor) (figuras 8a e 8b). Piero traça as diagonais AC do quadrado e do trapézio (figura 8a) e depois diz naturalmente que o "quadriculado" do trapézio se obtém unindo os pontos de divisão de AB com O e traçando em seguida paralelas a AB pelos pontos de intersecção daqueles segmentos com a diagonal (figura 8b). Como pode ver nesta última figura, ao ponto Q (vértice da quadrícula no pavimento dado) corresponde o ponto Q' no pavimento em perspectiva.

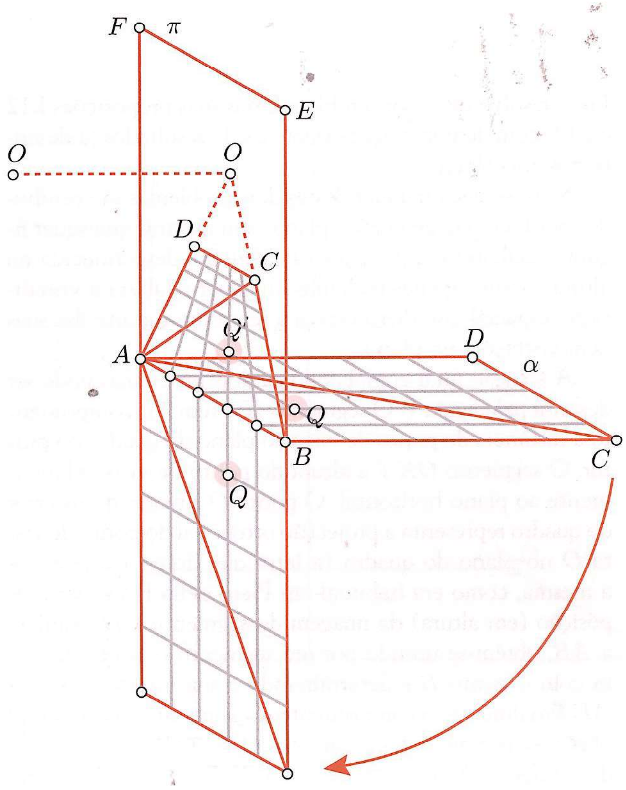


Figura 9a.

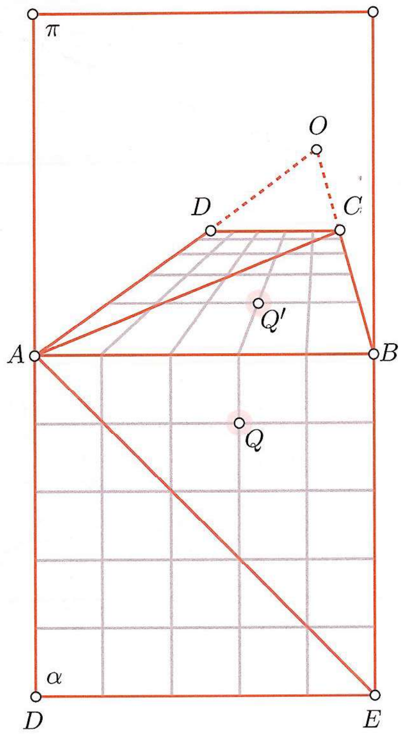


Figura 9b.

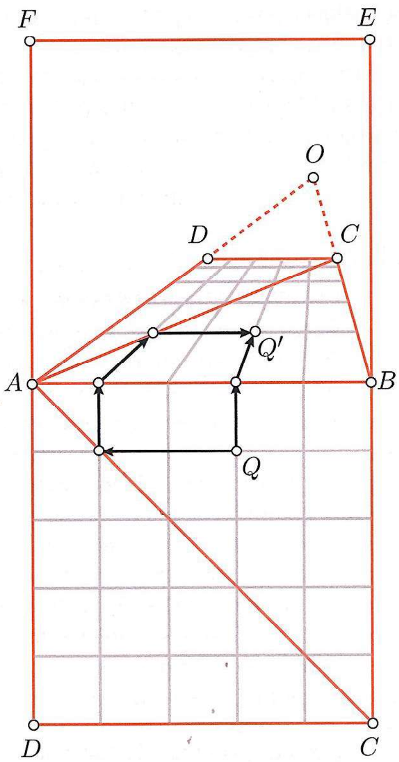


Figura 10.

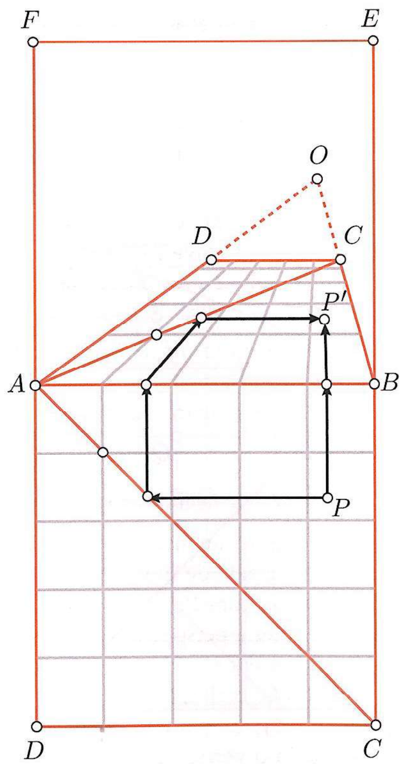


Figura 11.

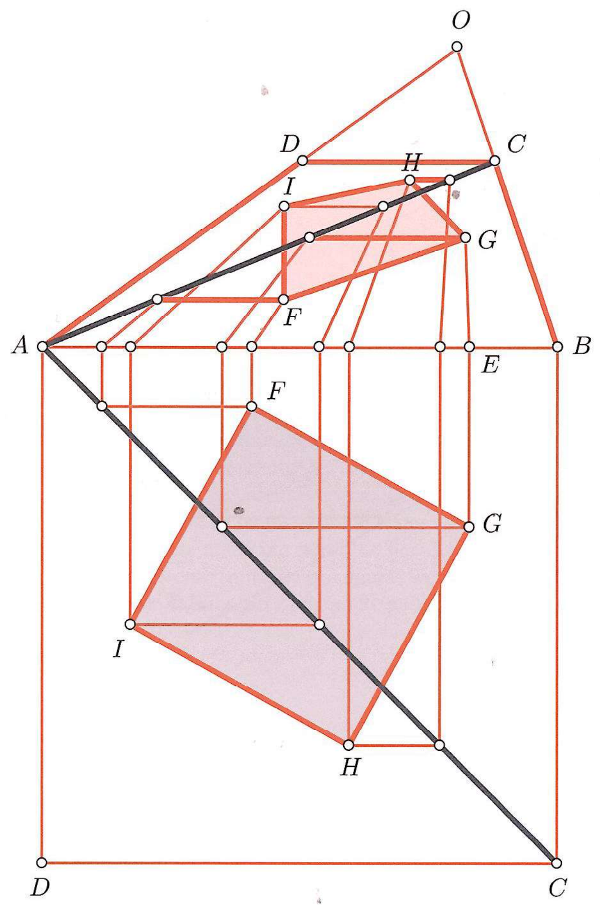


Figura 12.

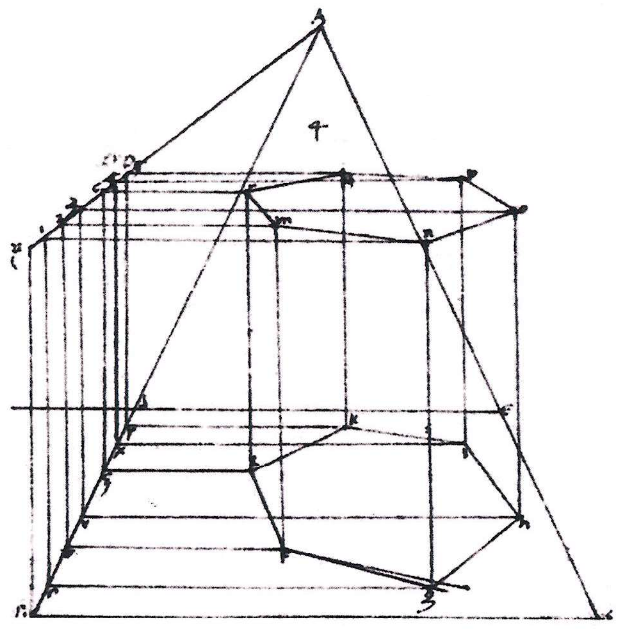


Figura 13.

Sobre a visualização no espaço que Piero estava a usar para construir esta figura plana, nada sabemos. Mas podemos imaginar (figuras 9a e 9b):

- que partia da situação de dois planos, um horizontal α e outro vertical π, onde estavam situados o quadrado e o trapézio;
- que, dado o ponto de vista O, cada ponto Q do quadrado (no plano α) ficava a corresponder um ponto Q' do trapézio: imaginar a recta que passa por O e por Q; Q' será a intersecção dessa recta com o plano π;
- finalmente, procedia a uma rotação de eixo AB e ângulo 90°, levando o plano α a coincidir com o plano π, obtendo assim a figura plana que ilustra a sua demonstração.

Perspectiva de uma figura desenhada sobre um pavimento

Estando completamente resolvida na proposição I.15 a questão do traçado de um pavimento em perspectiva, é um pequeno passo para Piero fornecer um conjunto de instruções para obter a perspectiva de qualquer figura situada sobre esse pavimento.

As próprias linhas do quadriculado e da sua perspectiva servem de guias para fazer corresponder ao vértice Q do quadriculado o vértice Q' do quadriculado em perspectiva (figura 10); e sugerem como se pode fazer corresponder a qualquer ponto P do interior ou da fronteira do quadrado o ponto P' do interior ou da fronteira do trapézio que representa o quadrado em perspectiva (figura 11). Em termos modernos, a correspondência $P \rightarrow P'$ é uma aplicação biunívoca do quadrado $ABCD$ (interior e fronteira) sobre o trapézio $ABCD$ (interior e fronteira). A aplicação $P' \rightarrow P$ (cujo traçado é evidente) é a aplicação inversa da anterior.

Seguem-se, no tratado que estamos a percorrer, uma série de proposições em que é aplicado o resultado anterior. Em particular, Piero dá instruções sobre os traçados em perspectiva de diversos polígonos situados no interior do quadrado $ABCD$: triângulo equilátero (I.18), hexágono regular (I.19), pentágono regular (I.20), quadrado (I.25), octógono (I.26). Damos como exemplo uma adaptação da ilustração de Piero para o caso do quadrado (figura 12). No livro II, Piero estende o seu método ao traçado perspectivo de prismas tendo por bases polígonos situados no interior do quadrado $ABCD$ (figura 13, caso do hexágono).

Piero trata sempre da perspectiva de figuras limitadas, nomeadamente de figuras contidas no quadrado que designámos por $ABCD$. Não sabemos, nem certamente viremos a saber alguma vez, se Piero colocou a questão de saber se a sua aplicação se podia prolongar a todo o plano. Podemos apenas constatar que no seu tratado não está explicitamente considerada essa extensão (de resto, o seu valor prático seria bem pequeno num livro de instruções para pin-

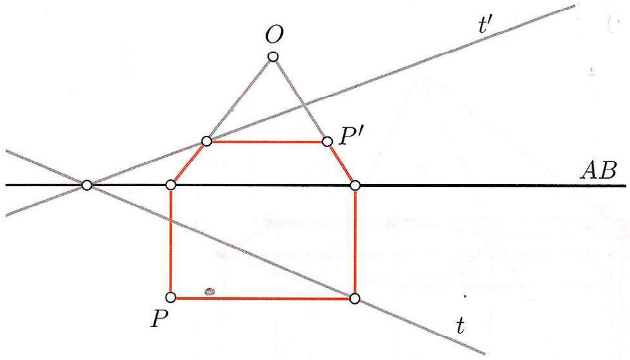


Figura 14.

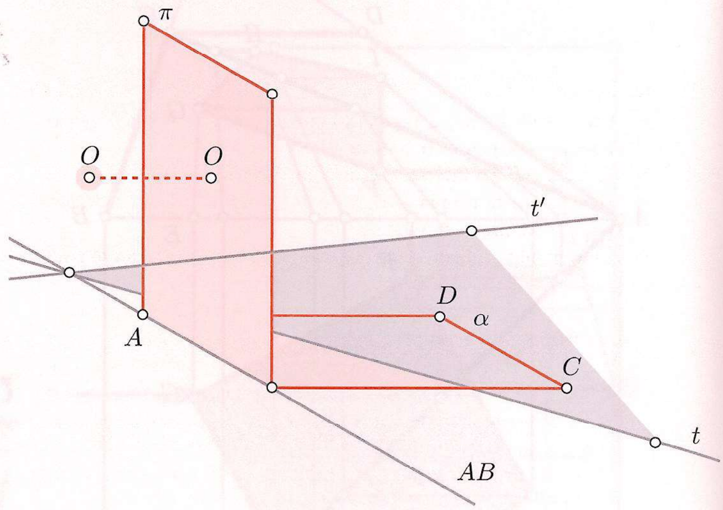


Figura 15.

tores...). Vamos estudar esse prolongamento no ponto seguinte, e veremos que é uma aplicação projectiva cuja paternidade é justo atribuir ao geómetra Piero della Francesca.

Transformação projectiva de Piero

Que problemas nos surgem quando pretendemos estender o método de Piero a todo o plano? Um problema surge imediatamente (figura 12): se o vértice G do quadrado, por exemplo, estivesse um pouco mais para o lado direito, no exterior do quadrado $ABCD$, não podíamos obter a intersecção E nem, portanto, a imagem perspectiva de G, pois o segmento EA não existia. Além disso, percebemos que na construção de Piero, além das intersecções com AB, são essenciais as intersecções com as diagonais. Assim, somos levados a fazer as seguintes alterações à situação criada por Piero (obtendo a figura 14):

- Substituímos o segmento AB pela recta AB;
- substituímos as diagonais AC (resp. do quadrado e do trapézio) por duas rectas (resp. t e t'); note-se que a diagonal do trapézio é a transformada da diagonal do quadrado pela transformação de Piero; é intuitivo que para obtermos um prolongamento da transformação de Piero a todo o plano, a recta t, que substitui a diagonal do quadrado, deve ser transformada na recta t', que substitui a diagonal do trapézio; e é óbvio, de tudo o que vimos, que para que assim seja t e t' devem ter um ponto comum sobre a recta AB;
- mantemos o ponto O como projecção ortogonal do ponto de vista sobre o quadro do pintor.

Tendo em atenção que AB, t e t' são agora rectas, a construção de Piero que faz passar de P para P' parece ser possível para todos os pontos P do plano (as intersecções fundamentais para a construção parecem existir sempre!).

Notemos ainda que, se imaginarmos que a recta t está no plano α, que a recta t' está no plano π ortogonal a α, que O é a projecção ortogonal sobre π do ponto de vista, e que a recta AB é a intersecção dos dois planos, caímos na situação espacial anterior, em que a transformação de Piero não era mais do que uma projecção central, com centro no ponto de vista (tente o leitor compreender este facto fundamental, observando a figura 15).

Em resumo: *Dadas no plano três rectas, AB, t e t', de tal modo que t e t' têm um ponto comum sobre AB, e dado ainda um ponto O, parece ficar definida uma transformação do plano sobre si próprio que é um prolongamento da transformação de Piero, que este apenas definiu para o interior e a fronteira de um quadrado. Esta transformação pode imaginar-se, tal como a de Piero, que foi obtida a partir de uma projecção central, como explicado anteriormente.*

Escrevemos "parece ficar" porque nada nos prova ainda que a construção é válida para todo o ponto P do plano. Não há nada como experimentar, e o melhor meio de o fazer é utilizar o *Sketchpad*. A figura 16 foi obtida no *Sketchpad* da seguinte maneira:

- Traçámos as rectas AB, t e t' e marcámos um ponto O como indicado anteriormente;
- construímos uma circunferência a e marcámos um ponto P sobre ela;
- pela construção de Piero (usámos uma ferramenta já preparada) obtivemos o ponto P';
- seleccionámos os pontos P e P' e pedimos (no menu *construct*) o *locus* (lugar geométrico de P' quando P percorre a circunferência a); o lugar geométrico, ou seja a

Note que:

- Os paralelogramos a vermelho apenas servem para indicar as posições dos planos α horizontal e π vertical;
- A recta AB é a intersecção dos dois planos;
- A recta t está no plano α e a recta t' no plano π, tendo um ponto comum na recta AB;
- O triângulo azul, em parte escondido pelo plano π, serve para indicar o plano definido pelas rectas t e t';
- A ortogonal a π passando pelo ponto O de π intersecta o plano das rectas t e t' num ponto (bola vermelha) que é o centro da projecção central, que faz corresponder t' a t; vemos assim que dadas num plano as rectas AB, t e t' nas condições indicadas anteriormente e ainda um ponto O, fica definida uma projecção central, como indicado nas figuras 9a e 9b; o que fazemos aqui é partir da situação da figura 9b para chegar à situação da figura 9a.

imagem da circunferência pela transformação, é no caso da figura a elipse a';

- arrastámos a circunferência para a posição b e obtivemos como imagem a hipérbole b'...; que se passa?

Voltemos à situação espacial. Recordemos que tudo começou com a procura de um método para representar no plano π as figuras situadas num plano α quando vistas a partir do ponto de vista O. Geometricamente, o que temos é uma projecção central de centro O: dado um ponto P do plano α, a sua imagem em π por meio dessa projecção central obtém-se encontrando a intersecção da recta OP com o plano π (e a transformação de Piero, que nós tentámos prolongar a todo o plano, não é mais do que um processo de desenho, num único plano — recordar as figuras 9a e 9b —, para encontrar essa imagem). O que acontece é que essa intersecção — da recta OP com o plano π — não existe para nenhum ponto de uma recta, designada por u na figura 17. Esta recta pode obter-se intersectando α pelo plano que passa por O e é paralelo a π; com efeito, as imagens de todos os pontos de u não existem, pois as rectas definidas por O e por um ponto qualquer da recta u são paralelas a π! Arriscando dizer em poucas palavras o que exigiria muitas páginas, a imaginação de Desargues conduziu-o ao seguinte:

- a imagem de qualquer recta de α (com excepção de u), por meio da projecção central, é uma recta em π:
- as imagens dos pontos de u deveriam "então" formar uma recta, mas nenhuma dessas imagens está a distância finita;
- então a imagem de u é *a recta do infinito* do plano π. A recta u é a chamada *recta de fuga* da transformação $P \to P'$.

Observações análogas, relativas à transformação inversa (que faz passar de P' em π para P em α), levariam à consideração de uma recta de fuga v no plano π, que se obtém traçando a paralela à intersecção dos dois planos passando pela projecção ortogonal do ponto de vista sobre π.

Vemos assim que:

- é possível prolongar a transformação de Piero (e a sua inversa) a todo o plano α (resp. π) se completarmos cada um dos planos com a sua recta do infinito;
- em cada um dos planos fica definida uma recta (u em α e v em π) cuja imagem pela projecção central é a recta do infinito do outro plano;
- obtemos desta forma uma bijecção entre os planos α e π, completados com as respectivas rectas do infinito.

Podemos proceder depois como já fizemos para a transformação inicial de Piero e está indicado nas figuras 9a e 9b, e obter assim uma transformação de um plano sobre si próprio (resultado da identificação dos dois planos). Este é um dos processos clássicos de obter uma transformação projectiva de um plano (aumentado com a recta do infinito) sobre si próprio. Assim, a transformação, imaginada por Piero num livro de instruções sobre perspectiva para pintores, é uma transformação projectiva. Como Desargues descreveu, a projecção central de uma secção cónica ainda é uma secção cónica, e as imagens obtidas a partir de uma circunferência pela transformação de Piero são agora naturais.

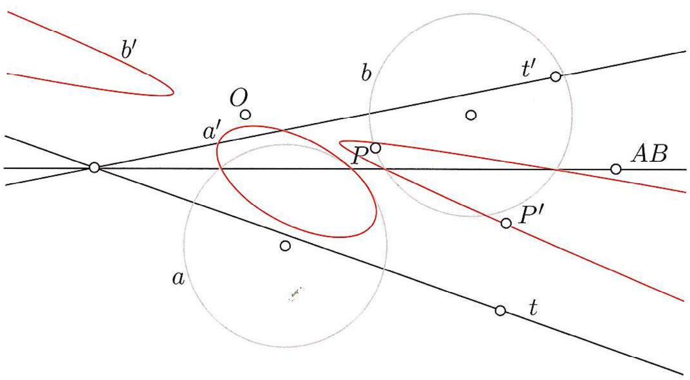


Figura 16.

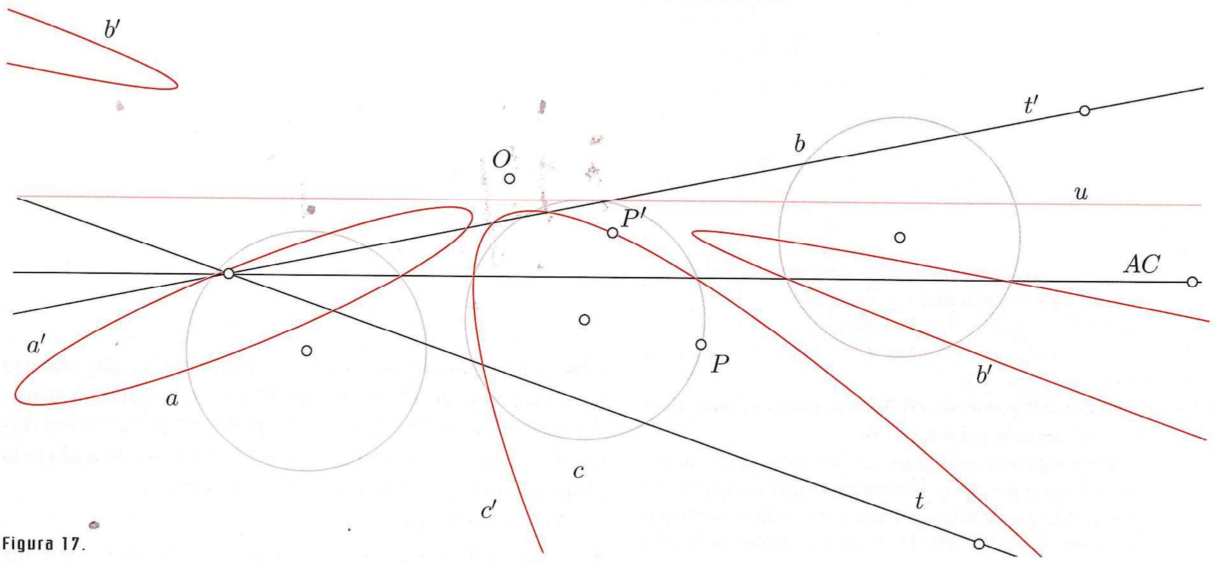


Figura 17.

Regressemos assim à figura 16 (agora chamada 17), à qual acrescentámos a recta de fuga u. Além disso, acrescentámos uma terceira circunferência c e a sua imagem c'. Constatamos que:

- a circunferência a não intersecta a recta u, e portanto todos os pontos da sua imagem pela transformação prolongada de Piero estão a distância finita: a' é uma elipse;
- a circunferência b intersecta a recta de fuga u em dois pontos, e portanto dois pontos da sua imagem estão no infinito: b' é uma hipérbole;
- a circunferência c é tangente à recta u, e portanto um dos pontos da sua imagem está no infinito: c' é uma parábola.

"Moral da história"

A geometria pode ser um tema apaixonante da matemática escolar, nomeadamente porque apresenta múltiplas conexões estreitas com temas da arte. Em particular, a geometria projectiva elementar devia ser um tema da geometria no ensino secundário, pois abre portas e revela factos que nas outras geometrias ficam encobertos — por exemplo, a invenção do infinito e a existência de três tipos de secções cónicas. É também importante na compreensão cultural — e não exclusivamente técnica — da matemática e dos seus processos, um desejável objectivo central do seu ensino a todos os cidadãos. Nesta época de reajustamentos conservadores dos programas e de objectivos economicistas na educação dos jovens portugueses, espero que os leitores possam descobrir, para lá das minhas pobres palavras, um mundo diferente e apelativo na educação matemática.

Notas

1. Este artigo resulta de uma paixão antiga pela pintura de Piero della Francesca, da descoberta feita há poucos anos do geómetra Piero e do recente trabalho, em conjunto com Rita Bastos, sobre transformações geométricas, em particular as transformações projectivas. No entanto os disparates que porventura existam neste texto são meus, não da Rita. Para acompanhar melhor a leitura deste artigo, pode recorrer ao documento *Sketchpad* de que pode fazer o *download* a partir do endereço `www.apm.pt`, na página correspondente a este artigo on-line.
2. Girard Desargues (1591–1661), *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan*, 1639.
3. Ver, por exemplo, Coxeter, *Projective Geometry*, pág. 38.
4. O presente artigo refere-se fundamentalmente a este tratado de perspectiva, sendo extraídas dele as respectivas ilustrações de Piero. Ver na bibliografia duas edições, uma em italiano e outra em francês, numa tradução a partir do latim.
5. Em Lisboa, no Pavilhão do Conhecimento, Exposição *Matemática Viva*. Endereço do Atractor: `http://www.atractor.pt`.
6. Ver Peterson na bibliografia.

Bibliografia

Coxeter, H.S.M. *The Real Projective Plane*. Springer-Verlag, New York 1992.

Coxeter, H.S.M. *Projective Geometry*. Springer, New York 2003.

Francesca, Piero della. *De la Perspective en Peinture*. Tradução em francês do original em latim. In Medias Res, Paris 1998.

Francesca, Piero della. *De Prospectiva Pingendi*. Edição em italiano. Casa Editrice Le Lettere, Florença, 1984.

Lavin, Marilyn Aronberg org. *Piero della Francesca and His Legacy*. National Gallery of Art, Washington 1995.

Lavin, Marilyn Aronberg. *Piero della Francesca*. Phaidon, London 2002.

Lehmer, Derrick Norman. *An Elementary Course in Synthetic Projective Geometry*. Grátis online, edição 2005. The Guttenberg project. `http://www.gutenberg.org/etext/17001`.
Francesca, Piero della. *De la Perspective en Peinture*. Tradução em francês do original em latim. In Medias Res, Paris 1998.

Francesca, Piero della. *De Prospectiva Pingendi*. Edição em italiano. Casa Editrice Le Lettere, Florença, 1984.
Peterson, Mark A. The Geometry of Piero della Francesca, in *The Mathematical Intelligencer*, vol. 16, n° 3, 1997.

Se o leitor quer iniciar-se em geometria projectiva, o livro mais acessível é o de Derrick Lehmer, e a seguir o *Real Projective Plane*, de Coxeter.

Eduardo Veloso