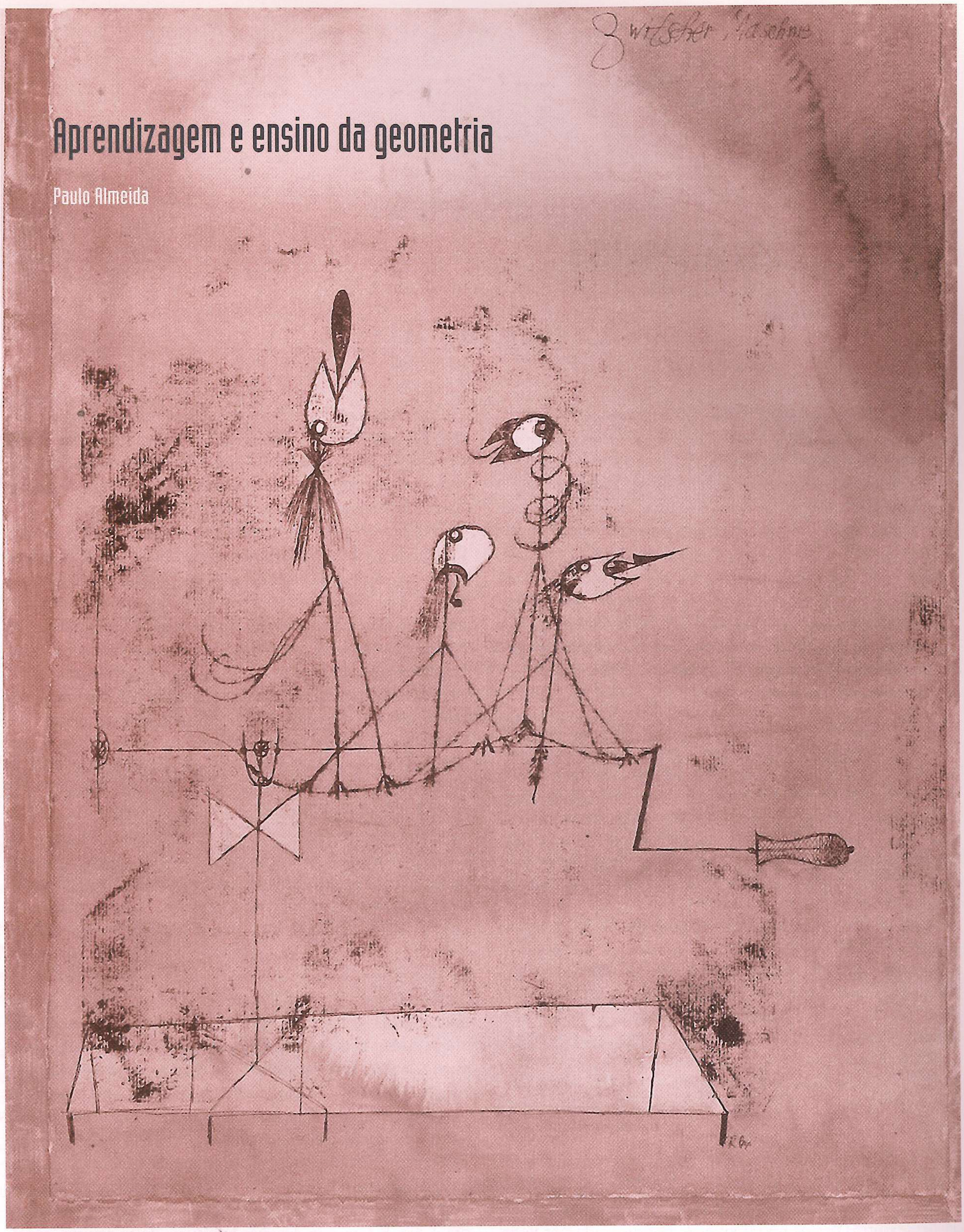
Aprendizagem e ensino da geometria

Paulo Almeida



O espaço da criança e do adulto

A base experimental

Deixemos cair uma gota de tinta num copo com água e olhemos atentamente através do vidro transparente do copo: o complexo espectáculo a que assistiremos tem como protagonista principal a geometria. A aprendizagem da geometria começa pela assistência assídua a este tipo de espectáculo, no qual o espectador, mais tarde ou mais cedo, acabará por envolver-se, participando, ora experimentando ora interpretando à sua maneira. O psiquiatra infantil João dos Santos (1913–87) considerava que "a livre experiência está na base de toda a *actividade simbólica* ou *linguagem*"; essa base experimental é condição *sine qua non* para aprender geometria.

Ao desenhar, pintar, modelar, cantar, "fazer de conta", a criança "lê" à sua maneira tomando opções afectivamente e

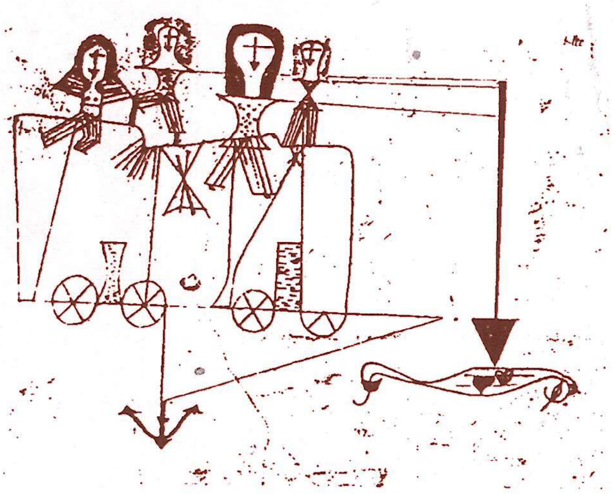


Figura 1. Um desenho de Klee e de uma criança.

compondo para si o seu "espaço de segurança", na terminologia de João dos Santos; o espaço de segurança é ressentido como um porto de abrigo confortável. Trata-se de uma teia de relações onde certas coisas se transmutam em objectos do seu afecto, permitindo à criança percebê-los, sobretudo e primeiro pelo tacto e só depois pela vista. Essa teia é o seu primeiro espaço, esses objectos as suas primeiras figuras e o seu agir e sentir — com o corpo todo — as suas primeiras formas de pensamento geométrico.

Quantas formas atraentes para manipular, ver, ouvir, entender, numa concha, num ritmo musical, num remoinho de fumo, numa corrente de água, num monte de areia, numa flor, numa lenga-lenga, na espuma, no saltitar de uma bola, ou no voo de um pássaro!

Que desejo não ressentimos em criança, de fixar muitas dessas formas, particularmente interessantes por uma razão ou outra, para melhor as entender! E como era feita a nossa "leitura"? Alguns pintores, como Klee (1879–1940) ou Picasso (1881–1973), que assim se interrogaram, quiseram mesmo em dado momento "pintar como quando se era criança".

Ao recorrer ao "espaço" como lugar para entender as coisas do nosso interesse é natural que ele difira consoante os objectos predominantes a estudar e alterando-se os nossos interesses altera-se em geral a nossa concepção de espaço entendido este como o quadro que torna inteligível uma dada teia de relações. Isto vale quer do ponto de vista psicológico individual — da criança ao adulto — quer do ponto de vista do fluir histórico.

Breve história do espaço

O conceito de espaço varia, na criança, da forma "espaço de segurança" à aceitação da euclidianidade — cerca dos 9 anos — ou seja à integração das ideias de pertença, de ordenação, de isometria entre figuras, de continuidade do movimento, e de paralelismo.

Em qualquer dessas etapas trata-se sobretudo de um ponto de vista "operacional" ou seja a criança apreende certas regras de comportamento num espaço sem que haja consciência de uma existência própria desse espaço até que se questiona um dia sobre a natureza do palco em que se vê agir.

A análise histórica do conceito de espaço é muito eloquente mostrando como foi variável e pouco unânime. Faremos uma breve alusão ao assunto respigando uma ou outra opinião significativa.

Antes de mais, a ideia de "lugar" precedeu qualquer ideia de espaço; quer para Aristóteles (384–322 a.C.) quer para o próprio Euclides (c. 330–c. 275 a.C.) o "lugar" das coisas ou das figuras é o bastante para fundamentar, no caso do primeiro, uma teoria do movimento — cada coisa teria um "lugar natural" para onde tenderia a dirigir-se — e no caso do segundo uma grande ferramenta da física-matemática — aplicável ao estudo das figuras que não mudam ao mudar o seu "lugar".

A ideia de tempo é certamente posterior à de espaço como atestam certos vestígios linguísticos onde o tempo se subordina ao espaço: dizemos "um tempo curto", "um espaço de tempo", "de aqui em diante".

Ao explicar o movimento rectilíneo da queda dos corpos terrestres como resultado da existência de um "lugar natural" comum fica claro que para Aristóteles há lugares privilegiados e direcções privilegiadas ou seja esse conjunto de "lugares" a que poderíamos chamar, abusivamente é certo, o "espaço de Aristóteles" não seria homogéneo nem isotrópico. Contendo-se o universo numa esfera, segundo aquele filósofo, todos os lugares aí se conteriam e aquele "espaço" seria fatalmente finito.

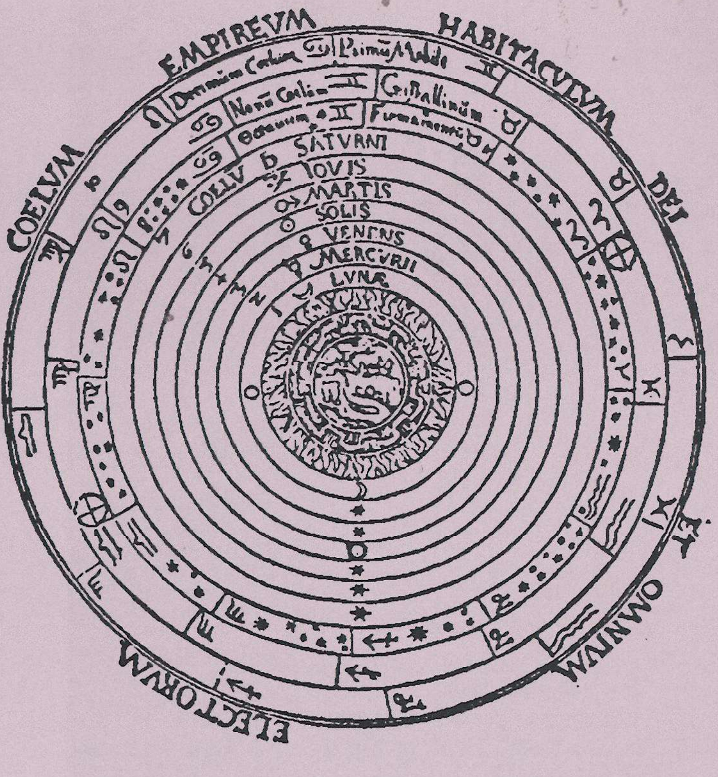


Figura 2. O mundo finito de Aristóteles.

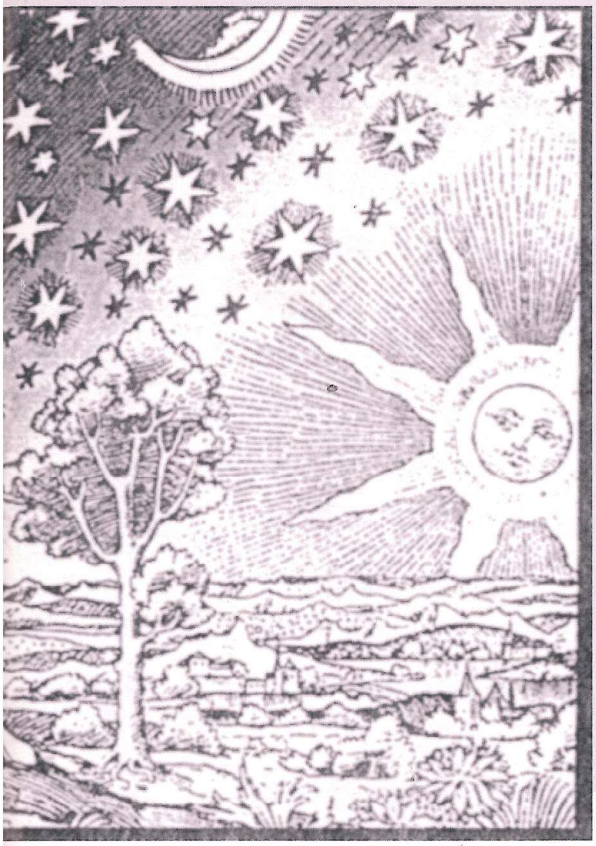
Figura 3. A ruptura com o mundo finito numa imagem renascentista.

A ideia de um "lugar dos lugares", de raiz tipicamente hebraica, confunde-se com o próprio "Deus" como revelam inúmeros textos religiosos: "Deus é o lugar de todas as coisas", "Deus é o espaço de si próprio"; a própria língua hebraica clássica conota numa só palavra — *or* — a ideia de luz, espaço e Deus o que dá um cunho particular a expressões como "luz de Deus", ou, na boca de Deus: "Eu sou a luz". O espaço seria nesta linha de ideias de raiz religiosa um atributo de Deus, se não o próprio Deus.

O pensamento cristão medieval e renascentista vai atribuir diferentes propriedades ao espaço procurando conciliar a fé com a razão e a experiência, conduzindo pouco a pouco a uma concepção que virá a ser partilhada ainda hoje pela maioria das pessoas, embora ignorando o mais das vezes a sua origem religiosa. A título de exemplo mencionemos alguns argumentos do tipo dos invocados por pensadores cristãos: "o espaço é infinito porque uma causa infinita tem um efeito infinito", "o espaço é homogéneo e isotrópico porque na sua infinita justiça Deus não saberia privilegiar nem lugares nem direcções"; a homogeneidade e a infinitude é então expressa poeticamente: "o mundo não tem centro nem circunferência".

Sobre outros atributos do espaço como o seu carácter limitado ou ilimitado — a não confundir com finito e infinito — ou se é contínuo ou descontínuo, se é real ou imaginário ou qual a sua extensão ou dimensão, tão pouco se pode dizer que tenha havido unanimidade; sendo finita a dimensão não seria isso uma limitação divina? e porque não conciliar "uma extensão a um tempo infinita e nula — como Deus"? À tridimensionalidade, definitivamente aceite no século XVII, não é também alheia a argumentação religiosa. A mecânica newtoniana acabaria por consolidar uma concepção de espaço em voga praticamente até ao aparecimento da teoria da relatividade: um atributo considerado essencial é o carácter absoluto do espaço, ou seja a sua existência independente dos corpos, um espaço-receptáculo, portanto, mas mais do que isso pois segundo Newton (1642–1727): "o espaço é o *sensorium* — o sistema nervoso — de Deus". Sem corpos o que sobraria seria o espaço; não deixa por isso de ser curiosa a opinião do inventor da máquina para fabricar o vazio ou seja da máquina pneumática, conhecida na época por "máquina filosófica"; segundo aquele contemporâneo de Newton: "o espaço vazio não é senão o próprio Deus". O espaço absoluto de Newton é um espaço coordenatizável em que cada ponto fica descrito por uma sequência finita de números; para descrever a posição de um ponto material seriam necessários apenas três números mas para a descrição do seu estado mecânico seriam apenas necessários seis: três para a posição e três para a velocidade.

Mas a ideia de espaço absoluto viria a ser posta em causa; para Poincaré (1854–1912), um dos precursores da teo-



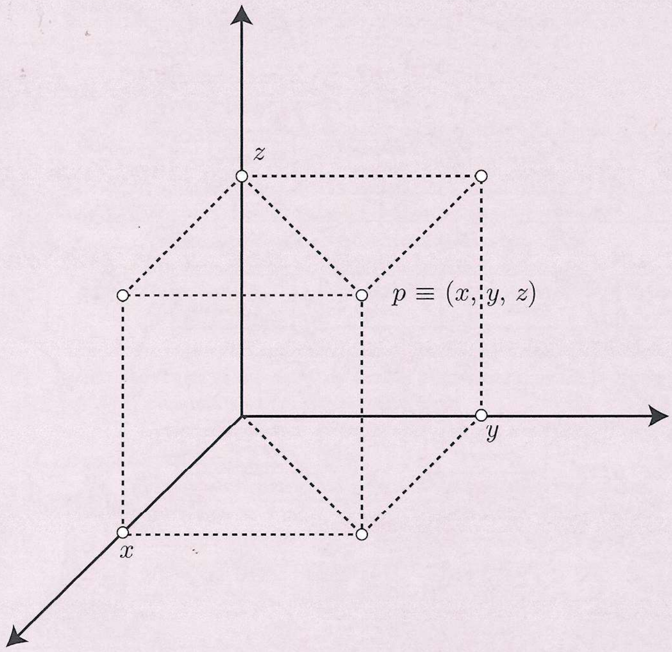


Figura 4. Esquema usual para figurar o espaço absoluto tridimensional.

ria da relatividade, "quem falar de espaço absoluto emprega um termo sem significado". Um pouco antes já Riemann (1826–66) se insurgira contra o "espaço-receptáculo" sustentando que "o espaço não é uma casa alugada à matéria". Para Einstein (1879–1955) a dependência do espaço e da matéria é tal que esta o pode "encurvar" e certas porções de espaço singularmente encurvadas — os buracos negros — mais não seriam afinal do que matéria. Enfim, em que medida é o espaço independente do tempo? Para Isaac Barrow (1630–77), professor de Newton e grande impulsionador do cálculo infinitesimal "o espaço é a expressão da omnipresença divina e o tempo é a expressão da eternidade divina". Esta visão mística do espaço e do tempo nada tem a ver com o ponto de vista de Minkowski (1864–1909) que em 1908 introduz nestes termos o conceito de espaço-tempo: "Daqui em diante os conceitos de espaço e de tempo, considerados como autónomos, vão desvanecer-se como sombras e somente se reconhecerá existência independente a uma espécie de união entre os dois". Do que não há dúvida é que se recorre a um conceito de espaço, seja ele qual for, para organizar um conhecimento, em sentido lato. O espaço e o tempo são para Kant (1724–1804) intuições puras que organizam as sensações e tornam possível o conhecimento; para Kant "o espaço não é um objecto mas sim um modo de perceber os objectos". Afinal de contas quer o espaço de segurança da criança, o espaço-lugar de Aristóteles, o espaço-universo infinito do fim do Renascimento, o espaço-receptáculo de Newton, o espaço-tempo de Minkowski e o espaço-tempo curvo de Einstein conduzem todos a formas de perceber a inteligibilidade das coisas. Talvez tenha sido Leibniz (1646–1716) quem melhor que ninguém tenha sido capaz de englobar numa só fórmula todas as concepções de espaço: *spatium est ordo coexistendi*, ou seja, o espaço é a ordem das coisas em si, não é substância mas fenómeno de relações, não é senão ordem e relação.

É significativo que Leibniz dê como exemplo de espaço uma árvore genealógica, na qual participariam os ascendentes, os parentes mesmo longínquos e os descendentes mesmo futuros, todos coexistindo não no espaço e tempo físicos mas no "espaço da árvore genealógica". O espaço físico seria, quando muito, mais um exemplo de espaço, chegando até Leibniz a referir-se à "quimérica hipótese da realidade do espaço [físico] em si". A falta de unanimidade na concepção de espaço reflecte afinal a necessidade de adequação do quadro conceptual geométrico à natureza das questões em jogo. Não é pois de estranhar que em geometria se estudem espaços com diferentes propriedades úteis ora em estudos de mecânica, ora no estudo das partículas elementares ou quiçá até no estudo da linguística. Para o geómetra, o conceito de espaço depende do tema em estudo.

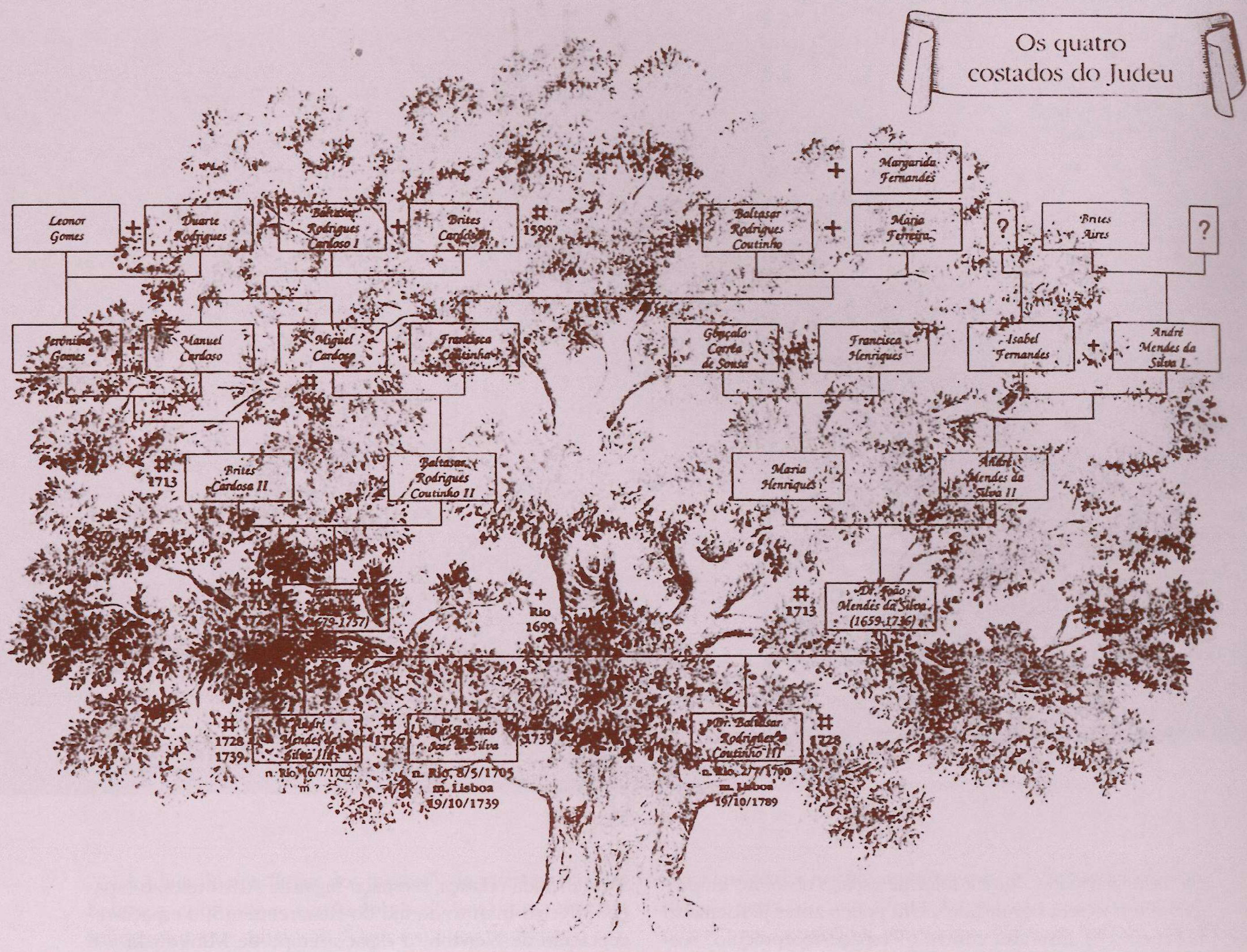


Figura 5. Árvore genealógica do dramaturgo António José da Silva, conhecido por "o Judeu", queimado vivo pela Inquisição em Lisboa, em 1739.

A geometria como sistema dedutivo

A importância do jogo

Ao observar as crianças a brincar concordaremos que em geral intervêm duas componentes: o "faz de conta" e as "regras do jogo". Deixando de parte o porquê da brincadeira, a sua finalidade e utilidade, poderemos reconhecer naqueles dois elementos como que os vestígios primitivos do método axiomático. O jogo é realmente um faz de conta voluntário com regras provisoriamente aceites. Embora não seja apenas isso, pois comporta em geral elementos aleatórios ou seja o factor "sorte" que lhe aviva o interesse e pressupõe em geral "adversários" e consequentemente "luta" e "vencedores e vencidos". É certo que nenhum destes elementos é totalmente estranho à actividade matemática — como actividade humana que é — mas interessa-nos agora aqui apenas apontar para o carácter embrionário de um sistema dedutivo que resulta da atitude do "faz de conta" e da aceitação das "regras do jogo".

Se entendermos as "regras do jogo" no sentido lato — "só pode falar um de cada vez" ou "o jogo começa depois de ele contar até vinte" — concluiremos que as mesmas regras se aplicam a diferentes contextos mas isso continua mesmo válido entendendo-as no sentido estrito do "faz de conta": "agora sou eu o rei" ou "vocês são os bandidos e nós os polícias" ou "hoje o meu palácio é este canteiro e o teu aquele ramo de árvore". Em geral o olhar indulgente do adulto ao ver brincar assim tão sensatamente as crianças, deve-se à ideia que as dramatizações necessárias ao "faz de conta" ajudam ao desenvolvimento psicológico e físico pelo enriquecimento que resulta das experiências vividas, e a contemplação do preceituado nas "regras do jogo" favorece o

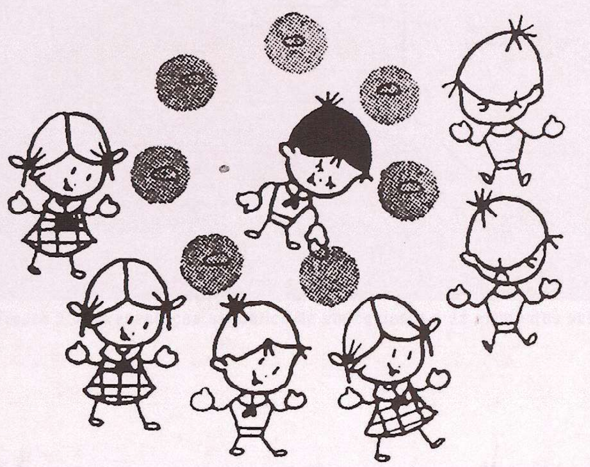


Figura 6. Jogos infantis.

*Um grupo é determinado por um conjunto G e uma operação * em G de tal forma que:*

** seja associativa;*

** possua um elemento neutro;*

*Todo o elemento de G tenha um oposto com relação a *.*

Um espaço topológico é determinado por um conjunto E e um conjunto de partes de E chamadas abertos de tal forma que:

Toda a reunião de abertos seja um aberto;

A intersecção de dois abertos seja um aberto;

O conjunto E e o conjunto vazio sejam abertos.

Um plano segundo Euclides é determinado por um conjunto Π cujos elementos têm o nome de pontos e por um conjunto de partes de Π chamadas rectas de tal forma que:

Dados dois pontos distintos A e B exista uma única recta à qual pertençam A e B;

Dados dois segmentos AB e CD exista um único ponto E tal que B esteja entre A e E e CD seja congruente a BE;

Todos os ângulos rectos sejam congruentes entre si;

Para toda a recta r e todo o ponto P não pertencente a r, exista uma única recta s passando por P e paralela a r.

Figura 7. Axiomáticas da teoria dos grupos, da teoria dos espaços topológicos e da geometria plana de Euclides.

desenvolvimento intelectual e social da criança, obrigada a tomar decisões e a ajudar os outros ou a esperar ajuda deles. É por demais evidente onde queremos chegar: as regras do jogo são o esboço de uma axiomática e o faz de conta colectivo constitui um esboço de um seu modelo. Tal qual como sucede em matemática só o exercício das regras do jogo em diferentes modelos conduz à sua listagem abstracta. Só brincando "às lojas", umas vezes comprando outras vendendo, se descortinam as regras do "comércio" tal como só depois de operar com os números inteiros e depois de calcular com polinómios ou matrizes se alcança o conceito algébrico de anel. A interiorização das regras de jogo faz-se jogando através de modelos seus. As "boas" regras das estruturas matemáticas só surgiram depois de uma prolongada actividade com modelos que *a posteriori* as ilustram; o mesmo se passa nos jogos infantis. A aceitação de uma proposta para jogar um jogo novo depende do grau de confiança que inspira o proponente ou da experiência dos que são convidados a jogar; o mesmo se passa nos sistemas axiomáticos. De qualquer modo aceitar jogar com dadas regras de jogo num modelo particular exige, quer se trate de um jogo infantil ou de um sistema axiomático, uma forte capacidade de imaginação e imaginar é essencialmente abstrair: imaginar exige de quem o faz, não ver tudo o que se vê e ver algo do que não se vê. Esta é aliás a característica principal da ciência moderna que como se sabe teve o seu ponto de viragem com a matematização do real feita por Galileu (1564–1642).

Pretender inculcar num jovem a capacidade de abstrair tendo-lhe coarctado a possibilidade de imaginar durante a sua infância é pretender ensinar música às pedras. De quem se tolheu, em pequeno, o passo natural ao pensamento abstracto, só pode esperar-se em adulto pensamentos abstrusos.

O ensino da geometria e o método axiomático

Os *Elementos* de Euclides serviram durante séculos como paradigma dos sistemas dedutivos e foram acima de tudo um pretexto para ensinar lógica, sendo a geometria sobretudo o veículo desse ensino e não, em geral, a finalidade em si. Invocava-se a geometria euclidiana pelo seu carácter formativo e pela sua ligação ao real. Do ponto de vista axiomático moderno faltava porém à geometria euclidiana uma característica essencial para a valorizar como teoria axiomática: a variedade dos modelos da teoria. O valor da obra de Euclides residiu antes de tudo na elegância e rigor de que se investiu aos olhos da história, durante séculos. Mas a relativa extensão da lista de axiomas da geometria euclidiana restringe a possibilidade de dispor de uma grande variedade de modelos e faz com que os teoremas demonstrados só possam ser ilustrados num ou dois modelos realmente significativos da teoria.

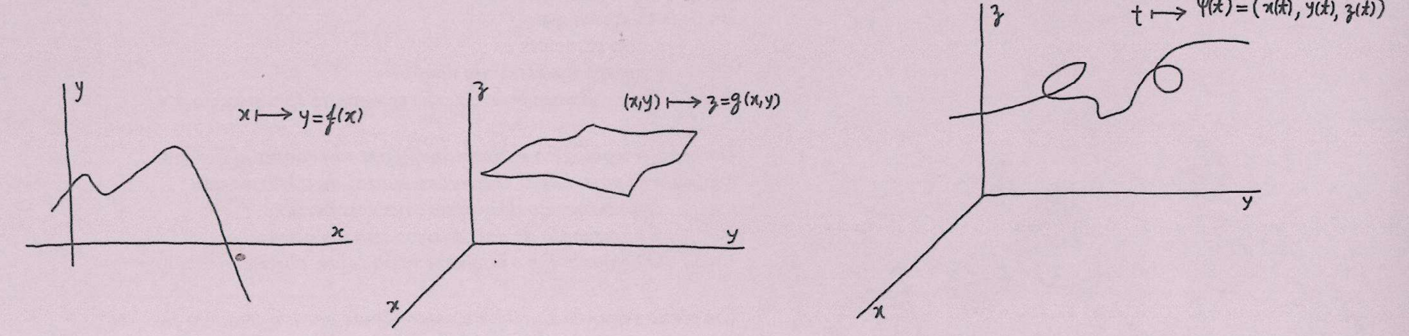


Figura 8. Esboços de gráficos de funções.

Ora hoje em dia o valor de uma teoria axiomática mede-se sobretudo por um critério económico: como os teoremas demonstrados em certa teoria valem para todos os seus modelos, são as teorias com maior variedade de modelos as que se traduzem numa maior economia de tempo no que à transmissão do saber se refere. Ao desenvolver a teoria dos espaços vectoriais, por exemplo, evita-se ter de repetir certos resultados no quadro dos polinómios, das matrizes, das funções ou dos vectores, na medida em que o que está em jogo é apenas a estrutura de espaço vectorial. Por outro lado desde que a partir do século XIX se foram introduzindo sucessivas teorias axiomáticas — teoria dos grupos, teorias dos espaços topológicos, vectoriais, métricos, por exemplo — algumas delas foram parecendo de inclusão mais vantajosa no ensino do que a geometria euclidiana.

Os moldes em que se passou em todo o mundo a processar o ensino da Análise Matemática e da Álgebra Linear retiraram à geometria o papel quase exclusivo que chegou a ter na formação do pensamento matemático na escola. Todavia a tendência abstractizante que integra esses moldes reforçou a importância da geometria como ponte para o real, tornando-a a nível elementar um verdadeiro cordão umbilical. Na segunda metade do século XX a inclusão de temas de geometria — não só nem sobretudo de geometria euclidiana — em cursos de nível mais avançado deve-se antes de mais à possibilidade de emprestar as fortes intuições que nela radicam à compreensão da arquitectura de áreas abstractas da ciência, já só relacionadas com o real de modo indirecto. Não se invoca ao incluir esses temas nem a questão da formação da mente nem a relação com o real, nem sequer o acréscimo de informação resultante da consideração desses temas. Usa-se geometria em física das partículas ou em teoria dos códigos, ou em programação económica ora por ser cómodo ora por ser imprescindível pensar geometricamente nessas áreas.

Geometria e pensamento geométrico

Como aprender geometria?

Como nunca é demais repetir, o mais importante em geometria é o pensamento geométrico e é portanto sobretudo no exercício progressivo dessa forma de pensar que consiste a aprendizagem da geometria. Mas seria errado confinar esse exercício aos conteúdos tradicionais da geometria, em particular ao reportório da geometria euclidiana. Uma das características da matemática axiomatizada e em particular da geometria é o facto de se constituir em linguagem universal ou seja: é possível usá-la, ganhando sentido, em terrenos distintos, provocando um enriquecimento de perspectivas e de métodos: na análise funcional usam-se ideias geométricas, por exemplo no quadro dos chamados espaços de Hilbert — espaços de dimensão infinita fundamentais em mecânica quântica. Para Dieudonné (1906–92), "as transferências da intuição" explicam o domínio universal da geometria. O pensamento geométrico, assente em fortes intuições espaciais da nossa infância, desenvolve-se através de certas estruturas que guardando a marca da sua remota origem, permitem um tu-cá-tu-lá familiar embora conscientemente fictício, que por vezes pode levar-se muito longe.

Ao pensar numa função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, arbitrária, quase mecanicamente desenhamos um gráfico qualquer embora f possa ter um gráfico completamente diferente. Ao pensar num conjunto arbitrário M imaginamo-lo como um espaço cujos pontos representam os elementos do conjunto embora, M possa ser um conjunto de rectas ou de matrizes.

As estruturas geométricas ao poderem ser interpretadas neste jogo de ficção ajudam a "ver" ou como dizia Platão (427–347 a.C.), "a geometria conduz a alma à verdade". Raciocinar geometricamente, é por assim dizer raciocinar sobre objectos abstractos como se eles fossem concretos; das

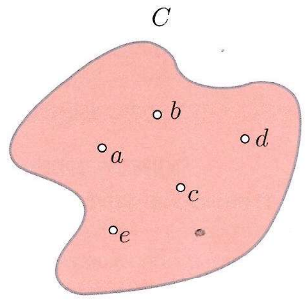


Figura 9. Representação simbólica de um conjunto e de elementos seus.

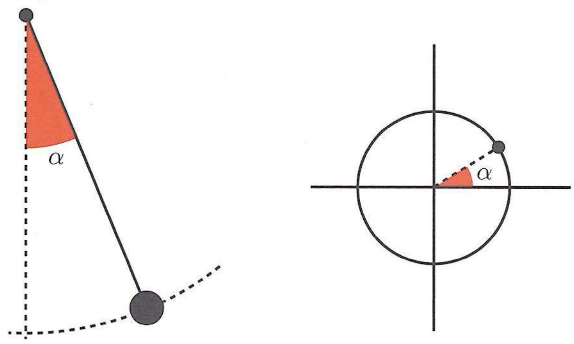


Figura 10. A posição de um pêndulo simples é descrita por um ponto sobre uma circunferência.

figuras que usamos em geometria, teoricamente dispensáveis embora de grande ajuda, não podemos retirar porém o que é abusivo... Na realidade o mesmo sucede em toda a teoria axiomatizada: dos objectos "concretos" apenas conservamos as propriedades formalizadas nos axiomas, considerando as outras irrelevantes — para certos fins em vista. O "concreto" é, neste sentido, apenas um grau do "abstracto".

Ao carácter mais "próximo" dos objectos de partida da geometria não será alheio o ter-se ela constituído na primeira teoria axiomática, paradigma formal do pensamento geométrico. Consideremos um exemplo simples: em física para descrever o movimento de um pêndulo simples recorre-se a uma circunferência graduada para parametrizar as diferentes posicões através de um ângulo.

Em se tratando de um pêndulo duplo articulado o melhor é representar cada posição através de um ponto num toro bidimensional visto que há dois ângulos a referenciar em simultâneo.

É claro que se apenas se considerarem pequenas oscilações que não envolvam rotações em torno dos pontos de suspensão, um simples rectângulo seria suficiente para assinalar as posições.

Ao estar em movimento, as sucessivas posições do duplo pêndulo correspondem a uma trajectória no toro. O estudo do movimento do duplo pêndulo corresponde, assim, ao estudo de um sistema dinâmico ou campo de vectores no toro, de forma que partindo de um ponto no toro — ou seja de uma posição particular do duplo pêndulo, todo o futuro mecânico do sistema é descrito por uma linha de corrente desse campo de vectores. Uma função numérica da posição do duplo pêndulo (a distância do segundo pêndulo ao ponto de suspensão do primeiro, por exemplo) corresponde a uma função numérica definida no toro. É claro que só uma certa familiaridade com o toro nos permitirá raciocinar com as trajectórias nele desenhadas e tirar conclusões mecânicas sobre o movimento do duplo pêndulo. Vemos através deste

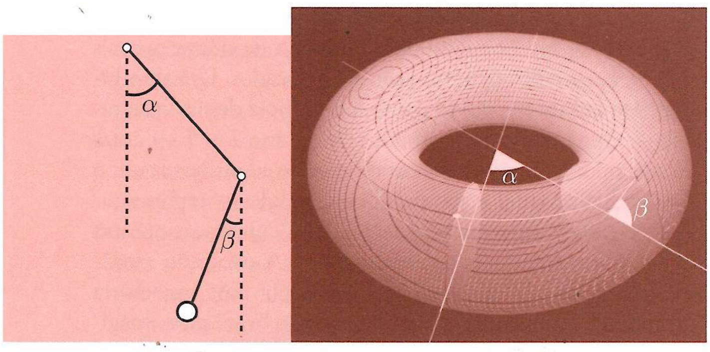


Figura 11. A posição de um pêndulo duplo é descrita por um ponto sobre um toro.

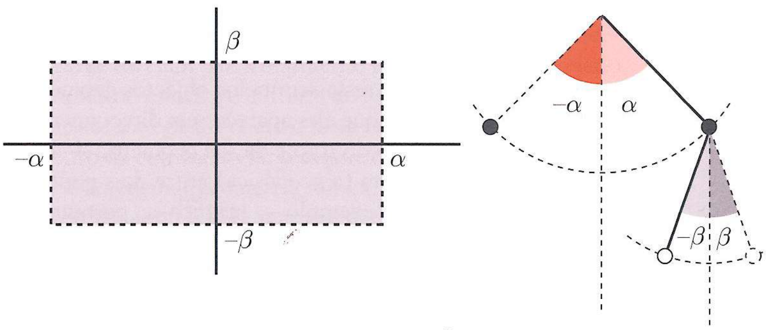


Figura 12. As pequenas oscilações do pêndulo duplo são descritas por pontos de um rectângulo.

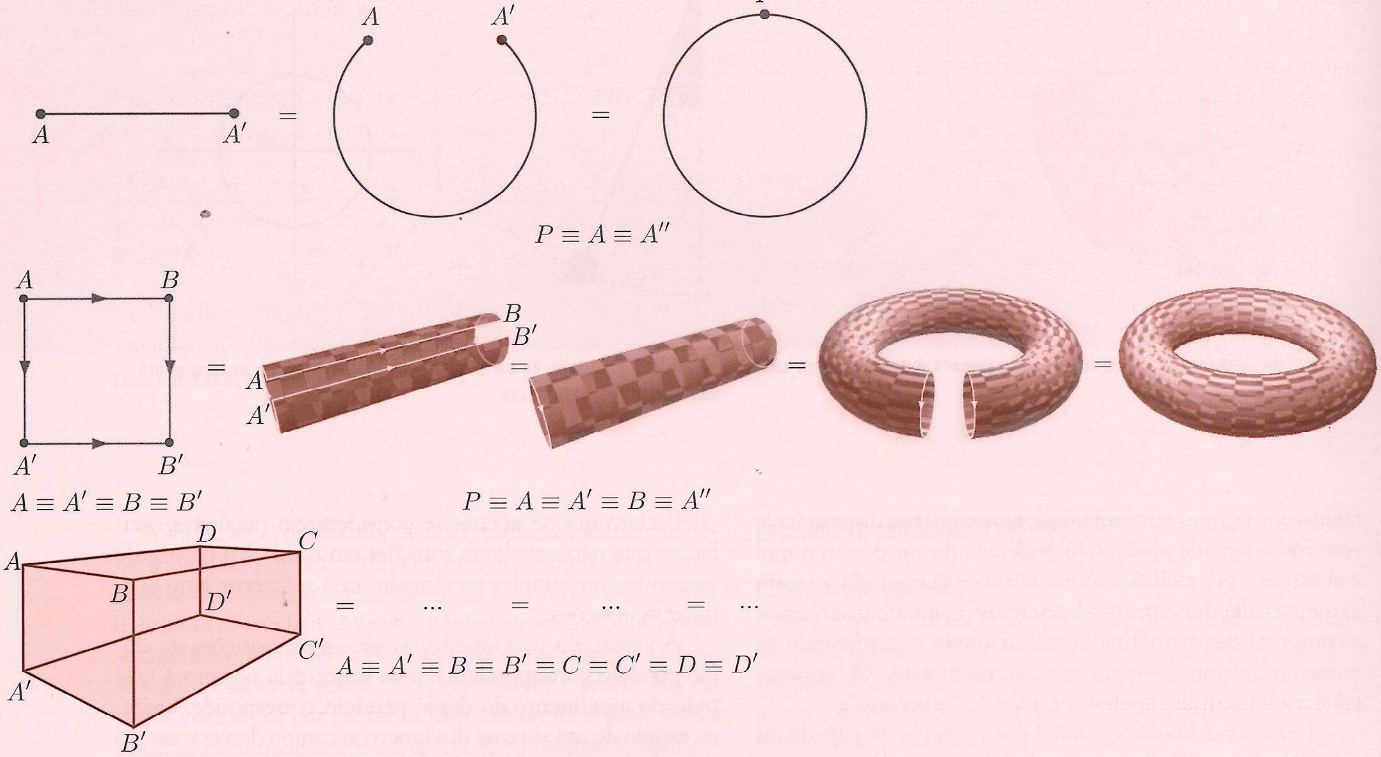


Figura 13: Representação de uma circunferência, de um toro bidimensional e de um toro tridimensional através de um segmento, de um quadrado e de um cubo.

exemplo o modo como frequentemente se usam os objectos geométricos: modelando situações do mundo real eles têm o papel de sombras ou "duplos" que simulam a realidade — isolando apenas o que se pretende estudar — e o estudo dessas sombras fornece dados sobre a realidade, em geral mais complexa.

Aprender geometria, hoje, seria inútil para a maioria das pessoas se elas se interessassem pelos objectos geométricos apenas na medida em que eles aparecessem directamente no mundo real. O estudo do toro e da sua geometria — qual é a trajectória mais curta (a geodésica) entre dois pontos arbitrários do toro?, por exemplo — justifica-se, portanto, por ser ele o espaço adaptado a inúmeros problemas, que podem ser bem mais importantes do que o fabrico de câmaras de ar, que não exige certamente nenhum estudo profundo sobre a geometria do toro. Para ilustrar melhor este aspecto consideremos um triplo pêndulo que é do ponto de vista mecânico uma coisa bem simples; as suas posições são porém descritas por pontos de um toro tridimensional que certamente nunca ninguém viu na natureza, embora, não seja difícil ao geómetra imaginá-lo. Se pensarmos um pouco compreenderemos que uma circunferência se pode interpretar como um segmento — representado pelo intervalo de números reais $I = [0, 1]$ — cujos extremos são identificados. Um toro bidimensional interpreta-se como a superfície de um quadrado — representado pelo produto cartesiano $I \times I$ — cujas arestas opostas foram convenientemente identificadas, e o toro tridimensional é afinal um cubo sólido — representado pelo produto cartesiano $I \times I \times I$ — cujas faces opostas foram convenientemente identificadas. A evolução mecânica do triplo pêndulo é, pois, descrita por uma trajectória no toro tridimensional que não é preciso "ver" para imaginar; ao fazê-lo estamos a pensar geometricamente no fenómeno mecânico do triplo pêndulo. Para aprender geometria é essencial desenvolver este poder de representação: o triplo pêndulo — que se "vê" — simula-se comodamente com um toro tridimensional – apesar de não se "ver" — e para de alguma forma o "ver" simula-se de novo mas desta feita com um familiar cubo.

Como ensinar geometria?

Antes de mais: que geometria ensinar? De uma publicação da UNESCO — o organismo internacional tutelado pela ONU vocacionado para as questões de educação e cultura — respigamos esta confissão: "De todas as decisões a tomar no quadro de um projecto de ordenamento dos programas escolares quanto às escolhas dos conteúdos, a mais controvertida e a mais difícil de defender é em geral a que respeita à geometria". E porquê? Pensamos que a maior unanimidade na escolha e ordenação dos temas conducentes à transmissão de conhecimentos de aritmética, álgebra e análise a nível escolar se deve sobretudo a uma concepção ultrapassada do papel da geometria no pensamento científico.

Deve-se esta concepção à divulgação de uma imagem da geometria ligada ao mundo clássico e desligada do mundo actual. Vamos analisar brevemente esta atitude. Por um lado, o excessivo volume de material elementar em geometria, acumulado durante séculos, como resultado do papel proeminente que ela teve no ensino, tornou-se em grande parte obsoleto devido às inflexões de rumo da ciência e da técnica. Tornar-se-ia deste modo difícil proceder a uma selecção, curiosamente por excesso de oferta; qualquer escolha desse material tenderia a parecer arbitrária. Trata-se obviamente de um falso problema pois o verdadeiro problema reside em saber tirar partido de questões de outras áreas — dentro e fora da matemática — para pretextar a forma geométrica de pensar. E há que reconhecer que tal como sucede a um bom médico ou a um bom mecânico de automóveis o volume de conhecimentos necessário para não ser surpreendido na vida profissional é bem maior do que o necessário — em geral pouco — para resolver cada caso pontualmente. É por isso que há quem diga que aquele acervo de saber é localmente inútil e globalmente indispensável. É o que sucede com a geometria. Os temas geométricos a ensinar podem ser muitas vezes justamente considerados como jogos inúteis em si, mas se pensarmos neles como pretexto para o "pensar geometricamente" compreenderemos por que são indispensáveis. Por outro lado o poder político e a comunicação social, atribuem um carácter mais indispensável, no dia a dia da vida moderna, aos conhecimentos de aritmética, álgebra e análise ou até de estatística que aos de geometria; essa postura devendo-se à ideia de se entender por "geometria" apenas o seu conteúdo tradicional sem comprender a relevância do pensamento geométrico no pujante desenvolvimento da álgebra e da análise, o que torna impossível a sua compreensão a nível escolar sem o recurso a fortíssimas intuições geométricas. Tal atitude, verdadeiramente caricata, é só comparável à atitude de considerar que já não é tão importante saber ler ou saber andar porque hoje em dia dispomos de televisão e automóvel.

Não temos dúvidas em afirmar que o apagamento, se não a exclusão, da geometria no ensino da álgebra e da análise remetendo-a a um corpo isolado de conhecimentos, está na origem de boa parte do insucesso escolar em matemática, tornando estupidamente difícil e *contra natura* a aquisição de conhecimentos de álgebra e de análise e tornando odiosa a geometria.

Independentemente do conteúdo dos temas que devem configurar um qualquer programa de geometria a nível elementar o mais importante é o uso da geometria como contraponto dos temas matemáticos mais áridos do ponto de vista dos estudantes, porque menos intuitivos.

Em matemática, dedução e intuição são inseparáveis e não ter em conta este aspecto é caminhar para o fracasso. Porém como é bem sabido a intuição descontrolada conduz aos maiores abusos e frequentemente, quando erigida em método único, sob o pretexto de ser uma fonte privilegiada para inteligir as coisas esconde apenas uma incapacidade para raciocinar dedutivamente. E é a dedução que pelo seu rigor, põe cobro aos desvarios a que pode conduzir a intuição. A intuição é a voz do atrevimento e da invenção e a dedução a da prudência e do controlo. Quando se pensa em ensino ambas as coisas são necessárias. Ao aluno que estuda tem de ser dada a ocasião para tirar partido da intuição sem que ela constitua um talismã e tem de ser dada a ocasião para tirar partido da dedução sem que ela constitua para ele um freio. É preciso, em conclusão, fazer entender ao estudante que em matemática a intuição conduz ao verosímil e daí a dedução conduz ao verdadeiro, tornando possível o repto de fazer previsões, sondando o ignoto e nele agindo eficazmente.

Ora além de ser a geometria o terreno privilegiado para desenvolver a intuição — nisto reside a força do pensamento geométrico — sucede que os excessos da intuição são nela o mais das vezes facilmente detectáveis. É por isto, mais do que pelo seu conteúdo programático que a geometria é insubstituível no ensino, embora os conteúdos clássicos da geometria se revelem particularmente recomendáveis no plano da formação estética e cultural do futuro cidadão, sendo tão insensato sonegá-los como o seria não lhe facultar o conhecimento da cultura literária clássica, por exemplo.

Se ao ensinar geometria nunca, mas nunca, a dissociarmos do seu conteúdo humanístico, teremos sabido fazer desse ensino um meio formativo de cultura, útil e indispensável a todos.

Paulo Almeida
Instituto Superior Técnico