

Arte, Matemática e "Arte e Matemática"

Antônio M. Fernandes

A Matemática e o seu valor estético intrínseco

A relação entre a Arte e a Matemática não é fácil de caracterizar. A fiabilidade de uma tal caracterização depende, em parte, de uma resposta satisfatória para as questões "o que é a Arte?" e "o que é a Matemática?". No caso desta última, parece mais ou menos consensual que uma definição satisfatória da sua essência, não se encontra disponível. No caso da Arte, ela pode ser descrita como *um veículo de conteúdos estéticos*. Esta caracterização tem o mérito de definir o que quer definir mas fá-lo claramente à custa de transferir todo o grau de relativismo para a expressão "conteúdos estéticos".

Ora, um dos primeiros princípios estéticos: *de gustibus non est disputandum*,¹ parece afastar-nos, definitivamente de uma possibilidade de resposta, tal é o grau de subjectividade introduzido.

Em todo o caso, todos os princípios estéticos envolvem um juízo de valor relativamente a um determinado tipo de impressão que a obra de arte causa em nós. Essa impressão varia amplamente desde a emoção à razão, envolvendo desde os mais básicos instintos aos mais sofisticados actos intelectuais.

Não parece adequado considerar a actividade matemática como uma manifestação artística na sua essência, já que

não constitui essencialmente num veículo estético, possui outros propósitos fundamentais. De certo modo contradiz Espinosa: "[A arte consiste numa] qualquer criação humana contendo uma ideia que não seja o seu propósito utilitário."

Seja como for, parece inequívoco que determinados aspectos da actividade matemática são susceptíveis de julgamentos de valor puramente estéticos.

Com a crescente utilização de computadores, a Matemática tem ganho espaço enquanto meio de produção artística. Isto, mesmo sem ter em consideração o facto de a generalidade dos algoritmos presentes no *software* de produção artística utilizar, intensamente, ferramentas matemáticas que abrangem campos desde a geometria diferencial e a álgebra linear aos números complexos e aos quatérnions, para mencionar apenas alguns.

Desde logo, em muitos casos, as representações visuais de muitos objectos matemáticos possuem em si mesmas um valor estético intrínseco, o que permite *servir* Matemática como Arte, apenas com modificações menores.

Tal é o caso da capa do número anterior da *Educação e Matemática*, elaborada tendo como base um objecto designado *atractor de Lorenz*.

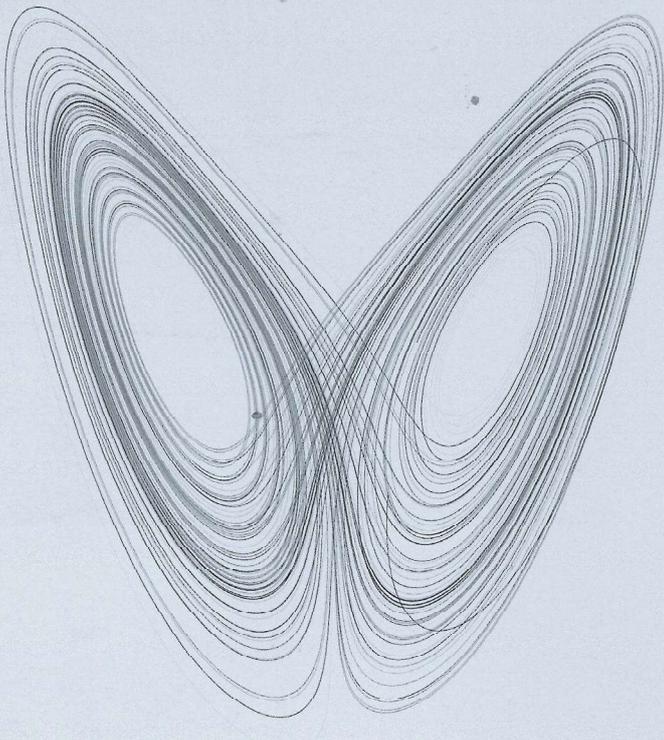


Figura 1. O atrator de Lorenz

A figura base é gerada a partir da representação gráfica da solução de um sistema de equações diferenciais, mais precisamente um sistema do tipo:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = x(\rho - z) - y \\ z' = xy - \beta z \end{cases}$$

onde x , y e z são funções de uma variável t , e x' , y' e z' , são as respectivas derivadas em ordem a t . As letras gregas σ , ρ e β , representam parâmetros, ou seja, quando substituídas por números reais concretos originam um sistema particular. Para $\rho = 28$ a solução tem um comportamento caótico, comportamento esse que se ilustra na figura 1.

Para obter a imagem final, foram utilizados certos pontos daquela curva, calculados através de processos numéricos. Um desses métodos é conhecido sob a designação de método de Euler. Ilustramos o método no caso de uma única equação: suponhamos que queremos descrever (em termos discretos) uma solução de uma equação diferencial do tipo $x' = f(x, t)$ onde $f(x, t)$ é uma certa expressão envolvendo x e t , sendo que x é ela própria uma função de t . De modo

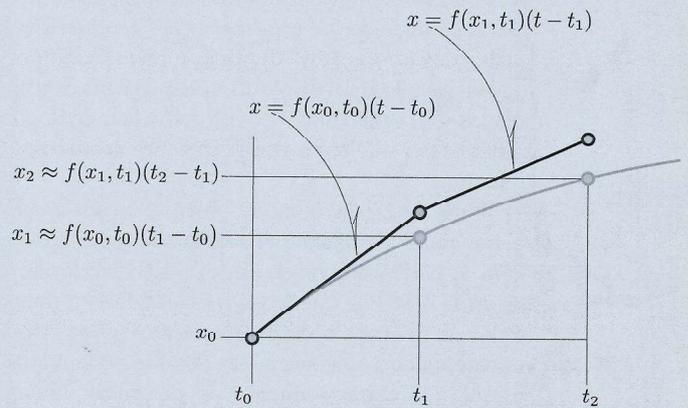


Figura 2. Cálculo da solução aproximada

a obter uma solução específica é necessário fornecer aquilo que se designa de *condição inicial*, ou seja, fixar o valor $x(t_0)$ para certo número t_0 . (Se f é bem comportada a teoria elementar das equações diferenciais garante a existência e a unicidade de uma tal solução.) Uma vez fixada esta condição inicial, podemos determinar uma aproximação da verdadeira solução.

Sabemos, considerando a equação diferencial dada, que $x'(t_0) = f(x(t_0), t_0)$ pelo que, tendo em conta que a recta tangente (cujo declive em t_0 é $x'(t_0)$) é uma boa aproximação local da solução x então, localmente, a recta de equação $y = f(x(t_0), t_0)(t - t_0)$ é uma boa aproximação da verdadeira solução $x(t)$. Assim, se considerarmos um ponto t_1 próximo de t_0 , podemos calcular uma aproximação de $x(t_1)$, usando a recta, ou seja, considerando

$$x(t_1) \approx f(x(t_0), t_0)(t_1 - t_0).$$

Usando agora este valor de $x(t_1)$, acabado de calcular, podemos, como no caso anterior, usá-lo para calcular o valor da derivada $x'(t_1)$, prosseguindo deste modo todo o processo (ver a figura 2). Assim sendo, é possível determinar uma boa aproximação da verdadeira solução, desde que conside-

remos uma sucessão de pontos t_0, t_1, t_2, \dots , todos suficientemente próximos uns dos outros.

No caso da capa da *Educação e Matemática* n° 93 foram utilizados cerca de 50000 pontos t_n onde $|t_{n+1} - t_n| \leq 1/100$.

Um segundo exemplo

Não é necessário recorrer a conceitos matemáticos sofisticados para obter objectos de valor estético reconhecível. Neste segundo exemplo utilizam-se figuras geométricas básicas (setas e quadrados) e transformações geométricas (no caso, dilatações e rotações). O plano é preenchido por 2500 figuras, de cada tipo, dispostas numa retícula 50x50. Os quadrados e as setas, uma vez colocados em cada ponto dessa retícula são sujeitos a transformações geométricas do tipo referido.

Uma tal tarefa, como se prevê, é levada a cabo por um computador, devidamente programado para o efeito. Na figura 3, pode observar-se um exemplo produzido usando o software *NodeBox* que, consiste basicamente num interpretador da linguagem de programação *Python*. Mesmo quem não conhece a linguagem em detalhe pode reconhecer, na essência, o comportamento do programa. Numa área de 1000x1000 pontos, são desenhadas setas e quadrados usando uma retícula (como já se disse). Essas figuras sofrem va-

Figura 3

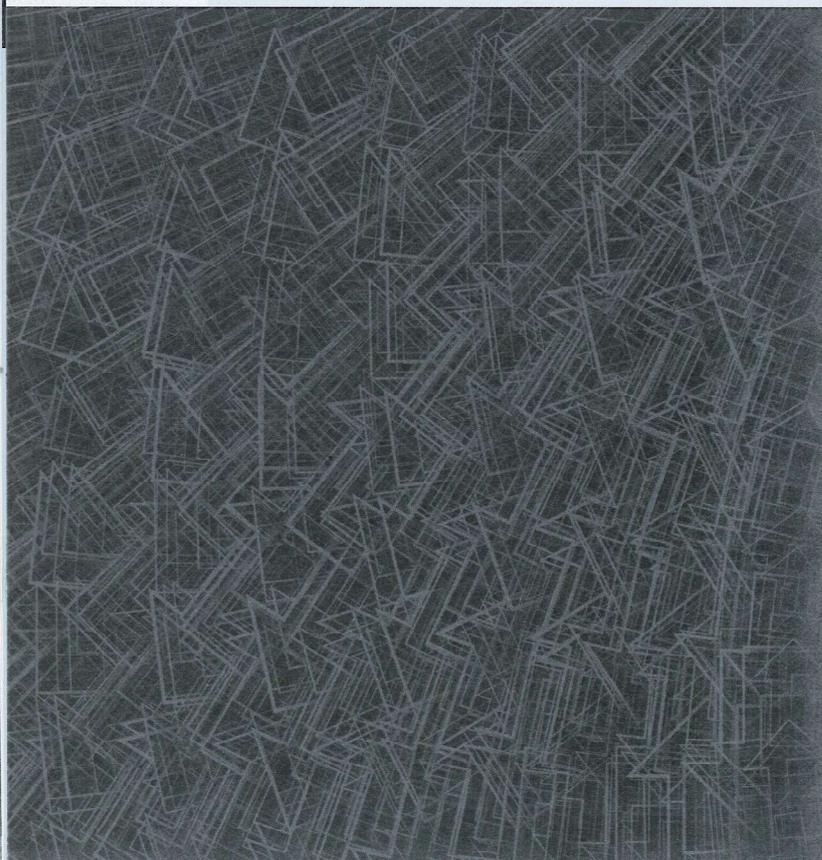


Figura 4. Programa [em Python] que gerou a figura 3.

```
size(1000,1000)
from math import *
fill(0,0,1.0,0.05)
stroke(0,0,0)
for i in range(50):
    _x0=20*i
    for j in range(50):
        _y0=20*j
        scale(3*(cos(i)+sin(j)))
        rotate(i+j)
        strokeWidth(random(.8))
        stroke(0,0,0)
        rect(_x0,_y0,20,20)
        arrow(_x0,_y0,40)
        reset()
```

riações de escala e rotações determinadas por certas funções matemáticas, mais precisamente pelas funções

$$(x, y) \mapsto 3(\sin(x) + \cos(x))$$

e

$$(x, y) \mapsto x + y$$

respectivamente.

Este exemplo, de certo modo minimalista, revela, apesar de tudo, a enorme potencialidade plástica que pode ser alcançada recorrendo a ferramentas matemáticas elementares.

As potencialidades que resultam da utilização de noções matemáticas como tintas e pincéis são inúmeras. A utilização do computador, permitindo a implementação de esquemas recursivos abre novas possibilidades que, de outro modo seriam totalmente inacessíveis.

A Arte e o seu valor matemático intrínseco

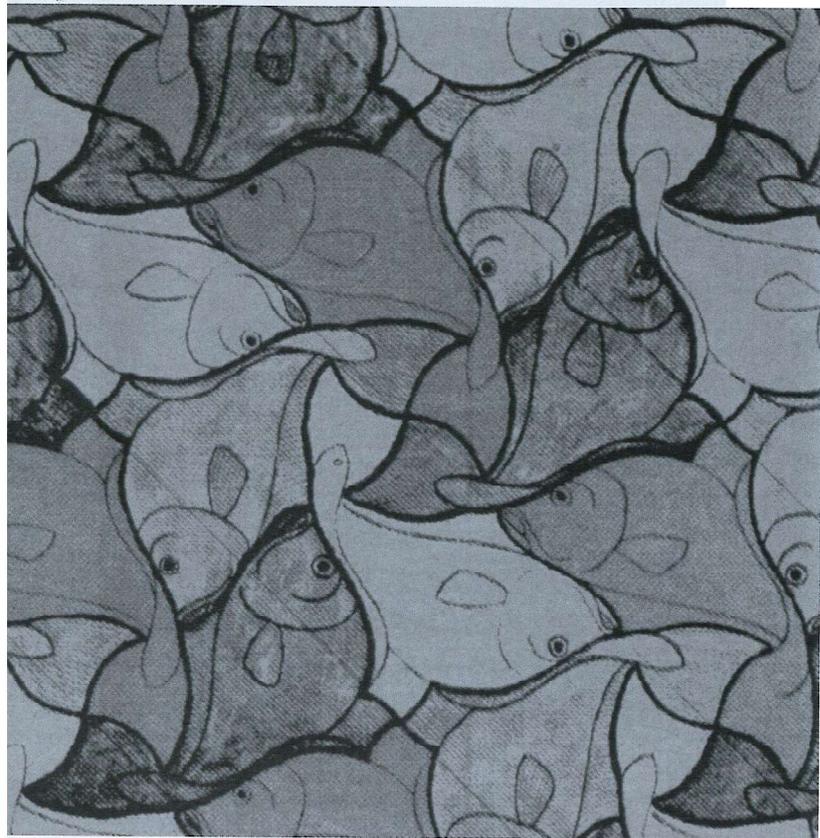
Em diversas ocasiões, noções fundamentais em matemática viram a sua génese localizada na actividade artística.

O mais emblemático desses casos é, talvez, o desenvolvimento da geometria projectiva, baseado nos estudos sobre perspectiva, enquanto método para obter uma representação visual realista.

Não nos ocuparemos aqui desse exemplo, em detrimento de um outro, cuja *matemática intrínseca* é, atrevemo-nos a dizê-lo, mais substancial. Falamos das pavimentações do plano.

Do ponto de vista estritamente artístico, as pavimentações constituem uma manifestação artística ancestral. Os exemplos que podem ainda hoje observar-se no mosteiro de Alhambra (Séc. XIII-XIV) evidenciam um conhecimento notável das possibilidades combinatórias desta técnica. Tal facto surpreende-nos a todos do mesmo modo que surpreendeu Esher. Essas possibilidades podem ser descritas em termos de noções geométricas clássicas que envolvem a noção de *grupo de simetria*.

Ainda mais surpreendente é, certamente, o facto de a geometria clássica ser insuficiente para descrever a riqueza



Pavimentação do plano por M. C. Escher

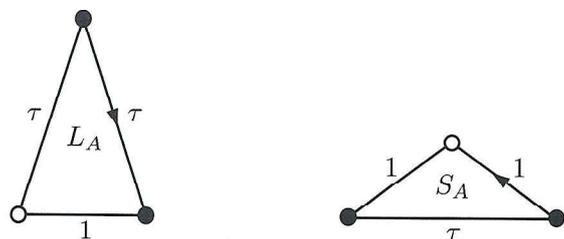


Figura 4

do universo das pavimentações. É essa surpresa que iremos descrever.

Consideremos os dois ladrilhos L_A (designado *ladrilho grande*) e S_A (designado *ladrilho pequeno*) da figura 4 (τ representa o número de ouro). Qualquer pavimentação do plano usando aqueles dois ladrilhos designa-se por pavimentação do tipo A . Como se vê na figura as arestas são orientadas e os vértices coloridos. Isso sucede para impor certas restrições no tipo de pavimentações que se podem obter usando aquelas duas figuras. De facto, iremos apenas considerar aquelas em que, nos ladrilhos adjacentes, as arestas e vértices em que eles contactam tenham, respectivamente, a mesma orientação e a mesma cor. Pode demonstrar-se que é possível pavimentar o plano desta forma e que as pavimentações assim produzidas não possuem simetria translacional

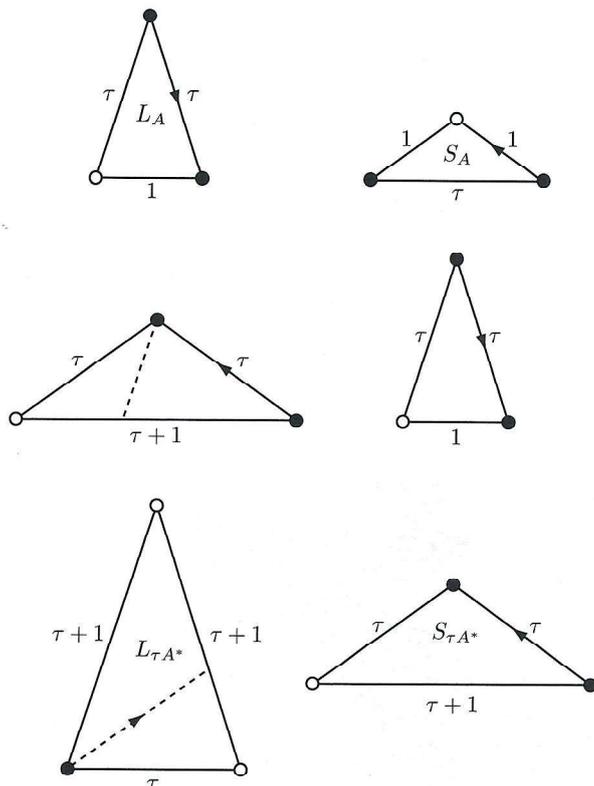


Figura 5

sendo, por isso, designadas de *aperiódicas*. Mais precisamente, *pavimentações aperiódicas de Penrose*. No que se segue referir-nos-emos a elas simplesmente como pavimentações do tipo A .

A partir de uma pavimentação T do tipo A podemos, iterando um processo algorítmico, obter uma infinidade de outras pavimentações deste tipo,

$$T_0 = T, T_1, T_2, \dots, T_n, \dots \quad (n \in \mathbb{N})$$

A passagem de T_n para T_{n+1} processa-se de acordo com o que se descreve na figura 5. Ou seja, os ladrilhos pequenos da nova pavimentação, obtêm-se unindo um grande e um pequeno da anterior, tal como a figura descreve (segunda linha). Depois de obtidos os ladrilhos pequenos da nova pavimentação, através deste processo, alguns destes podem

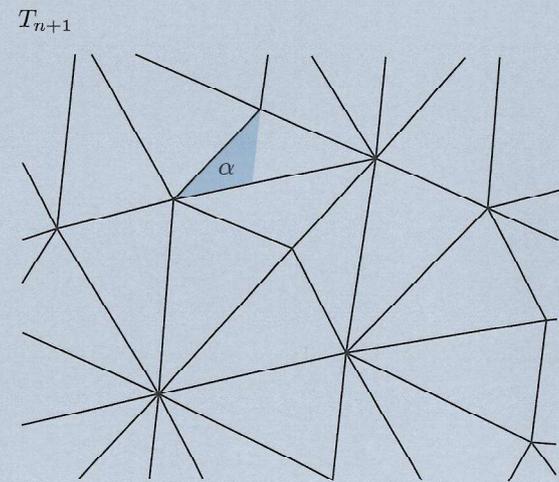
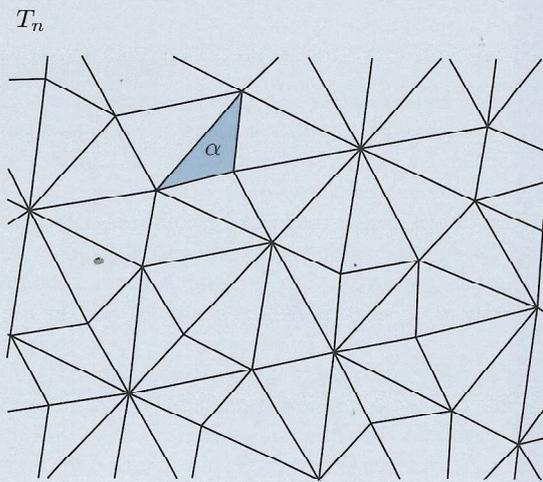


Figura 6

juntar-se com triângulos grandes da anterior, originando um triângulo grande na nova. Os triângulos obtidos dizem-se dos tipos $L_{\tau A^*}$ e $S_{\tau A^*}$. Obtemos assim uma nova pavimentação T_{n+1} (ainda do tipo A), com triângulos do tipo $L_{\tau A^*}$ e do tipo $S_{\tau A^*}$. A razão para esta notação é simples: os triângulos em T_{n+1} , têm agora lados cujo comprimento surge multiplicado por τ e, como se pode observar, a orientação e coloração dos vértices é em T_{n+1} , dual (ou seja «trocada») da de T_n (figura 5). Em todo o caso, apesar desta alteração de coloração e orientação, continuamos a ter uma pavimentação do tipo A.

Se considerarmos agora uma pavimentação T e um triângulo α ocorrendo nessa mesma pavimentação, podemos fazer corresponder a ambos uma sequência (infinita) de zeros e uns, (a_0, a_1, a_2, \dots) que denotamos por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de acordo com o seguinte: a_n é zero ou um consoante o triângulo α ocorra na pavimentação T_n dentro de um triângulo grande ou pequeno, respectivamente (figura 6). Já que, pelo processo que descrevemos, um triângulo pequeno em T_n , origina sempre um triângulo grande em T_{n+1} , isso traduz-se na sequência através da observância da seguinte lei geral:

$$(*) \quad a_n - 1 \rightarrow a_{n+1} - 0.$$

Outro aspecto interessante reside no facto de, considerados dois triângulos α e β de uma mesma pavimentação T , existe sempre um natural n tal que, em T_n , os triângulos α e β ocorrem dentro de um mesmo ladrilho. Do ponto de vista das respectivas sequências $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, isso significa que para $k \geq n$ se tem $a_k = b_k$.

Se considerarmos o conjunto \mathbb{T} de todas as sequências, de zeros e uns satisfazendo (*), pode demonstrar-se que decorrem de triângulos e pavimentações de tipo A, como descrevemos atrás. Por outro lado, as sequências que correspondem a uma mesma pavimentação podem ser caracterizadas facilmente, ou seja, dadas (a_n) e (b_n) em \mathbb{T} , elas são determinadas por uma mesma pavimentação T se e só se existe um natural k tal que $n > k$ implica $a_n = b_n$.

Definindo uma relação binária no conjunto \mathbb{T} de acordo com, $(a_n) \sim (b_n)$ se existe k tal que $n \geq k$ implica $a_n = b_n$, obtém-se aquilo que vulgarmente se designa de uma relação de equivalência. O conjunto $[a_n]$, constituído por todas as sequências em \mathbb{T} equivalentes a (a_n) , designa-se de classe de equivalência de (a_n) e, pode ser visto como um representante natural da pavimentação T . Ou seja, existe uma correspondência biunívoca entre as pavimentações de tipo A e as classes de equivalência de sequências de \mathbb{T} , cujo respectivo conjunto se designa de conjunto quociente de \mathbb{T} por \sim e se representa por \mathbb{T}/\sim .

Aquilo que torna estes conjuntos quociente interessantes é que se existe no conjunto original algum tipo de estrutura algebro-geométrica então, a estrutura quociente como que herda alguma dessa estrutura, numa forma que é previsível. Muitos objectos geométricos interessantes (por exemplo a banda de Möbius ou o plano projectivo) podem obter-se deste modo.

Esta circunstância parece permitir, no nosso caso, estudar a estrutura do conjunto das pavimentações de tipo A, já que uma estrutura geométrica pode ser imposta em \mathbb{T} , por

via da consideração de uma métrica dada por:

$$d((a_n), (b_n)) = \frac{1}{n+1}$$

onde n é o primeiro índice em que as duas sequências diferem.

O que torna esta situação tão especial é que, contrariando a situação clássica, em que a passagem ao quociente revela ainda uma estrutura geométrica rica e informativa, neste caso, porém, isso é dramaticamente contrariado. A métrica (ou se se quiser o modo de medir distâncias) induzida por d no quociente é a *pseudo-métrica*² definida do seguinte modo: considerados dois elementos x e y de \mathbb{T} (x e y são sequências infinitas de zeros e uns) consideramos sequências finitas p_1, p_2, \dots, p_n de elementos de \mathbb{T} , de tal modo que $p_1 \sim x$ e $p_n \sim y$, considerando então as somas

$$(**) \quad d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3) + \dots + d(p_{n-1}, p_n)$$

para finalmente definir $d'([x], [y])$ como o menor valor possível entre todas as somas que acabámos de descrever.³ (Recorde-se a notação: $[x]$ representa a classe de equivalência de x sendo, por isso, um elemento do conjunto quociente \mathbb{T}/\sim .) Cada sequência p_1, p_2, \dots, p_n , como acima, descreve um *circuito*, que conduz de x à y . Estamos a medir a distância entre $[x]$ e $[y]$, considerando a menor distância percorrida ao longo desses circuitos.

Aquilo que, em última instância traduz a falência dos métodos geométrico clássicos na análise da estrutura das pavimentações de tipo A, é o facto de, dados dois elementos quaisquer $[x]$ e $[y]$ de \mathbb{T}/\sim , se ter sempre:

$$d'([x], [y]) = 0!!!$$

A razão para este facto é simples, dadas duas sequências (a_n) e (b_n) , correspondendo a duas pavimentações, se elas correspondem a duas pavimentações diferentes (e pode demonstrar-se que o conjunto de tais pavimentações é infinito) então, temos $d((a_n), (b_n)) = 1/(k+1)$, onde k é a primeira posição onde as sequências diferem. Nesse caso pode sempre considerar-se uma nova sequência (y_n) que difere de (b_n) , apenas na posição k , onde coincide com (a_n) . Por construção, é claro que $(y_n) \sim (b_n)$ e que, por outro lado $d((a_n), (y_n)) < 1/(k+1)$. Uma vez que este procedimento se pode repetir o número de vezes que se quiser, é claro, que a respectiva distância se pode tornar tão pequena quanto se queira. Tudo isto tem uma tradução, no cenário menos formal que envolve directamente as pavimentações. Embora exista um número infinito de pavimentações de tipo A, a verdade é que dada uma qualquer configuração que ocorra numa região finita de uma delas, essa mesma configuração ocorre (um número infinito de vezes) em qualquer outra, ou seja, as pavimentações de tipo A não se podem distinguir umas das outras localmente.

Retomando a relação (**), a conclusão permitida é a de que, os métodos geométricos clássicos aplicados à determinação da estrutura das pavimentações de tipo A, não distinguem essencialmente essa estrutura do espaço geométrico que possui um único ponto. A conclusão de que existe essencialmente uma pavimentação de tipo A é muito forçada. Muito embora qualquer configuração local, que surja numa delas, surja em todas as outras, recordamos que não existe simetria translacional, o que torna a conclusão pouco adequada e amplamente insatisfatória.

A geometria capaz de proceder a este tipo de caracterização, apesar de tudo, existe. Trata-se de uma *invenção* relativamente recente, designada por *geometria quântica* ou *geometria não comutativa*.

Classicamente, é possível, associar a cada espaço geométrico (no sentido de Riemann) uma estrutura matemática vulgarmente designada de *álgebra*. A teoria clássica revelou que, de certo modo, a estrutura geométrica encontra uma tradução na estrutura algébrica, tornando possível estudar a geometria na álgebra. Acontece que as álgebras que se obtêm a partir dos espaços geométricos clássicos possuem todas uma propriedade, a *comutatividade*. Afortunadamente, os conceitos que permitem estudar geometria nas álgebras, generalizam-se a álgebras que não são comutativas. Abrindo portas a novos espaços geométricos em que a noção de *ponto* deixa de ter significado. Esta nova geometria fornece a chave para o estudo da complexidade do conjunto das pavimentações de tipo A, mas ao mesmo tempo fornece os meios para o estudo da física quântica, o seu advento tem a mesma relevância que a descoberta de geometrias não-euclidianas. Se estas, mostraram não haver razão para considerar uma noção absoluta de espaço, já a geometria não comutativa, veio mostrar que a geometria não é o estudo de certo tipo peculiar de objectos, mas antes um método ou, se se quiser, uma certa abordagem racional.

Não menos surpreendente é o facto de estes objectos aparentemente simples, como são as pavimentações, e cujo valor intelectual parecia restringir-se ao seu valor estético, partilharem com realizações intelectuais sofisticadas (como a física quântica) aspectos da sua natureza.

Notas

¹ Gostos não se discutem.

² Assim designada porque deixa em aberto a possibilidade de se ter $d(x, y) = 0$ mesmo que $x \neq y$.

³ Em rigor esse mínimo pode não existir, existindo contudo o respectivo ínfimo mas, para os propósitos desta exposição podemos pensar em termos de mínimos.

António M. Fernandes
Dep. Matemática — IST