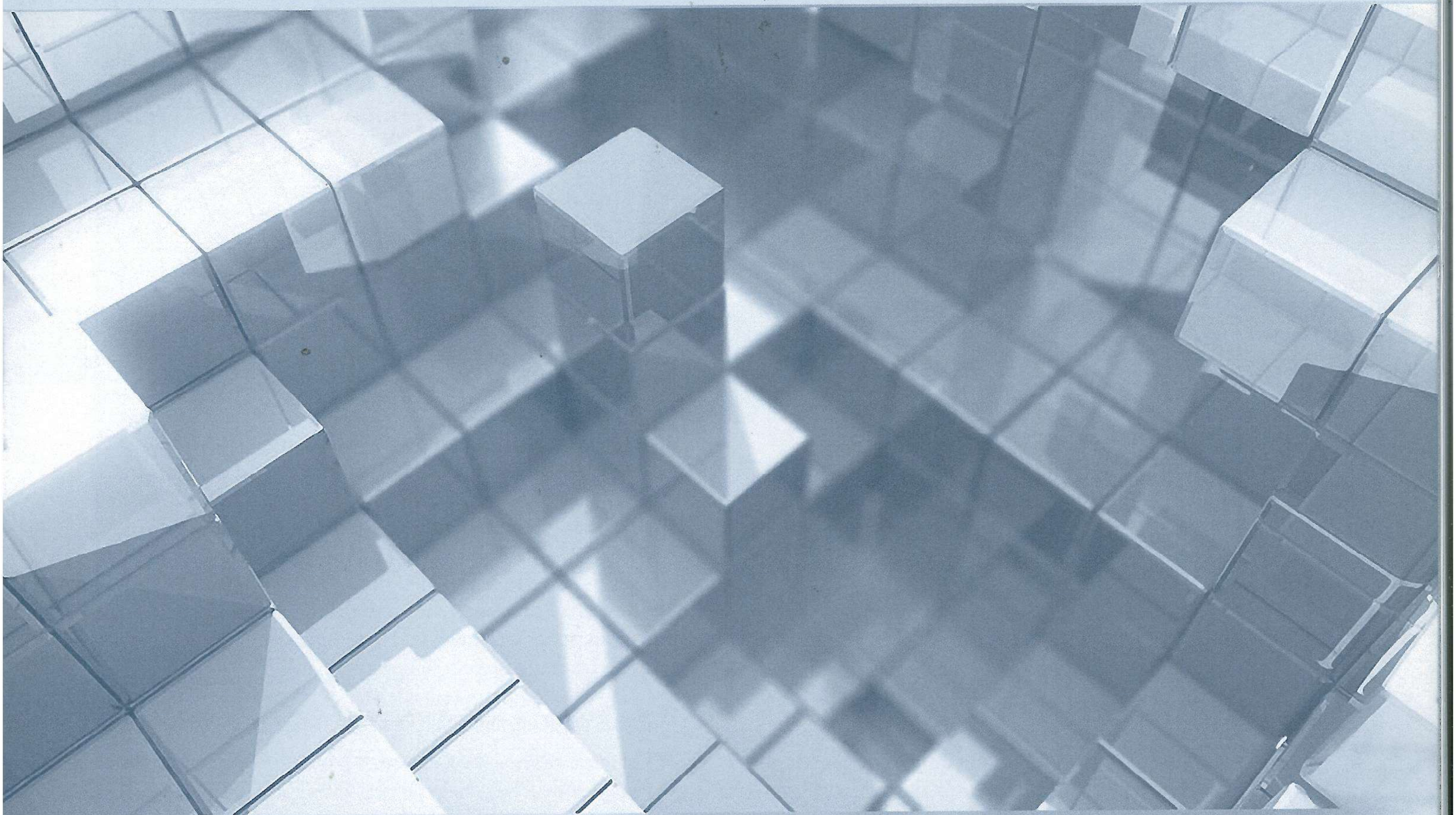

Transformações Geométricas

Rita Bastos

Quando nós, professores dos ensinos básico e secundário, falamos em transformações geométricas, de uma maneira geral estamos a pensar nas isometrias — translações, rotações, reflexões e todas as compostas destas — e pouco mais. Mesmo quando abordamos o conceito de semelhança no ensino básico, raramente trabalhamos o tema enquadrado no das transformações geométricas do plano ou do espaço. Normalmente, limitamo-nos a falar de figuras semelhantes, em especial triângulos, e utilizar, em exercícios e problemas, o facto de estas terem lados proporcionais e ângulos congruentes. No ensino secundário, quando temos a oportunidade de voltar ao assunto das transformações geométricas, a propósito das operações com números complexos ou da comparação de gráficos de funções da mesma família, não temos tempo para o fazer como seria desejável. Isto é, não temos tempo para pôr a tónica nas conexões dos temas matemáticos, que nos ajudam a compreender melhor a matemática, a sua natureza e as suas aplicações.

No entanto, justificar-se-ia que se desse muito maior importância às transformações geométricas, em primeiro lugar pela relevância que elas têm na história da matemática recente — veja-se o Programa de Erlangen, de Félix Klein, que influenciou o desenvolvimento da matemática no século XX — mas também porque constituem um campo rico de conexões, uma ferramenta muito útil para demonstrações, para resolver problemas e, de uma maneira geral, para raciocinar sobre o plano e o espaço.

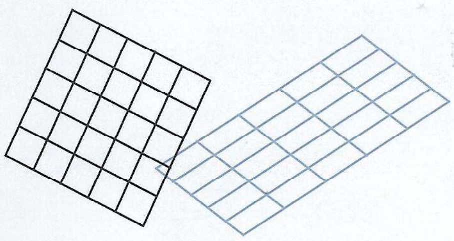

Figura 1. Uma grelha quadriculada e a sua sombra projectada pelo Sol

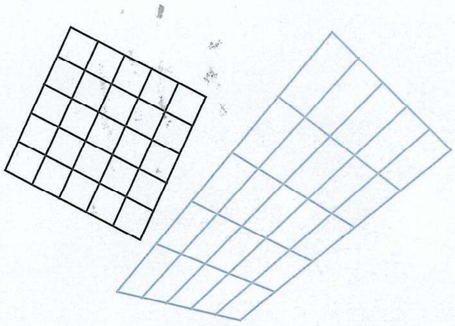

Figura 2. A mesma grelha quadriculada e a sua sombra projectada por um ponto de luz

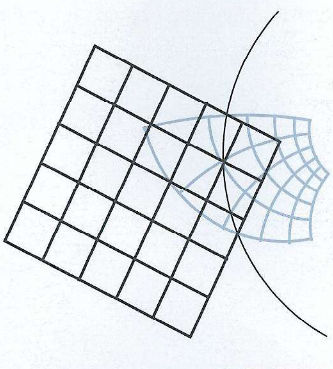

Figura 3. A grelha quadriculada e a sua transformada por uma inversão

Que transformações geométricas?

O mundo das transformações geométricas é muito vasto. Para além das transformações que melhor conhecemos — as isometrias e as semelhanças — temos um sem número de exemplos de transformações geométricas, com as quais os nossos alunos poderiam tomar contacto, não para conhecer os seus nomes ou enumerar as suas propriedades, mas para se aperceberem da riqueza desta área da geometria e de que, tal como noutros temas matemáticos, há uma estrutura comum por trás de tanta diversidade.

Pensemos, por exemplo, numa figura plana e na sua sombra num outro plano, o de uma folha de papel, por exemplo. Depois façamos coincidir os dois planos e observemos a figura original e a sua transformada – a sombra. Qual é a transformação geométrica que está aqui em causa? Que relações geométricas são preservadas pela transformação assim definida? Provavelmente, por esta altura, já o leitor está a pensar na questão essencial desta situação: sombra originada pelo Sol ou por um ponto de luz? E com toda a razão, porque no primeiro caso podemos considerar os raios do Sol paralelos e, por isso, a transformação geométrica em causa é uma projecção paralela, que preserva o paralelismo e a razão entre comprimentos de segmentos com a mesma direcção (figura 1); no segundo caso temos uma projecção central que não preserva nenhuma destas relações, mas preserva a colinearidade (figura 2).

A projecção paralela é uma transformação da família das afinidades, ou transformações afins, e a projecção central pertence, conjuntamente com todas as afinidades, à família, mais alargada, das transformações projectivas. Entre estas últimas, encontramos a perspectiva cónica ou dos pintores.

Um outro exemplo, muito interessante, é o que se passa com a reflexão de um plano num espelho cilíndrico. Claro que há algumas dificuldades em materializar este tipo de transformações porque os espelhos físicos só reflectem de um lado e não dos dois, como os *espelhos matemáticos*, mas a nossa imaginação e um programa de geometria dinâmica podem muito bem completar aquilo que vemos no mundo físico.

A transformação a que nos referimos e que está ilustrada na figura 3, a inversão, não preserva a colinearidade, ao contrário de todas as anteriores.

Muitos são os artistas que se têm interessado pelos efeitos visuais produzidos por transformações geométricas (figuras 4 e 5). Elas constituem, além do mais, um tema privilegiado para estabelecer ligações entre a matemática e a arte, muito para além do estudo da simetria, que já foi aqui referido num outro artigo desta secção[1]. Também no próximo número desta revista, será publicado um artigo de Eduardo Veloso, sobre o tratado de perspectiva para pintores, de Piero de La Francesca e a sua pintura renascentista.

Alguns aspectos matemáticos das transformações geométricas

Uma transformação geométrica é sempre uma função bijectiva, de um espaço nele próprio. Nós, professores do ensino básico e secundário, trabalhamos apenas com as transformações geométricas em que esse espaço é o conjunto de pontos do plano, muitas vezes designado por R^2, dada a identificação de cada ponto com as suas coordenadas, ou o conjunto

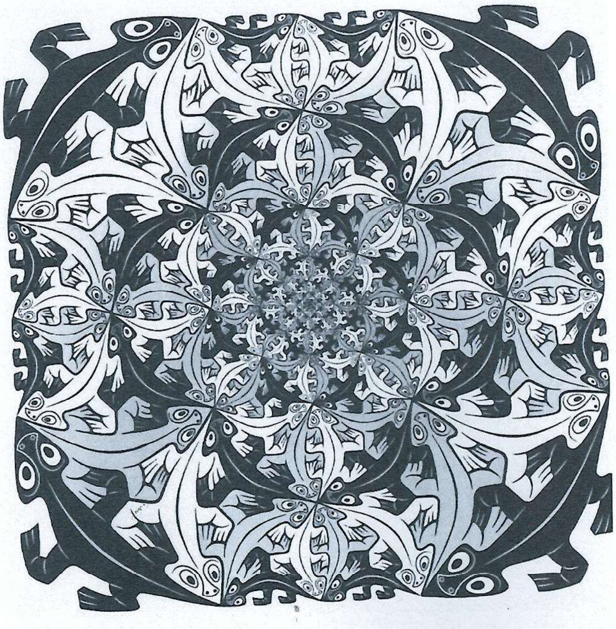

Figura 4. Na gravura *Cada vez mais pequeno*, de M. C. Escher, 1975, podemos ver a transformada de uma pavimentação regular do plano por uma transformação geométrica que Escher concebeu.

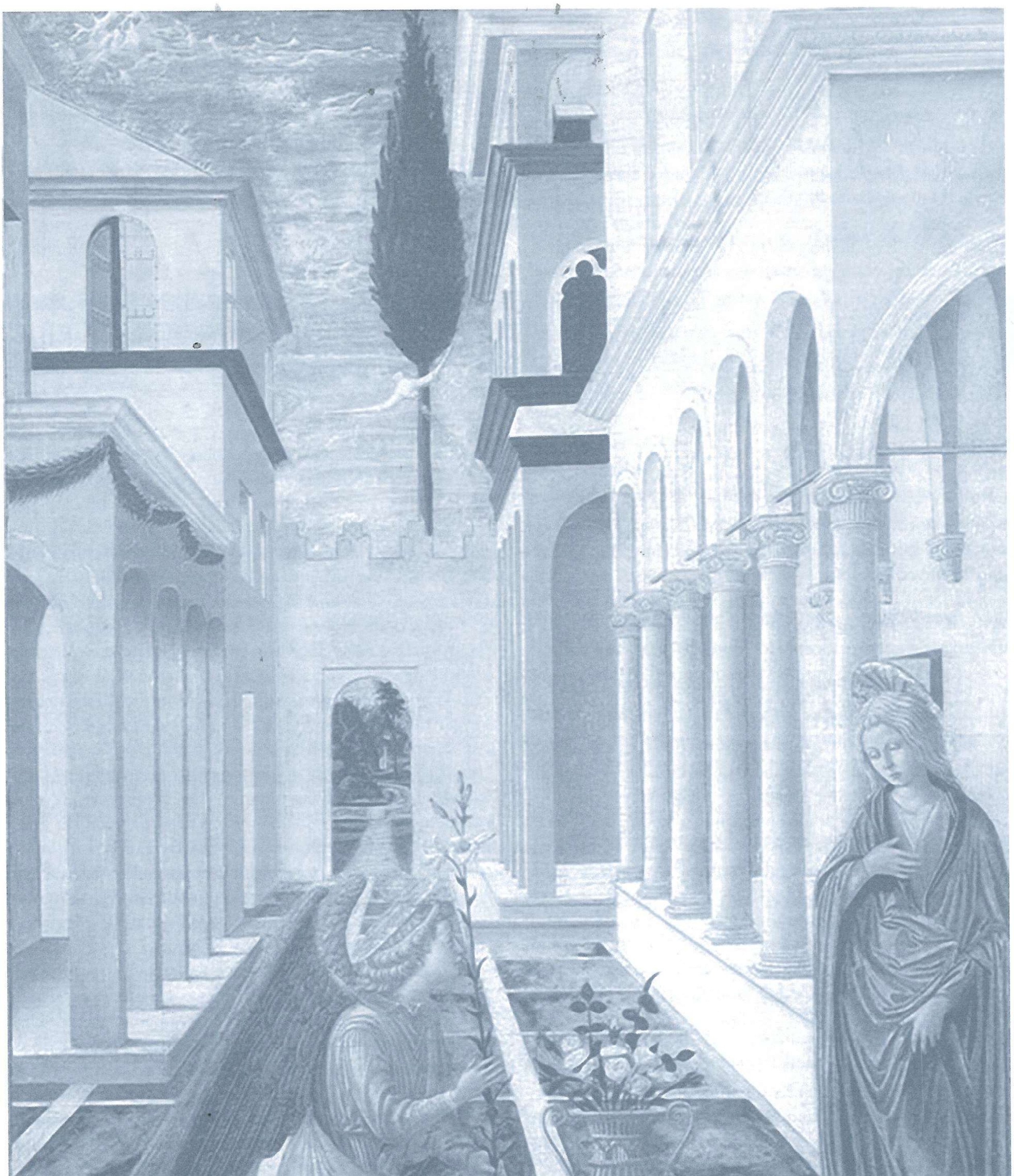

Figura 5. A perspectiva em A Anunciação. Fra Carnavale. 1445—50

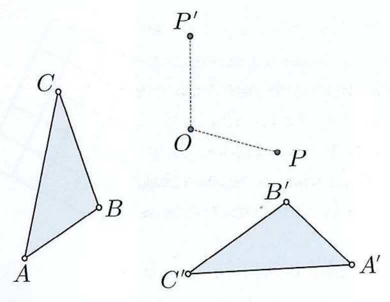

Figura 6. A rotação de centro O e amplitude 105°, transforma o triângulo ABC no triângulo A'B'C', mas também transforma o ponto O nele próprio e qualquer outro ponto P do plano num ponto P' tal que m[$\angle$POP'] = 105° e que $\overline{OP} = \overline{OP'}$.

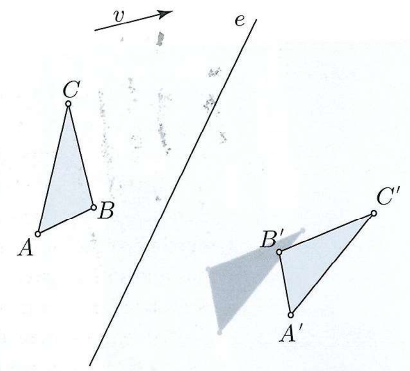

Figura 7. A'B'C' é o transformado de ABC pela composta ToR, em que T é a translação definida pelo vector v e R é a reflexão definida pelo eixo e.

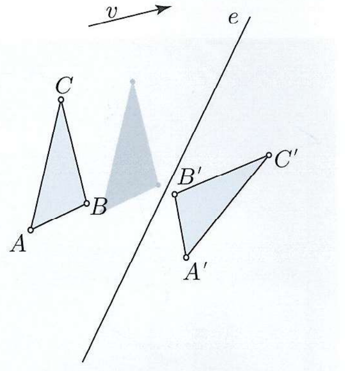

Figura 8. O mesmo triângulo ABC, agora transformado pela composta RoT. O resultado é diferente do da figura anterior, não há comutatividade.

de pontos do espaço tridimensional, também chamado R^3. Portanto, e dito de outra maneira, uma transformação geométrica é uma correspondência biunívoca do conjunto de todos os pontos do plano (ou de todos os pontos do espaço) sobre si próprio. Este é um aspecto muito importante que é muitas vezes esquecido, quando vemos escrito ou quando dizemos, por exemplo, que "rodamos o triângulo *ABC*". Na verdade a rotação transforma não apenas o triângulo ABC mas todos os pontos do plano (ou do espaço) em que este está contido, embora muitas vezes nos interesse apenas analisar as relações entre uma dada figura (o triângulo *ABC*) e a sua transformada por essa rotação (figura 6).

Esta definição, de transformação geométrica como uma aplicação bijectiva, é essencial para o que se segue: a operação composição usual entre funções de qualquer tipo.

Dadas duas transformações geométricas do plano (ou do espaço), o resultado da composição das duas é a que se obtém se aplicarmos uma a seguir à outra. Isto é, se T transforma o ponto P no ponto P' e S transforma o ponto P' em P'', a composta SoT transforma o ponto P no ponto P''. É fácil demonstrar que esta aplicação é também uma transformação geométrica do plano (ou do espaço) e que a operação composição tem a propriedade associativa, mas não a propriedade comutativa (figuras 7 e 8).

Um resultado imediato do facto de termos exigido que uma transformação geométrica seja biunívoca, é que toda a transformação geométrica tem inversa. Isto é, é sempre possível "voltar atrás", "desfazer" uma transformação, aplicando a sua inversa. Como é natural, a composta de uma transformação com a sua inversa é a transformação identidade, a que transforma cada ponto em si próprio. A transformação identidade é o elemento neutro da operação composição.

Posto isto, já todos os que nos estão a ler devem ter reconhecido a estrutura algébrica que está subjacente ao conjunto de todas as transformações geométricas do plano (ou do espaço) com a operação composição: é um grupo (não comutativo). A observação deste facto, juntamente com o conhecimento que temos de outros grupos (os números inteiros com a operação adição, por exemplo), fornece-nos imediatamente uma compreensão, bastante poderosa, deste tema.

É interessante, depois desta observação, investigar que subconjuntos de transformações constituem subgrupos daquele grupo, isto é, que também são grupos. Ou seja, quais são as transformações que, compostas entre si, dão origem a transformações do mesmo tipo, que incluem a transformação identidade e tal que todas têm inversa do mesmo tipo. Por exemplo, pensando só nas transformações do plano:

Podemos dizer que a composta de duas translações é sempre uma translação? E há alguma translação que seja igual à identidade? Todas as translações têm uma translação inversa? A resposta a todas estas questões é afirmativa (deixo ao leitor que nunca pensou nisto o prazer de descobrir porquê), por isso, o conjunto das translações do plano é um subgrupo do conjunto de todas as transformações geométricas do plano.

Mas com as reflexões já não se passa nada disto. A composta de duas reflexões não é uma reflexão: é fácil ver que a reflexão muda a orientação[2] das figuras, por isso, mudando a orientação duas vezes sucessivamente, vamos obter uma figura com a orientação da primeira (figura 9). Então, o conjunto das reflexões do plano não é um subgrupo do grupo das transformações geométricas do plano. Outra forma de chegarmos à mesma conclusão é pela observação do facto de não podermos transformar cada ponto do plano nele próprio por reflexão: a transformação identidade não pode ser uma reflexão.

Deixo ao leitor o desafio de investigar que outras transformações geométricas suas conhecidas constituem subgrupos, e também que tipo de transformações geométricas se obtém quando se compõem duas que não pertencem ao mesmo subgrupo. Esta estrutura, e a organização das transformações geométricas em subgrupos que preservam, ou deixam invariantes, determinadas relações, revelaram-se tão importantes que foi com base nelas que Félix Klein propôs, em 1872, no célebre Programa de Erlangen, a unificação e classificação das geometrias[3].

Assim, a geometria euclidiana é aquela em que duas figuras congruentes são as que podem ser transformadas uma na outra por uma isometria, ou seja, por uma transformação geométrica que preserva as distâncias. Na geometria afim, por exemplo, duas figuras são congruentes se houver uma afinidade que transforme uma na outra — como é o caso de uma circunferência e uma elipse. Se demonstramos um te-

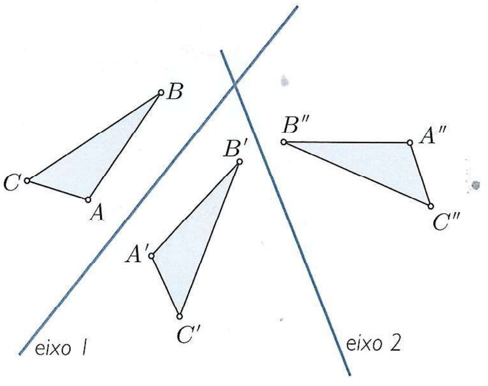

Figura 9. Os triângulos ABC e A'B'C' têm orientações diferentes, mas o triângulo A''B''C'' tem a mesma orientação de ABC. Não pode, por isso, ser a imagem de ABC por uma reflexão.

orema para a circunferência onde só intervêm propriedades e relações invariantes nesta geometria, o teorema é válido para todas as elipses.

A geometria que engloba todas estas é a geometria projectiva que, podendo ser abordada na forma sintética, a um nível bastante elementar, é bastante poderosa nos métodos de demonstração, nos resultados que nos permite obter e na visão unificadora que nos proporciona. Infelizmente, o movimento da Matemática Moderna acabou com ela nos cursos superiores, e em consequência disso actualmente poucos professores dos ensinos básico e secundário têm conhecimentos neste campo.

Transformações geométricas no ensino básico e no ensino secundário

Na primeira parte deste texto, defendi que os alunos deveriam tomar contacto, desde cedo, com outros tipos de transformações geométricas, que não sejam só as isometrias e as semelhanças. Estas últimas podem ser trabalhadas pelos alunos mais novos através de experiências em que observem, representem e descrevam movimentos, ampliações e reduções, como é recomendado pelo National Council of Teachers of Mathematics nos *Principles and Standards for School Mathematics*. Exemplifiquei a abordagem de outras transformações geométricas com a observação e representação de sombras, para o caso das transformações afins e projectivas, e com o espelho cilíndrico para a inversão.

Mas devemos ter algum cuidado e, como professores, saber que estas duas últimas têm uma característica especial — é que não são aplicações bijectivas a não ser que se complete o plano ou o espaço com pontos no infinito. Se esta observação não é relevante para os alunos mais novos, a partir de certa altura é importante que os alunos vão formalizando os aspectos matemáticos relacionados com as transformações geométricas. E é, sobretudo, importante que os professores conheçam bem as transformações com que estão a trabalhar para saberem orientar os alunos na construção correcta das ideias.

As isometrias, que até agora têm integrado os programas do ensino básico separadamente, devem ser trabalhadas em conjunto porque é na comparação das suas propriedades — pontos fixos, orientação dos originais e das imagens e outras — e nas composições e relações entre elas que reside a tal estrutura que devemos ir progressivamente revelando aos alunos, ao longo da escolaridade. Além disso, o estudo da simetria é o melhor ambiente para aprofundar as isometrias, mas isso só é possível se os alunos trabalharem com todas as isometrias simultaneamente.

As semelhanças deveriam ser trabalhadas do ponto de vista das transformações geométricas, talvez no terceiro ciclo, e constituem uma óptima oportunidade para se estabelecer conexões com as funções, nomeadamente as proporcionalidades directas, e para aprofundar o conceito de razão. De facto, o grupo das semelhanças caracteriza-se por deixar invariantes as razões entre comprimentos, o que corresponde a um conceito mais alargado de razão que, geralmente, se reduz à razão entre números.

A algebrização das transformações geométricas pode e deve ser feita no ensino secundário, designadamente quando se trabalhar com os números complexos. Um programa de geometria dinâmica é um recurso excepcional para fazer a conexão entre a geometria e o corpo dos complexos, conexão esta que torna ambos os temas muito mais poderosos na resolução de problemas. Também no secundário se deveria abordar as afinidades e, porque não?, alguns elementos de geometria projectiva. O estudo sintético das cónicas seria uma boa oportunidade para compreender um pouco da história da geometria desde a antiguidade até ao século XIX. A geometria projectiva vem revelar a sua unidade e a geometria analítica, finalmente — e sobretudo nunca partindo daí — permite-nos deduzir as várias equações que traduzem essa unidade.

Notas

1 Ver *Notas para o Ensino da Geometria — Sobre Simetria*, no número 88 da revista *Educação e Matemática*, páginas 9–11.

2 Estamos aqui a falar de orientação de ângulos ou de triângulos. Um triângulo ABC, por exemplo pode orientar-se de duas maneiras, que correspondem aos dois sentidos em que é possível percorrer a sua fronteira: de A para B para C; ou de A para C para B.

3 Foi durante o século XIX que se deram os grandes desenvolvimentos na teoria dos grupos, com Galois, na geometria projectiva, com Poncelet, Chasles e Staudt, e nas geometrias não euclidianas de Lobatchevski, Bolyai e Riemann, entre outros.

Bibliografia

Franco de Oliveira, A. J. (1997). *Transformações Geométricas*. Lisboa: Universidade Aberta.

Klein, F. (1991). *Le Programme d'Erlangen*. Sceaux : Editions Jacques Gabay.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. USA: NCTM.

Sebastião e Silva, J. (?). *Transformações Geométricas*. Lisboa: Associação de Estudantes da Faculdade de Ciências.

Rita Bastos
Grupo de Trabalho de Geometria da APM