CEFs — Sentido e Emoção na Matemática

Os Cursos de Educação e Formação de jovens têm como objectivo a recuperação dos défices de qualificação escolar e profissional da população portuguesa jovem, através da aquisição de competências escolares, técnicas, sociais e relacionais, que lhes permitam o acesso a desempenhos profissionais mais qualificados. Estes cursos pretendem contribuir para a formação de jovens em situação de abandono escolar e em transição para a vida activa, nomeadamente dos que entram precocemente no mercado de trabalho com níveis insuficientes de formação escolar e de qualificação profissional. Estes são os objectivos preconizados pelo Ministério da Educação para os cursos vulgarmente designados por CEF. É a alternativa para alguns alunos, mas pode tornar-se num grande problema para os professores, por isso, resolvemos divulgar a nossa experiência, por sinal, bastante positiva.

No ano lectivo 2006/2007, a Escola Secundária da Moita acolheu, pela primeira vez, este tipo de cursos. Para sermos mais precisos funcionaram 3 turmas do Curso tipo 2, Curso Técnico Comercial, e 2 turmas do Curso tipo 5, Curso Técnico Instalação e Manutenção de Sistemas Informáticos. Tratando-se de alunos que apresentam perfis diversos no que respeita à heterogeneidade (idade, comportamento, nível e percurso escolar), revelou-se imprescindível a uniformização de critérios de actuação relativamente ao comportamento/ atitudes destes jovens.

No início do ano lectivo, os alunos acusavam desintegração social e dificuldades ao nível da capacidade de concentração e de perseverança na realização das actividades lectivas, bem como limitações na assumpção das responsabilidades individuais, factores condicionadores do seu desempenho. As dificuldades ao nível da expressão oral e escrita constituíam, também, limitações acrescidas. Assim, desde o início, foi necessário adoptar estratégias pedagógicas diversificadas conducentes à integração e ao sucesso destes jovens. Algumas passaram pela simples aprendizagem da forma de estar na sala de aula e pela sensibilização para a necessidade de se fazerem acompanhar dos materiais imprescindíveis a uma participação activa nas tarefas escolares.

Nas diferentes turmas, e perante o conjunto que descrevemos, confrontámo-nos com alunos cujo historial era de insucesso na disciplina de Matemática. Assim, desde logo, sentimos que se tornava indispensável adaptar o programa da disciplina de Matemática Aplicada às características peculiares destes jovens.

Atendendo a que, em sociedades democráticas e tecnologicamente avançadas, a matemática é uma componente essencial da formação para o exercício da cidadania, procurámos que a disciplina de Matemática Aplicada assumisse uma forma necessariamente muito concreta e ligada à realidade.

Na nossa prática lectiva assumimos uma atitude firme mas simultaneamente de compreensão, de modo a promover o envolvimento dos alunos nas actividades propostas. Associando as novas tecnologias, os alunos realizaram predominantemente tarefas de interpretação e modelação de situações reais.

Por exemplo, a turma D do 8° ano, no âmbito do módulo 8 — *Geometria Intuitiva* — efectuou um trabalho denominado *A Escola Secundária da Moita por Formas Geométricas*. Os alunos começaram por fotografar objectos nos espaços exteriores/ interiores da escola e identificar as suas formas geométricas. De seguida, com o recurso aos computadores, realizaram todo o trabalho necessário à produção de um filme.

Com este trabalho foi possível observar o importante reforço da motivação e da autoconfiança dos discentes. Assim, do ponto de vista da professora e dos alunos, esta actividade revelou-se bastante profícua, uma vez que permitiu a apreensão e consolidação, de forma lúdica e agradável, dos conteúdos abordados no tema em estudo. Os alunos adquiriram competências matemáticas para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação e ficaram aptos para classificar e definir poliedros de uma mesma família.

No 11° ano, no módulo 21 — *Funções Polinomiais*, os alunos trabalharam actividades de modelação através da recolha de dados a partir de CBR e CBL e do site[1] do INE (Instituto Nacional de Estatística). Com estes dados procuraram as funções adequadas à situação tratada por cada um dos grupos de alunos e criticaram os resultados obtidos. O recurso às tecnologias foi essencial para o desenvolvimento deste trabalho, uma vez que permitiu o rápido tratamento da informação, através de ferramentas como a folha de cálculo e outras onde era possível a alteração de parâmetros nas funções encontradas, para melhor ajuste das rectas e curvas obtidas. Os alunos tiveram oportunidade de adquirir a competência matemática para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais, utilizando diversos tipos de funções e adquiriram igualmente competências de interacção e participação social.

Estas práticas lectivas caracterizaram-se por uma atitude de abertura e de aceitação relativamente ao que os alunos eram capazes de concretizar. Mais do que implementar o programa de Matemática Aplicada como uma listagem de conteúdos a leccionar, a preocupação centrou-se no desenvolvimento de competências, de uma forma integrada e apoiada, com o objectivo de aprender a reconhecer na Matemática o papel fundamental que esta desempenha no mundo que nos rodeia.

É de referir que o trabalho realizado com estes alunos foi evoluindo de forma positiva ao longo do ano lectivo, em função da melhoria verificada na sua forma de estar na sala de aula e do desenvolvimento de actividades de carácter prático, adequadas às suas características. Desta forma, foram atingidos, com sucesso, os objectivos propostos para a disciplina e alterada a visão da matemática, que os alunos tinham inicialmente, algo abstracto e sem qualquer ligação com a realidade.

Nota

1 http://www.ine.pt/portal/page/portal/PORTAL_INE/Publicacoes?PUBLICACOESpub_boui=5921019&PUBLICACOESmodo=2

Fernanda Velez
Paulo Dias
Escola Secundária da Moita

Um olhar sobre as provas de aferição...

Sou professora há 12 anos e gosto muito do que faço. Desde sempre que tenho convicções relativamente ao papel que devo ter no ensino da Matemática e confesso que essas convicções têm vindo a sofrer reajustes ao longo da minha carreira profissional.

Embora a realidade escolar esteja a mudar a passos largos, essas mudanças nunca me fizeram desistir de investir na minha formação contínua como forma de poder oferecer aos meus alunos novas formas de aprender matemática.

Tenho consciência de que não posso parar no tempo. Este meu esforço pessoal, muitas vezes com penalizações para a família, tem de ser recompensado de alguma forma. Sou exigente! Exijo dos meus alunos trabalho, rigor e seriedade na aprendizagem da Matemática. E como tanto as crianças, como adultos me dizem: "Continue assim!" Dificilmente mudarei!

Hoje o que se pede a um professor de Matemática? Que diversifique os instrumentos de avaliação, que use as tecnologias, que desenvolva tarefas de investigação/exploração com os seus alunos, que resolva problemas, que dinamize projectos na escola, que crie planos de acção para colmatar o insucesso a Matemática, que seja reflexivo, etc..

Considero que sou um pouco de tudo isto, e que muito trabalho me dá ser assim. Mas este ano lectivo, o facto de ter sido seleccionada para classificadora das provas de aferição de 6° ano fez-me questionar muita coisa. O que ando eu aqui a fazer? Ser exigente para quê? Pedir rigor na aprendizagem da Matemática com que fundamento? Diversificar práticas com que objectivo, quando se pretende que, no final de um 2° ciclo, um aluno apenas saiba uma operação inversa ou inicie a resolução de um problema com um raciocínio que depois de desenvolvido até nem leva à resposta correcta e seja premiado por isso?

É sem dúvida desmotivante para um professor criar práticas lectivas que exijam dos alunos o desenvolvimento de competências no âmbito da matemática e depois ver que a avaliação externa que se faz tem um grau de dificuldade mínimo e que os alunos são premiados apenas pelo facto de "respirarem". Saber Matemática é isto?

Vejamos um exemplo. Um dos problemas da prova de aferição deste ano tinha um conjunto de moedas que o aluno tinha que distribuir de igual forma por quatro meninos. Um aluno que distribuísse três quantias iguais, mesmo usando moedas não contempladas nos dados do problema, já era premiado com código. Ora, do meu ponto de vista, este tipo de resolução só demonstra que o aluno não sabe utilizar os dados de um problema para o resolver, nem tão pouco sabe ser crítico.

Depois de analisar e reflectir acerca das capacidades a avaliar, expressas num documento existente na Internet na página do GAVE, relativamente à resolução de problemas, ao raciocínio e à comunicação matemática, onde se pretende que um aluno consiga, por exemplo, "*interpretar e criticar resultados dentro do contexto de uma situação*", acerca de algumas das respostas dadas pelos alunos e dos critérios de correcção que me obrigaram a seguir rigidamente, só me posso questionar e pôr em causa o porquê de todo o meu trabalho.

Noto alguma incoerência entre o que se pretende avaliar e o que na realidade se avalia. Por isso, algo tem de mudar, só não percebi ainda o quê! Sou eu que estou a agir mal nisto tudo?

Voltando às minhas convicções, penso que o grau de exigência no ensino deve aumentar para que possamos ser mais competitivos, os alunos devem ser mais responsabilizados pela sua aprendizagem, bem como os pais e encarregados de educação.

A avaliação externa deve passar a ter implicações na aprovação ou não aprovação dos alunos no final de cada ciclo, devendo por isso, ser repensada e discutida com os professores para que exista coerência entre o que se ensina e o que se avalia externamente no final de cada ciclo.

Renata Carrapiço
Escola EB 2, 3 Padre Vitor Melícias

Um por um no "Um contra todos"

No número 84 da revista *Educação e Matemática*, Lina Brunheira faz uma proposta de trabalho interessante envolvendo o concurso *Um contra todos* que passa diariamente na RTP1. Também nós já tínhamos pensado qual seria a melhor estratégia e qual a maior quantia que o concorrente poderia arrecadar. A proposta que é feita na revista é de um trabalho experimental, com a máquina de calcular e paciência. Quem fez as experiências já percebeu que o melhor mesmo é derrotar um adversário em cada jogada. O que nos propomos agora é demonstrar que é mesmo assim. A demonstração é bastante simples e pensamos que pode ser feita com os alunos do ensino superior. Recordemos as regras do jogo:

1. Em cada jogada há uma pergunta que deve ser respondida independentemente pelo jogador e por cada um dos adversários;
2. O jogador perde se errar uma pergunta e acaba o jogo;
3. Em cada jogada há um máximo de 12500 euros que podem ser ganhos pelo jogador;
4. Cada adversário que não acerta uma pergunta sai definitivamente do jogo, pelo que o número de adversários vai diminuindo à medida que o jogo avança;
5. Em cada jogada, o jogador ganha proporcionalmente ao número de adversários que não acertam. O valor de cada adversário é 12500 euros a dividir pelo número de adversários em jogo;
6. Se, numa jogada, todos acertarem passa-se à jogada seguinte sem perdas nem ganhos;
7. Numa determinada jogada (uma única vez) o jogador pode decidir que os seus ganhos vão ser a dobrar;
8. Se o jogador não souber uma resposta pode comprar o direito a continuar perdendo $25, 50$ ou 75% do que já acumulou e claro que não ganha nada independentemente do número de adversários que falharem.

Vejamos agora como traduzir tudo isto numa expressão matemática.

Na jogada inicial há 50 adversários, valendo cada um 250 euros

$$(50 \times 250 = 12500).$$

Se x_1 adversários falharem a resposta e o jogador acertar, este recebe $250\ x_1$ euros.

Na segunda jogada já só há $50 - x_1$, adversários, por isso cada um deles vale $12500/(50-x_1)$ euros. Neste ponto, se x_2 adversários falharem e o jogador acertar, ele recebe mais $12500/(50-x_1)x_2$ euros. E assim por diante até falharem todos os adversários, altura em que o jogador ganha o total acumulado.

Como pretendemos determinar qual o montante máximo que o jogador pode receber e qual o processo que conduz a esse máximo, vamos supor que:

1. O jogador acerta sempre (se falhar o jogo acaba e ele não recebe nada);
2. Em cada jogada há pelo menos um adversário que falha (pois se nenhum falhasse o jogador não recebia nada e tudo se passaria como se a jogada não tivesse acontecido);
3. O jogador nunca compra o direito a continuar (caso contrário não receberia a quantia máxima);
4. A jogada em que decide dobrar os ganhos é a última (na última jogada o jogador ganha sempre 12500 euros seja qual for o número de adversários ainda em jogo, uma vez que todos falham a resposta).

Com base nestes pressupostos, podemos afirmar que o número de jogadas é, no máximo 50, situação que corresponde a falhar um adversário em cada jogada.

Definição das variáveis:

$k \rightarrow$ número de jogadas, no máximo 50;

$x_i \rightarrow$ número de adversários que falham na jogada i $(i = 1, ..., k)$;

$y_i \rightarrow$ número de adversários em jogo na jogada i $(i = 1, ..., k)$.

Restrições do problema:

$x_i \leq y_i$ $(i = 1, ..., k)$ não podem falhar mais do que os que estão em jogo;

$y_1 = 50$ (número de adversários na jogada inicial);

$x_k = y_k$ (o jogo acaba quando todos os adversários falham).

Total dos ganhos:

$$\frac{12500}{50}x_1 + \frac{12500}{y_2}x_2 + L +$$

$$+\frac{12500}{y_{k-1}} + 2 \times \frac{12500}{y_k}x_k =$$

$$= 12500 \times \sum_{i=1}^{k-1}\frac{x_i}{y_i} + 25000.$$

Como todas as parcelas estão multiplicadas pela mesma constante e a última parcela é fixa, o problema pode então ser formulado:

Maximizar

$$z = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{x_i}{y_i}$$

com

$$\begin{array}{ll} y_1 = 50 & \\ k \leq 50 & \\ x_i \leq y_i & (i = 1, ..., k-1) \\ y_{i+1} = y_i - x_i & (i = 1, ..., k-1) \\ x_k = y_k & \\ x_i > 0, y_i > 0 & (i = 1, ..., k) \\ x_i, y_i \text{ inteiros} & (i = 1, ..., k) \end{array}$$

Como $y_{i+1} < y_i$, $i = 1, \ldots, k-1$, o valor de cada adversário, $12500/y_i$, aumenta à medida que o jogo avança.

É claro que as variáveis y_i podem ser calculadas à custa das variáveis x_i como se mostra a seguir:

$$y_1 = 50$$

$$y_2 = y_1 - x_1 = 50 - x_1$$

$$y_3 = y_2 - x_2 = 50 - x_1 - x_2 =$$

$$= 50 - (x_1 + x_2)$$

$$\vdots$$

$$y_{i+1} = y_i - x_i =$$

$$= 50 - \sum_{j=1}^{i-1} x_j - x_i =$$

$$= 50 - \sum_{j=1}^{i} x_j, i = 1, \ldots, k-1$$

Deste modo obtém-se a formulação equivalente:

Maximizar

$$z = \sum_{j=1}^{k-1}\frac{x_j}{50 - \sum_{i=0}^{j-1} x_i}$$

com

$$x_0 = 0$$

$$k \leq 50$$

$$x_j > 0\ (j = 1, ..., k)$$

$$x_j < 50 - \sum_{i=0}^{j-1} x_i\ (j = 1, ..., k-1)$$

$$x_k = 50 - \sum_{i=0}^{k-1} x_i$$

$$x_j \text{ inteiro } (j = 1, ..., k)$$

Ou seja, desenvolvendo o somatório, pretendemos maximizar

$$z = \frac{12500}{50}x_1 + \frac{12500}{50 - x_1}x_2 +$$

$$+\frac{12500}{50 - x_1 - x_2}x_3 + L +$$

$$+\frac{12500}{50 - x_1 - x_2 - Lx_{k-2}}x_{k-1} +$$

$$+\frac{12500}{x_k}x_k \times 2.$$

À primeira vista, o problema parece complexo. Temos uma expressão não linear, as variáveis devem assumir valores inteiros e o número de variáveis é, ele próprio, desconhecido.

Vejamos o que acontece quando há um único adversário que falha em cada jogada. Neste caso, temos

$$k = 50 \text{ e } x_1 = x_2 = \ldots = x_{50} = 1.$$

Vamos designar por $\tilde{x}$ o vector com 50 componentes iguais a 1. Então:

$$\tilde{z} = \frac{12500}{50} + \frac{12500}{49} + \frac{12500}{48} +$$

$$+ L + \frac{12500}{2} + \frac{12500}{1} \times 2$$

$$(\approx 68740,07€).$$

Suponhamos agora que na jogada de ordem i falham p adversários e que em todas as outras falha exactamente um. O número de jogadas neste caso é

$$k = 50 - p + 1.$$

O vector correspondente a este jogo é

$$\hat{x} = (1, 1, \ldots, 1, p, 1, \ldots 1)$$

e tem $k = 50 - p + 1$ componentes, sendo que a componente de ordem i vale p e todas as outras valem 1. Os ganhos associados a este vector são calculados através de:

$$\hat{z} = \frac{12500}{50} + L + \frac{12500}{50-(i-2)} +$$

$$+ \frac{12500}{50-(i-1)} \times p + \frac{12500}{50-i} +$$

$$+ L + \frac{12500}{2} + \frac{12500}{1} \times 2.$$

Temos que comparar os valores de $\tilde{z}$ e $\hat{z}$. Observa-se nestas duas somas que:

- As primeiras $i-1$ parcelas são iguais;
- As últimas $50 - p - i + 1$ parcelas são iguais;
- Em $\tilde{z}$ há p parcelas que não aparecem em $\hat{z}$ (da parcela de ordem i até à parcela de ordem $i + p - 1$);
- Em $\hat{z}$ há uma parcela (a de ordem i) que não aparece em $\tilde{z}$.

Tendo em atenção estas observações podemos calcular a diferença entre os dois valores:

$$\tilde{z} - \hat{z} = \sum_{j=i}^{i+p-1} \frac{12500}{50-(j-1)} -$$

$$- \frac{12500}{50-(i-1)} \times p$$

Pode-se escrever a segunda parcela como uma soma de p parcelas iguais e associar cada uma delas a uma das parcelas do somatório:

$$\tilde{z} - \hat{z} = \left(\frac{12500}{50-i+1} - \frac{12500}{50-i+1}\right) +$$

$$+ \left(\frac{12500}{50-i} - \frac{12500}{50-i+1}\right) +$$

$$+ \left(\frac{12500}{50-i-1} - \frac{12500}{50-i+1}\right) +$$

$$+ L + \left(\frac{12500}{50-i-p+1} - \frac{12500}{50-i+1}\right).$$

A primeira destas parcelas é nula e todas as outras são positivas; então $\tilde{z} > \hat{z}$.

Esta construção mostra que a saída de jogo de p adversários numa qualquer jogada, corresponde a substituir uma soma de p parcelas crescentes por outra de p parcelas iguais entre si e iguais à menor parcela da primeira soma.

A construção feita é facilmente generalizável ao caso em que saem de jogo vários adversários em jogadas distintas.

Fica assim demonstrado que, de facto, o valor máximo que se pode alcançar corresponde a derrotar os adversários um por um. Note-se que no concurso o valor de cada adversário é arredondado às unidades por defeito, pelo que o ganho máximo atingível é de $\tilde{z}_a = 68717$ euros.

Como, antes de responder à pergunta, o jogador deve escolher o grau de dificuldade da mesma (fácil ou difícil), a melhor estratégia, para ganhar o máximo possível, é escolher sempre uma pergunta fácil. Mas, se o jogador pretender "evidenciar a sua cultura", escolhendo difícil, quanto mais cedo o fizer, maior será o seu ganho.

Gabriela Schütz
Escola Superior de Tecnologia de Faro

Marília Pires
Rafael Santos
Departamento de Matemática
Universidade do Algarve