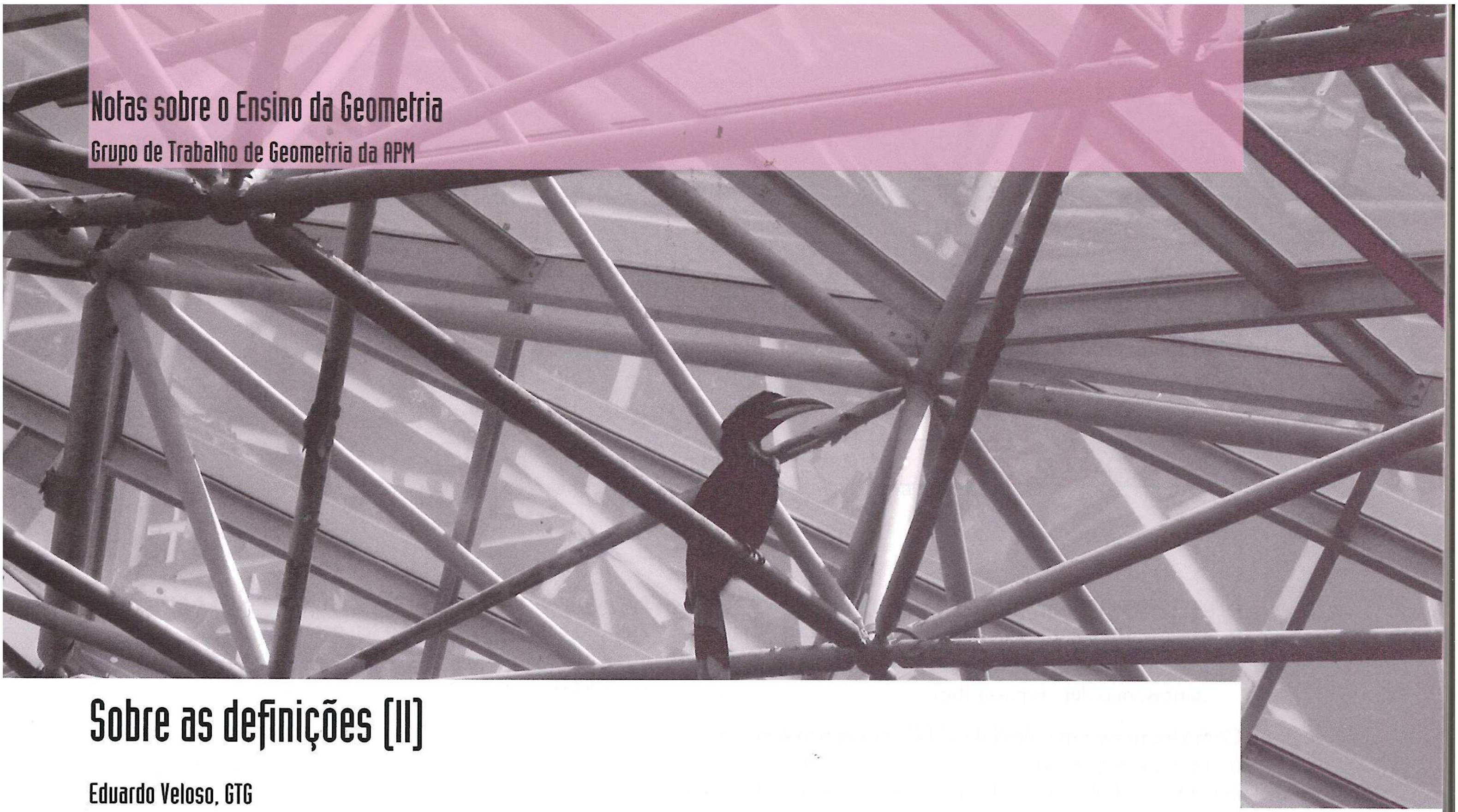

Sobre as definições (II)

Eduardo Veloso, GTG

...
" — *a educação é um processo de vida e não uma preparação para a vida futura.*"
...
" — *a educação fracassa em grande parte porque despreza um princípio fundamental: a escola como forma de vida comunitária [real e presente]. Concebe a escola como um lugar onde deve ser fornecida certa informação, aprendidas certas lições e formados certos hábitos. O valor dessa informação, dessas lições e dos hábitos assim adquiridos é visto como residindo em grande parte num futuro [mais ou menos] longínquo; a criança deve ser sujeita a estas aprendizagens em ordem a qualquer coisa que virá a fazer: são meras preparações. Em consequência, não se tornam parte da experiência de vida da criança e não são verdadeiramente educativas.*"
...

John Dewey, O Meu Credo Pedagógico, 1897

Construção natural dos conceitos geométricos

Nos primeiros anos de vida, e antes de qualquer escolarização, todas as crianças fazem aprendizagens fundamentais. Aprendem a andar e a falar, e constroem uma quantidade enorme de conceitos que passarão a utilizar de forma eficiente no resto da sua vida. Essas aprendizagens decorrem naturalmente da sua vida na comunidade familiar e, para alguns, em creches e jardins de infância, que procuram prolongar ambientes familiares.

É importante constatar que não existe qualquer tentativa de formalizar essas aprendizagens. Por exemplo, como refere Dewey, é através das reacções (em particular da mãe) "ao seu balbuciar instintivos que a criança passa a saber o seu significado e progressivamente os transforma em linguagem articulada, e que desta forma é introduzida nas ideias e emoções que acabam por ser expressas na sua língua materna". Observações análogas se poderiam fazer relativamente às outras aprendizagens naturais dos primeiros anos de vida.

Por outro lado, a ninguém ocorreria (espero eu!) submeter uma criança, digamos aos cinco anos, a uma bateria de testes para saber se ela fez as aprendizagens esperadas dessa primeira fase da sua vida: se sabe distinguir uma porta de uma janela ou um garfo de uma colher, ou se confunde uma bicicleta com um automóvel, ou o Sol com a Lua, ou a mãe com o pai...

Aos seis anos, a criança vai para a escola. Se fosse a escola em que Dewey acreditava, essa mudança iria apenas inseri-la numa vida comunitária mais ampla "mas tão vitalmente real como a familiar, a do bairro ou a do parque de recreio." Com a sua mesma curiosidade e energia superabundante, a criança passaria a viver num ambiente que lhe proporcionaria um leque muito mais amplo de experiências, onde iria construindo da mesma maneira natural novos conceitos e novos modos de pensar e de se relacionar com os outros e com o mundo, iniciando uma nova fase na sua apropriação da herança cultural deixada pelas gerações passadas, nos vários domínios: social, científico, artístico, tecnológico, etc. Mas não, infelizmente o mais provável é que a escola onde entra não seja uma comunidade de vida, mas um sítio de onde mais tarde lhe apeteça fugir. Talvez a melhor caracterização da transformação que a escola "normal" vai operar nessa criança é uma frase, de que tive conhecimento recentemente, proferida por uma professora do 1º ciclo.

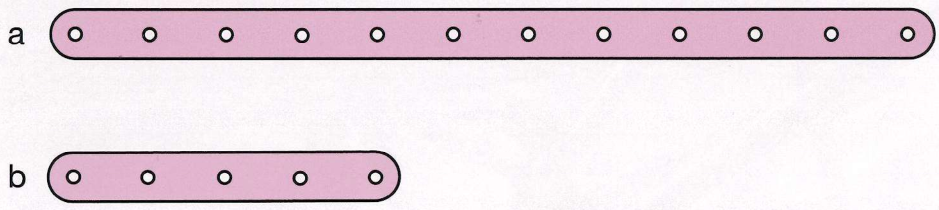

Figura 1.

Não sei reproduzir *ipsis verbis*, mas a professora *congratulava-se* com essa transformação, dizendo qualquer coisa como:

— eles entram cheios de curiosidade e a fazer muitas perguntas, mas depois passa-lhes...

Como fez notar um colega do GTG, talvez não seja correcto dizer que as aprendizagens se fazem na escola da "mesma maneira natural" que as dos primeiros anos de vida, antes da entrada para o 1° ciclo. Para já, o professor tem uma atitude diferente da mãe de uma criança, pois tem uma muito maior consciência — que me atrevo a dizer que muitas vezes é contraproducente —, de que "está ali para ensinar". No entanto, o que se deve esperar é que a sua formação para professor, inicial e depois ao longo da sua vida profissional, o leve a respeitar o percurso próprio da experiência de cada aluno. No caso da matemática, nomeadamente da geometria, o desejável é que a sucessão de experiências dos alunos acompanhe o desenvolvimento da sua maturidade, ao longo de toda a escolaridade.

Nos primeiros anos — digamos 1° ciclo e 5° ano, ou mesmo 6° ano — o aluno vai construindo naturalmente os conceitos, sem uma apresentação formal de definições por parte do professor. Os novos termos, e serão muitos, aparecerão naturalmente durante as múltiplas explorações de materiais manipuláveis de diversos tipos. O professor, sem receio pelo facto de o aluno estar a ouvir pela primeira vez termos que não conhece *nem lhe foram explicados de antemão*, emprega esses termos de forma correcta — diz *vértice* em vez de "bico" ou *ângulo* em vez de "cantinho". Ao mesmo tempo, aceita o "balbuciar geométrico" dos alunos e segue com atenção e muita paciência o seu percurso.

Nos anos intermédios, digamos o terceiro ciclo, as experiências aprofundam-se e os alunos começam a entender que, para se compreenderem uns aos outros, quando estão a trabalhar em geometria, têm que ter algum cuidado na sua linguagem com as palavras que usam. Percebem por exemplo o que o professor quer dizer com a frase: "daqui para a frente, até eu dizer o contrário, nos polígonos os lados não se intersectam, ou seja, os únicos pontos que podem ter em comum são os vértices". Começam assim a compreender o duplo carácter que têm as definições em matemática: por um lado são fundamentais para a compreensão do que estamos a dizer e para podermos saber se as afirmações que fazemos são correctas, por outro lado não são absolutas, isto é, definições diferentes do mesmo conceito podem ser adoptadas se isso se torna conveniente para a nossa comunicação.

No ensino secundário os alunos deveriam aprofundar a sua compreensão da natureza da matemática, e do papel das definições e das demonstrações na construção desta ciência, através de experiências e de projectos próprios de uma maturidade matemática construída nos anos anteriores.

Um exemplo: os paralelogramos

Primeiros anos

Tal como muito provavelmente a primeira ideia de *janela* que uma criança teve foi ao ver a mãe dirigir-se a uma janela e abri-la, enquanto dizia

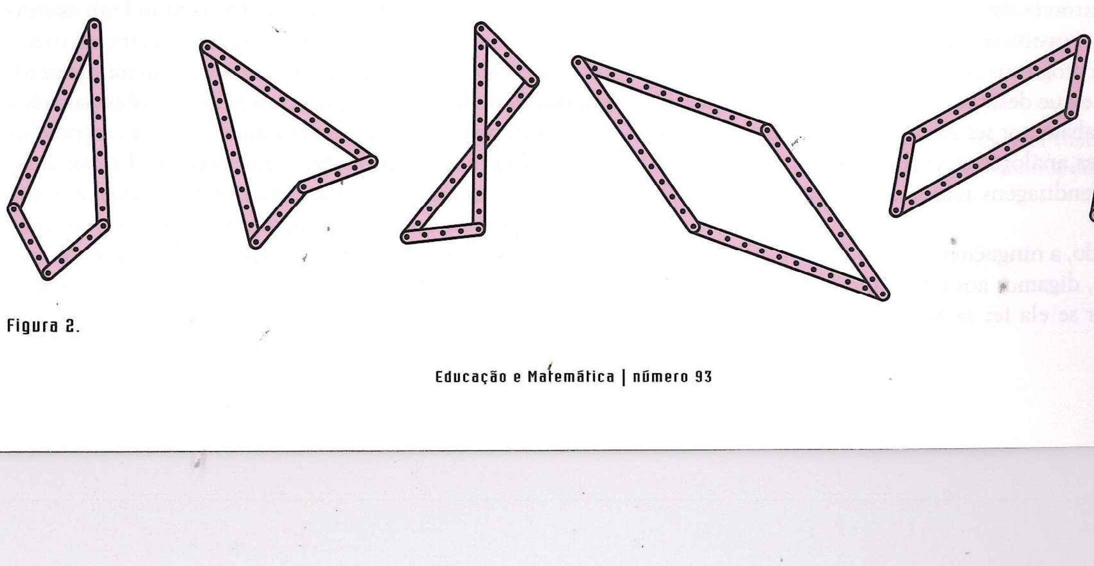

Figura 2.

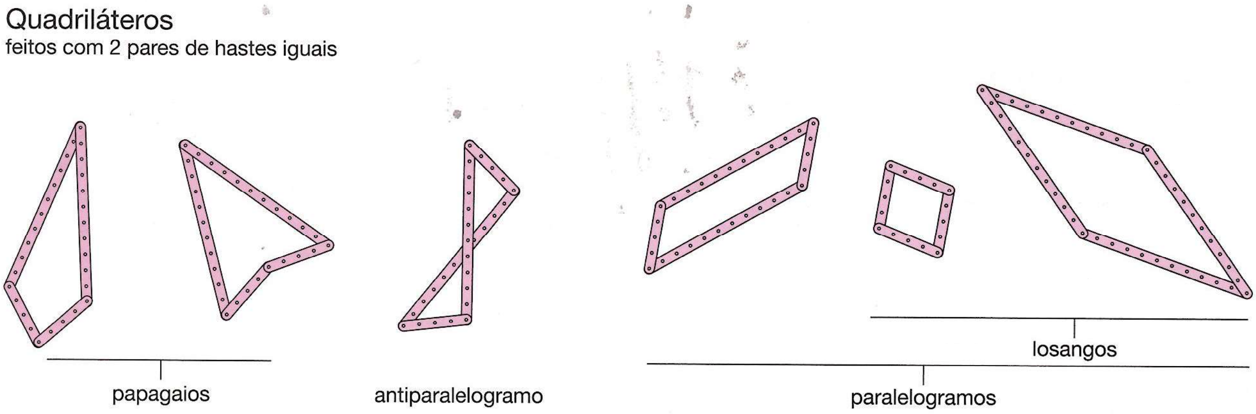

Figura 3.

— está aqui muito calor, vou abrir a *janela*...
essa mesma criança ouvirá pela primeira vez a palavra *paralelogramo* quando o seu professor, no começo de uma aula, disser:

— hoje vamos construir quadriláteros apenas com hastes de dois comprimentos e descobrir os *paralelogramos*.

Não sei que materiais existem hoje para construir paralelogramos. O Meccano da minha juventude, feito de hastes metálicas perfuradas, de diferentes comprimentos, era ideal para o efeito. Seja com que material for, nesse dia o professor formou numa grande mesa dois montes de hastes: num dos montes hastes maiores — chamemos-lhes hastes a, todas do mesmo comprimento 11 — e noutro monte hastes de menor comprimento — chamemos-lhes hastes b, todas de comprimento 4 (ver figura 1).

Depois disse que para fazer os quadriláteros tinham que utilizar ou quatro hastes de um dos montes ou duas de cada monte. E exemplificou, fazendo um quadrilátero em cada um dos casos, ligando as quatro hastes umas às outras em cadeia, sendo a extremidade da quarta ligada à origem da primeira.

E propôs aos alunos que construíssem, com aquelas hastes, e obedecendo sempre aquela regra, todos os quadriláteros diferentes que fossem capazes[1].

Passado algum tempo, os alunos tinham construído os quadriláteros da figura 2.

Segue-se a habitual discussão depois de uma exploração deste tipo: não há mais nenhum diferente? em que é que são diferentes? etc. etc. Novas palavras aparecem inevitavelmente: consecutivos, intersecção, etc. etc. Pode até surgir a palavra *paralelo*, por onde os alunos podem já ter passado em geometria ou que até já conhecem da vida "real": ruas *paralelas*...

A certa altura, o professor pergunta: quais destes quadriláteros vos parece que é natural chamar *paralelogramos?* e o seguimento desta pergunta depende das reacções dos alunos, do que já tinha sido dito, etc., etc.

Mais tarde, alguém pode perguntar como se chamam os outros, ou pode o professor sugerir que façam um cartaz para colocar na parede da sala, com os nomes por baixo de cada quadrilátero que possa ser feito com 2 pares de hastes iguais... Os *papagaios* (formas mais usadas para a construção de papagaios de papel e cana, porque voam bem...), os *paralelogramos*, e o *antiparalelogramo*. Muito provavelmente, estes alunos nunca mais ouvirão falar do antiparalelogramo, mas que importa? Finalmente, o professor indica dois — a que já tinha chamado paralelogramos — que também se chamam losangos, especiais porque têm os quatro lados iguais. Uma boa ocasião de ficarem dois nomes por baixo da mesma figura... (figura 3)

Anos intermédios [3º ciclo]

Numa aula do 9° ano (ou poderia ser do 8°, está claro), num projecto relacionado com as semelhanças, os alunos viram e usaram um pantógrafo mostrado pelo professor de Educação Visual. Depois utilizaram um *applet* na Internet (endereço `http://www.ies.co.jp/math/java/geo/panta/panta.html`) (figura 4).

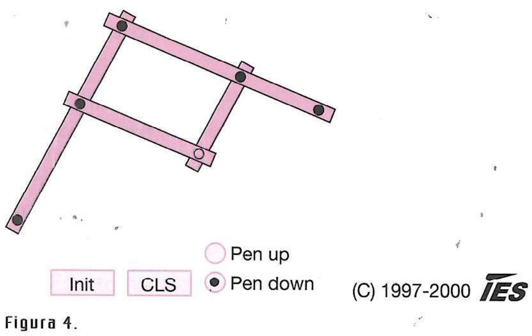

Figura 4.

Na continuação do projecto, um grupo de alunos resolveu fazer um modelo de pantógrafo no *Sketchpad*, e ao mostrar aos colegas o modo como o tinham feito, surgiu como ponto chave a construção de um paralelogramo. Foi aí que o professor resolveu aproveitar esse momento para esclarecer o conceito de paralelogramo, pelo que perguntou a toda a turma:

— Sabem dizer-me exactamente o que é um paralelogramo?

Seguiu-se uns momentos de silêncio e um aluno mais corajoso respondeu:

— É um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos e têm o mesmo comprimento.

Ao que o professor respondeu:

— Tudo isso é verdade num paralelogramo, mas será preciso dizer sempre tudo isso para dizer o que é um paralelogramo?

Então ouviu-se a voz da Susana:

— Parece-me que basta dizer uma das coisas... mas não tenho a certeza.

O professor propôs então a seguinte tarefa em duas partes:

1. Construir um quadrilátero no *Sketchpad* utilizando apenas a condição de ter os lados opostos paralelos; verificar experimentalmente no *Sketchpad* que os lados opostos ficam então iguais.
2. Construir um quadrilátero no *Sketchpad* utilizando apenas a condição de que os lados opostos tenham igual comprimento; verificar experimentalmente no *Sketchpad* que os lados opostos ficam então paralelos.

Na discussão que se seguiu às experiências dos alunos com o *Sketchpad*, ficou bem esclarecido que realmente qualquer das condições (paralelismo dos lados opostos ou igualdade dos lados opostos) implicava a outra pelo que existiam (pelo menos) duas definições de paralelogramo, cada uma impondo apenas uma das condições. O professor explicou que na matemática se procurava sempre ter definições simples, que chegassem para definir um determinado conceito sem ambiguidade, e não incluindo condições supérfluas.

Como a conclusão era experimental, Susana ficou encarregada, com o grupo dela, de encontrar duas demonstrações que provassem que cada condição implicava a outra, o que conseguiu baseando-se em factos que já conheciam relativos à igualdade de triângulos.

Ensino Secundário

Normalmente, o secundário deveria servir, em geometria, para aprofundar e sistematizar a experiência dos alunos nos ciclos anteriores. Infelizmente, o pequeno período dedicado à geometria sintética neste ciclo não permite fazê-lo. Por isso não me vou alongar neste ponto, dando apenas algumas indicações do que poderia ser feito noutras condições, para seguir ainda o caso concreto dos paralelogramos.

Freudenthal, o grande teórico da educação matemática no século XX, defendia justamente que toda a tradição de tentar ensinar a geometria à maneira dos *Elementos* de Euclides devia ser abandonada. E propôs que, em lugar de tentar levar os alunos a compreender a natureza da Matemática e a estrutura axiomática das suas teorias dessa forma, se utilizassem experiências de axiomatização local com o mesmo fim.

Os quadriláteros, e em particular o conjunto de propriedades dos paralelogramos, são campos ferteis para experiências desse tipo. Prometendo que numa futura nota abordaremos a questão importante das axiomáticas locais em geometria, limito-me a referir que na Adenda às Normas *Geometria a Partir de Múltiplas Perspectivas*, traduzida para português e publicada pela APM em 1993, existem no capítulo 10 diversos exemplos de experiências que podem ser feitas no campo das axiomáticas locais.

Uma delas consiste precisamente em tomar como postulados os casos de igualdade de triângulos e a igualdade dos ângulos alternos internos e partindo daí e da definição de paralelogramo, como *um quadrilátero com dois pares de lados opostos paralelos*, provar os seguintes teoremas:

- Uma diagonal divide um paralelogramo em dois triângulos congruentes.
- Os lados opostos de um paralelogramo são iguais.
- Os ângulos opostos de um paralelogramo são iguais.
- As diagonais de um paralelogramo bissectam-se.
- As diagonais de um losango são perpendiculares.

Para mais detalhes, ver a publicação indicada. São também muito interessantes os trabalhos de Michael de Villiers sobre quadriláteros e a sua organização, em particular a publicação *Some Adventures in Euclidean Geometry*, publicada em 1996 em Durban, pela University of Durba-Westville. Ver também o excelente artigo de Michael Keyton, *Alunos descobrem a geometria usando software de geometria dinâmica*, no livro *Geometria Dinâmica* (tradução feita pela APM do livro *Geometry Turned On*, org. por james King e Doris Schattschneider).

Julgo que neste último artigo se pode compreender bem como alunos que tivessem passado por uma experiências em geometria do tipo das que indicámos para os primeiros anos e para o terceiro ciclo, poderiam apreciar e entusiasmar-se no secundário com as actividades que aí são propostas de invenção e utilização de definições para novos objectos da geometria.

Nota

1. Esta proposta é apenas indicativa. Um colega professor do 1° ciclo encontrará certamente com facilidade uma formulação mais apropriada para este nível etário, de que não tenho qualquer experiência.

Eduardo Veloso

Grupo de Trabalho de Geometria da APM