PROBLEMA DO TRIMESTRE

Problema do Trimestre

Um jogador está a adivinhar números pensados por um outro jogador, mas só pode fazer perguntas a que este último responde **sim** ou **não**.

Qual é o maior número possível que o primeiro jogador pode adivinhar, com uma sequência de 20 perguntas?

Sobre o problema anterior

O problema do trimestre anterior não suscitou muito entusiasmo, ou porque as férias convidavam ao descanso, ou porque, como diz o colega Luís Carmelo, de Tondela, «...mesmo gastando mil contos as hipóteses de ganhar são ainda de uma em 215».

E é precisamente deste colega a resposta que destacamos, pela sua simplicidade.

«Consideremos uma sequência qualquer de sete números distintos (é perfeitamente indiferente que esse números sejam escolhidos no conjunto dos primeiros 7 números naturais, ou no conjunto dos primeiros 47 números naturais, ou dos primeiros **k** números naturais):

$$N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7$$

em que N_7 designa o número suplementar.

Ordenando os seis primeiros números e fazendo-os seguir do número suplementar (N_7), a probabilidade de os sete números estarem, agora, ordenados é exactamente igual à probabilidade de que o número suplementar (N_7) seja maior do que os outros seis que é igual, ainda, à probabilidade de que, na sequência inicial, o número suplementar (N_7) seja o maior.

Ora, na sequência inicial, o número maior pode ser, com igual probabilidade, ou N_1, ou N_2, ou N_3, ou N_4, ou N_5, ou N_6, ou N_7.

Logo, a probabilidade de que o maior seja N_7 (o suplementar) é $\frac{1}{7}$ ».

Assim, é 1/7, a probabilidade da chave do totoloto ficar totalmente ordenada.

Se tiverem dúvidas acerca da solução apresentada acima, leiam a resposta do Sérgio Valente. Talvez as fórmulas os convençam.

«Analisando o enunciado do problema, torna-se claro que:

Se o número suplementar for maior que os outros seis, a sequência de sete números ficará ordenada(1).

Portanto, o problema pode ser traduzido do seguinte modo:

Temos 47 bolas numa caixa, numeradas de 1 a 47; tiram-se aleatoriamente 7; qual é a probabilidade da última bola tirada ter um número maior que as outras seis?

Representemos por $(X_1, X_2, \ldots, X_6, X_7)$ o resultado de uma tiragem sucessiva de 7 bolas. Quer-se saber a probabilidade de X_7 ser maior que X_i, para i de 1 a 6.

Como todas as sequências têm igual probabilidade de sair, tem-se que a probabilidade pedida é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos igualmente possíveis.

O número de casos possíveis é fácil de determinar. Trata-se do número de sequências ordenadas com 7 elementos, sem repetição, que se podem considerar, sabendo-se que esses elementos podem ser quaisquer números de 1 a 47. Trata-se, portanto, de arranjos sem repetição, 47, 7 a 7.

Tem-se então que o número de casos possíveis é: ${}^{47}A_7$

O número de casos favoráveis é um pouco mais difícil de calcular. Raciocinemos do seguinte modo:

Se o último número da sequência (X_7) for 47, os outros poderão ser qualquer número de 1 a 46.

Se X_7 for 46, os outros poderão ser qualquer número de 1 a 45.

E assim sucessivamente, até $X_7 = 7$, caso em que os outros poderão ir de 1 a 6.

Tem-se então que o número de casos favoráveis é:

$${}^{46}A_6 + {}^{45}A_6 + \ldots + {}^{6}A_6$$

Portanto, a probabilidade pedida é:

$$\frac{{}^{46}A_6 + {}^{45}A_6 + \ldots + {}^{6}A_6}{{}^{47}A_7} =$$

$$= \frac{6!\ ({}^{46}C_6 + {}^{45}C_6 + \ldots + {}^{6}C_6)}{7!\ {}^{47}C_7} =$$

(Continuação na pág. 36)

O problema... (continuação)

$$= \frac{6!\ {}^{47}C_7}{7!\ {}^{47}C_7} \overset{(2)}{=}$$

$$= \frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$$

O problema está resolvido.

Importa agora reflectir sobre a resolução do problema, para tentar perceber o porquê do resultado obtido.

Um primeiro aspecto que importa salientar é que o número de bolas na caixa (47) não é relevante. Se, em vez de 47, tivéssemos trabalhado com uma variável genérica (n), teríamos obtido o mesmo resultado.

Outro aspecto que tem interesse discutir é não ser relevante o facto de se ter escolhido a última bola como sendo aquela que se vai comparar com as seis primeiras. Quer dizer: o problema que nos foi posto é, ao fim e ao cabo, equivalente a este:

Dados 7 números quaisquer, todos diferentes, qual é a probabilidade de um deles ser maior que os restantes?

Como não há números privilegiados, torna-se claro que a probabilidade é 1/7».

Notas:

(1) Conclusão idêntica a do Luís Carmelo *(N. da R.)*.

(2) Tem-se a seguinte propriedade: $\sum_{k=p}^{n} {}^{k}C_p = {}^{n+1}C_{p+1}$

Esta propriedade, que se pode demonstrar por indução, tem a seguinte ilustração no Triângulo de Pascal: a soma dos elementos de uma coluna, até uma linha qualquer, é igual ao elemento que fica na linha abaixo e na coluna à direita.

As voltas... (continuação)

Caso de figuras «pavimentáveis» com um só tipo de figura

São casos semelhantes aos atrás referidos. Alguns exemplos para este primeiro caso seriam o cálculo do número de triângulos equiláteros existentes num triângulo equilátero (haveria a tentação de fazer a transposição pura e simples para o caso de teatraedros num tetraedro mas aí o problema complica-se, visto o tetraedro não ser «pavimentável» com tetraedros, embora haja abordagens possíveis deste caso), de prismas triangulares regulares em prismas triangulares regulares, etc.

Caso de figuras «pavimentáveis» com dois tipos de figuras

Numa segunda fase poder-se-ia pensar em casos como, por exemplo, o hexágono regular e prisma hexagonal regular que não são «pavimentáveis» com hexágonos regulares e prismas hexagonais regulares respectivamente (por exemplo, no caso do hexágono a «pavimentação» é feita com losangos e hexágonos regulares).

Caso de figuras «curvas»

É um problema já mais complexo. É o caso, por exemplo, de círculos em círculos, esferas em esferas, cilindros em cilindros, esferas em cilindros, etc. Em todos estes casos haveria que definir as regras do jogo, isto é, impor as restrições necessárias de modo a tornar possível a resolução do problema.

Ainda o cão (conclusão)

sar de não ser nenhum Ben Johnson, presumo conseguir pelo menos metade (18 km/h) e então o cão terá de fazer 18 × 5,86 = 105 km/h. Impossível: o mamífero mais veloz é a chita que faz 101 km/h (in *Guiness-Book of Records*). Logo, não há cão que me detenha...

2. Se eu fosse mesmo prisioneiro e estivesse mesmo num pátio quadrado, guardado por um cão verdadeiro, ainda havia um outro método muito mais simples e de quase total eficácia. Dava pequenas e vagarosas voltas em torno do ponto H. O cão, dada a sua característica (A'), corria a toda a velocidade à volta do pátio. Obrigava-o assim a dar 6 ou 7 voltas, de 800 metros cada uma. Nessa altura, o cão estaria esfalfado e eu fresco que nem uma alface. Depois, era só uma corridinha de 100 metros: o cão, esgotado, já não tinha forças para me apanhar.

Variante

E se o pátio for circular? Quantas vezes mais depressa tem de correr o cão para que o homem não fuja?

Prolongamento

Ainda no caso do pátio quadrado, qual é realmente a melhor estratégia do cão para evitar a fuga do homem?