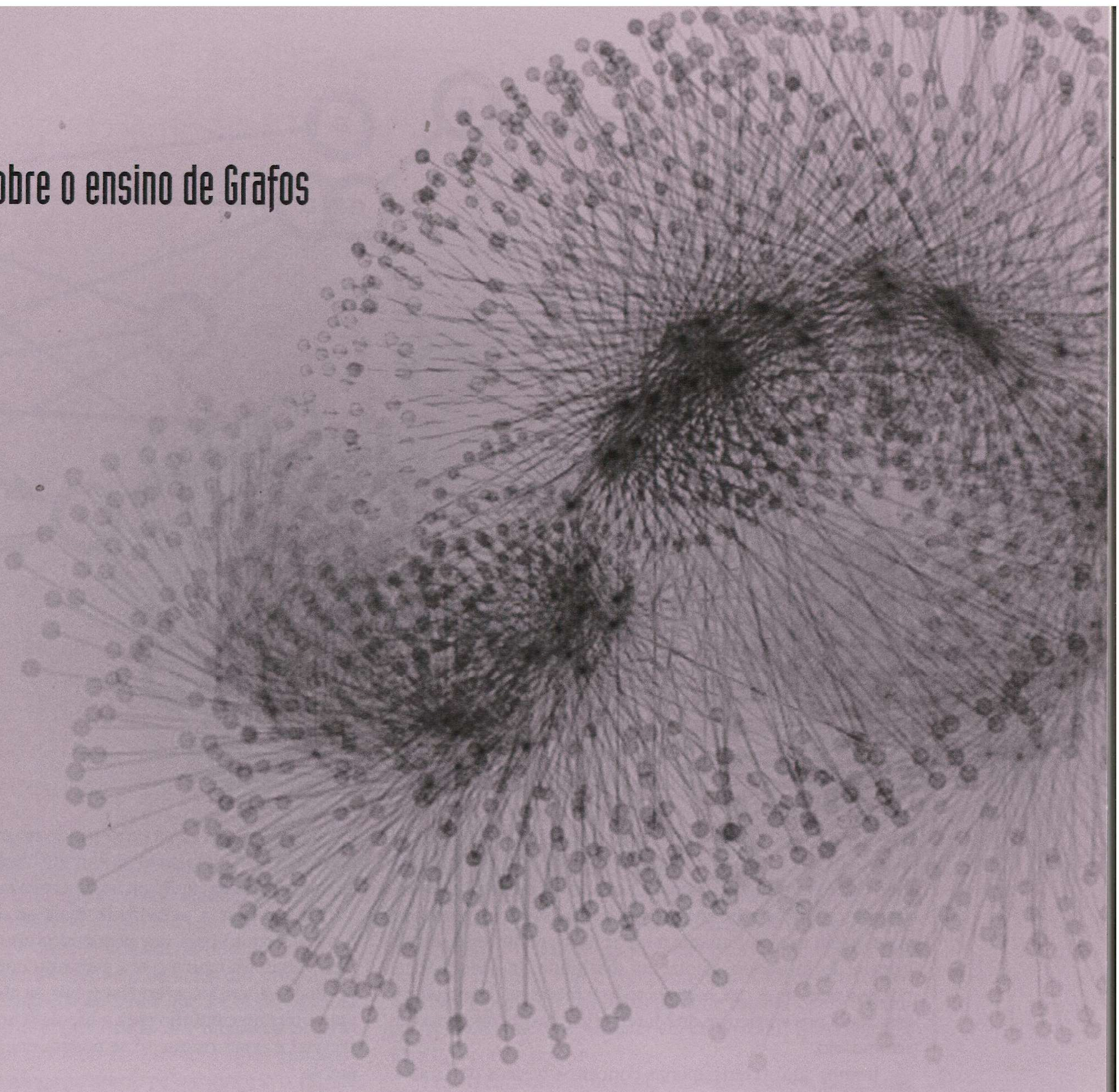
Reflexões sobre o ensino de Grafos

Marília Pires
Viktor Kravchenko



Introdução

A diferenciação dos currículos de matemática nos diferentes cursos do ensino secundário é um imperativo quando se procura adequar a matemática a ensinar às necessidades da formação face ao percurso que se antevê para estes alunos. A disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais insere-se claramente nesta estratégia.

Entre os vários temas a abordar, o capítulo de modelos de grafos ajusta-se com particular evidência ao carácter generalista da disciplina. A Teoria de Grafos, ainda que seja uma área de estudo de grande complexidade, apresenta vantagens que fundamentam a sua inclusão no currículo desta nova disciplina. Referimos, por exemplo, a possibilidade de ser trabalhada a diversos níveis de profundidade. Quando a abordagem é de nível introdutório, como é preconizado no programa, torna-se acessível à maioria dos alunos dado que não requer conhecimentos específicos de outros temas de matemática, o que permite a muitos alunos entrar activa e efectivamente no processo de descoberta de conceitos abstractos da Teoria de Grafos a partir de exemplos simples e, às vezes, divertidos. Não menos importante é o facto de constituir uma ferramenta importante na resolução de um vasto conjunto de situações problemáticas da vida real.

Como é salientado no programa "está fora de questão uma introdução teórica sistematizada da teoria de Grafos". Esta perspectiva, para além de possível e interessante, assente na construção de representações e esquemas, favorece o desenvolvimento de novos modelos. Este processo de construção apela permanentemente à criatividade de alunos e professores.

Neste artigo serão apresentados alguns exemplos que nos parecem oportunos como ponto de partida para a construção de alguns modelos de grafos.

A partir de uma simples representação gráfica podemos chegar facilmente a muitos dos conceitos e definições elementares. Desta forma, os alunos poderão efectivamente ensaiar a construção destes novos conceitos e ser capazes de os sentir. Como pretendemos mostrar ao longo do texto,

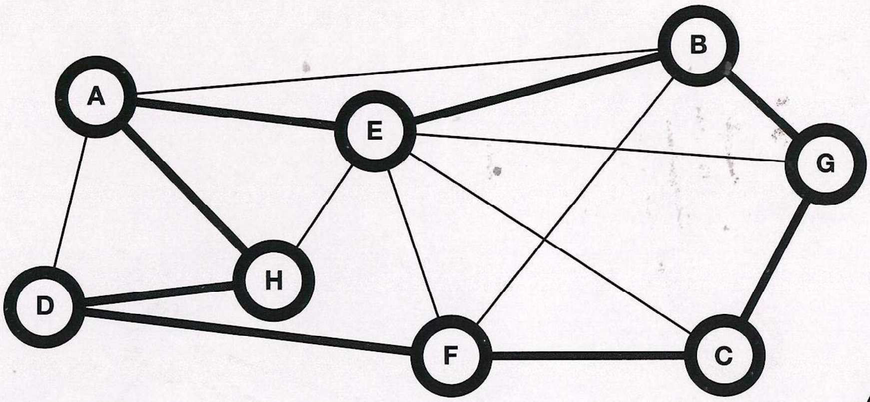


Figura 1. Entregar pizzas

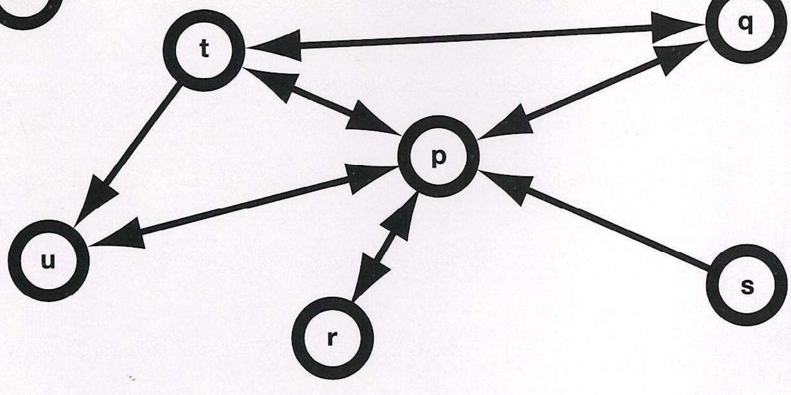


Figura 2. Quem gosta de quem?

a passagem de conceitos espontâneos para os conceitos formais pode ser realizada de uma forma bastante natural. Esta facilidade em integrar os novos conceitos contribui para aumentar o gosto e o interesse dos alunos por raciocínios abstractos. Em nossa opinião a falta de gosto e interesse está na origem do insucesso escolar na disciplina de Matemática, por isso pensamos que haveria todo o interesse de introduzir este tema nos curriculos de Matemática dos outros cursos do secundário.

Iremos aqui referir apenas conceitos básicos de Grafos, deixando em aberto a possibilidade de retomar este assunto com a exploração de algoritmos para a resolução de alguns problemas de optimização em Grafos.

Conceitos iniciais

Um campo para construção de exemplos, que pode ser interessante para a generalidade dos alunos desta faixa etária, é o das relações humanas onde os Grafos podem representar muitas relações interpessoais, tais como: descendência; ascendência; afectos; organização empresarial; acessibilidades, circulação e tantos outros.

Para introduzir o conceito de *grafo* e chegar à representação "por um sistema de pontos e linhas unindo esses pontos" (do programa) nada melhor do que partir de uma situação que automaticamente leve a uma tal representação.

Exemplo 1. Propor que os alunos desenhem um esquema do bairro onde fica a sua escola, representando os cruzamentos e rotundas por pontos e as ruas e avenidas por linhas unindo esses pontos. Alguns vão a pé para a escola e, por isso, podem considerar um *grafo não orientado*, outros irão de carro e, tendo que considerar o sentido de circulação das ruas, o seu grafo tem que ser *orientado*.

Exemplo 2. No grafo construído no exemplo 1 cada aluno marca qual o percurso que faz até chegar à escola. Aparece, naturalmente, a definição de *caminho*.

Para tornar a actividade mais atractiva pode-se usar o mesmo grafo para um pequeno grupo de alunos em que cada um deles marca o seu caminho com uma cor diferente. Pode-se, então, averiguar quais os alunos que se podem encontrar no caminho para a escola (caminhos partilhando arestas) e quais os que só se podem encontrar à entrada da escola.

Exemplo 3. Desenhar um grafo em que os *vértices* representam os alunos e as *arestas* ligam os alunos que têm possibilidade de se encontrar a caminho da escola. O exemplo 3 pode ainda ser usado para a introdução do conceito de *grau dos vértices*, a partir do número de encontros que cada aluno pode ter a caminho da escola, pois por cada encontro haverá uma *aresta incidente* no vértice correspondente a esse aluno.

Exemplo 4. Na figura 1 representa-se o percurso de um entregador de pizzas que sai do restaurante localizado no vértice marcado com A, entrega 7 pizzas nos vértices marcados com E, B, G, C, F, D e H e regressa ao restaurante. Ele poderia ter feito outro percurso, entregando as pizzas noutra ordem, mas fosse qual fosse o percurso teria sempre que voltar ao vértice de saída, percorrendo um caminho fechado, isto é que começa e acaba no mesmo vértice.

O exemplo 4 permite introduzir o conceito de *circuito* e também deixar a ideia de que, geralmente, há várias hipóteses de formar um circuito e que se escolhe o que for mais conveniente de acordo com os objectivos.

Exemplo 5. *Quem gosta de quem?* pode ser uma pergunta que se faz a cada uma das pessoas de um grupo. As respostas vão ser representadas num grafo orientado.

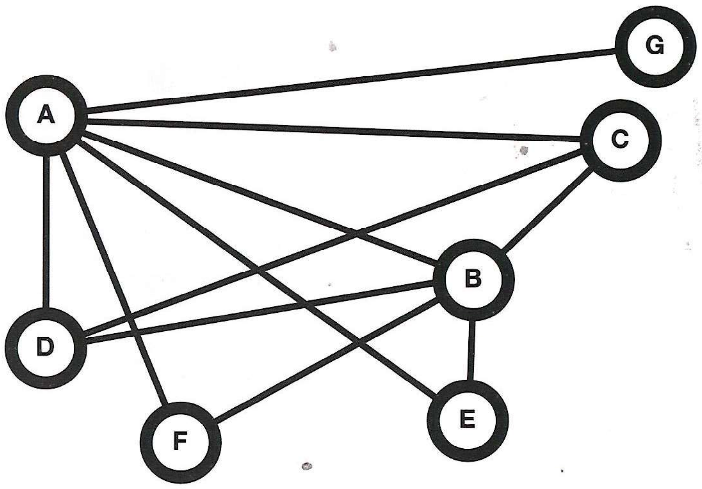
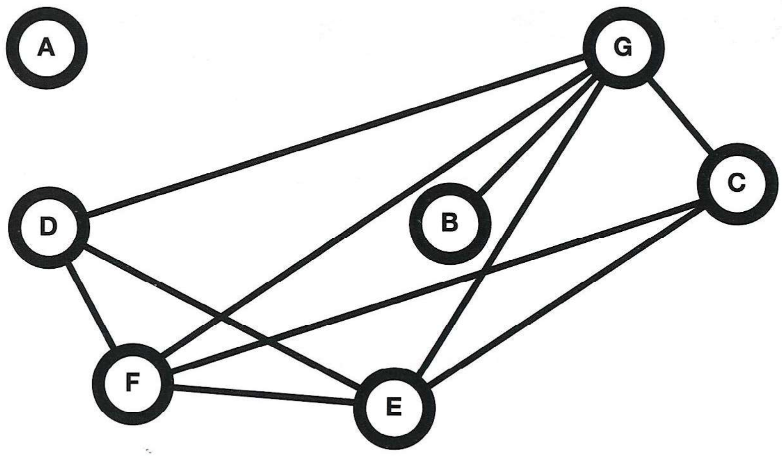


Figura 3. Grafo dos jogos

Figura 4. Jogos que faltam



Este exemplo não deve, obviamente, ser construído a partir de respostas dos alunos É mais simpático se for fornecido um grafo como o da figura 2 como sendo o resultado de um inquérito que se fez num grupo de 6 pessoas.

A partir da análise deste grafo pode-se introduzir os conceitos de *semigrau interior* (número de arcos que chegam ao vértice) e *exterior* (número de arcos que saem do vértice) e relacioná-los com a popularidade dos membros do grupo. Um vértice com um semi-grau interior nulo representa alguém de quem ninguém gosta, pelo contrário o vértice com maior semi-grau interior representa o membro do grupo mais popular de quem toda a gente gosta. No exemplo apresentado, o vértice p, com semi-grau interior 5, corresponde à pessoa mais popular, enquanto que o vértice s, com semi-grau interior nulo e semi-grau exterior 1, corresponde à pessoa mais impopular.

Se os afectos forem todos recíprocos, isto é se a cada arco corresponder outro de sentido contrário, pode-se representar o resultado do nosso inquérito por um grafo não orientado. No exemplo apresentado esta situação não acontece, pois há arcos que não têm o seu correspondente em sentido contrário. Por exemplo, existe um arco de s para p mas não de p para s.

Ainda sobre esta ideia, pode-se pedir aos alunos que desenhem um grafo em que os vértices representem as personagens da série Morangos com Açúcar. Quase todos os adolescentes conhecem o enredo desta série e são capazes de construir o grafo dos afectos da série.

Embora o conceito de grafo completo não seja referido no programa, pensamos que pode ser abordado até porque se presta a ser tratado através de exemplos que os alunos conhecem bem, como é o caso da organização de campeonatos. Pode-se começar com exemplos de futebol, normalmente bem conhecidos pelos alunos.

Exemplo 6. O grupo de qualificação para o mundial 2006 a que pertencia Portugal tinha 7 equipas, quantos jogos se realizaram? O grupo de qualificação para o euro 2008 a que pertence Portugal tem 8 equipas, quantos jogos se irão realizar? E na primeira liga portuguesa de futebol com 18 equipas, quantos jogos se realizam em cada volta? E se tivermos uma liga com n equipas?

Provavelmente, muitos saberão responder às perguntas, mas é importante que reflictam sobre o processo pelo qual chegaram a esse número. A ideia de que cada uma das n equipas tem que jogar com as outras $n - 1$ leva ao conceito de grafo completo em geral. A dedução da expressão $n(n - 1)/2$ para o número de arestas de um grafo completo com n vértices é muito intuitiva. Pode-se ainda fazer notar que todos os vértices têm o mesmo grau, $n - 1$.

Exemplo 7. Numa Escola Secundária organiza-se um campeonato de Futsal entre as 7 turmas do 11° ano. Cada turma deve jogar uma única vez com cada uma das outras. A certa altura sabe-se que: a turma A já fez 6 jogos; a B fez 5 jogos; a C e a D fizerem 3 jogos cada uma; a E e a F fizeram 2 jogos cada uma e a G ainda só fez 1 jogo. Será possível saber que jogos fez a turma C? E quantos jogos faltam ainda fazer ao todo?

Vamos desenhar um grafo em que cada vértice representa uma das 7 turmas. Vamos identificar os vértices com o nome da turma correspondente, temos assim os vértices A, B, C, D, E, F e G. A relação *jogar com* é simétrica, pois, se A joga com B, então B joga com A, por isso pode-se representar os jogos por arestas e obtém-se um grafo simples não orientado. Deste grafo conhecemos os graus dos vértices,

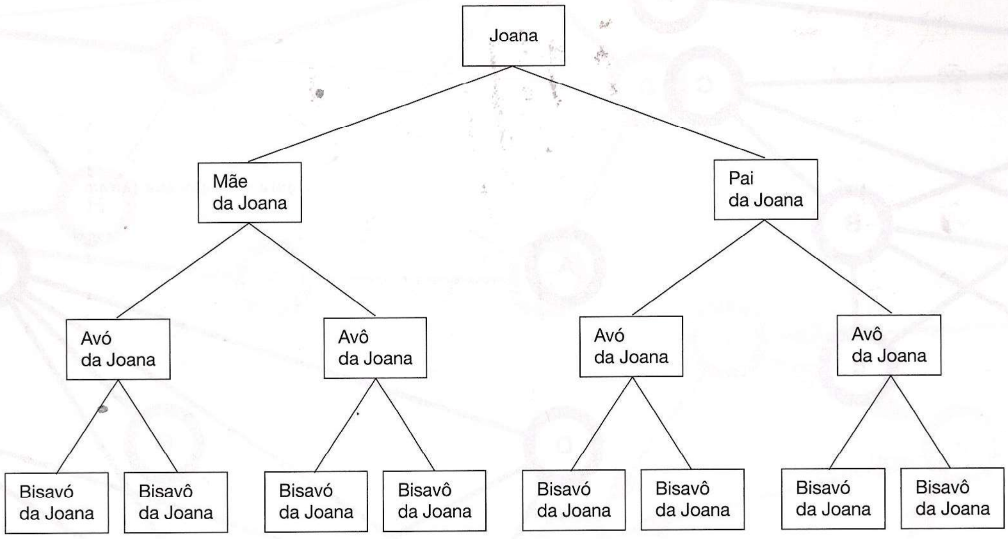


Figura 5. Os antepassados da Joana

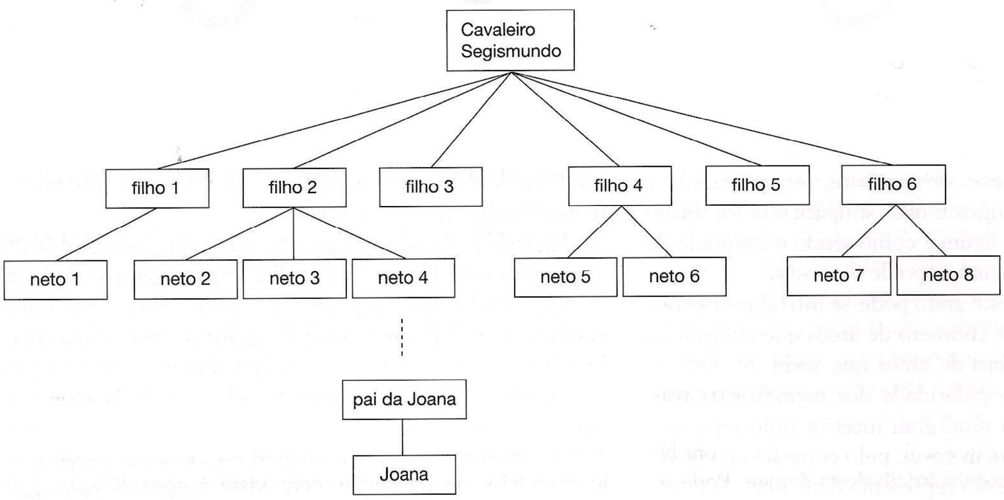


Figura 6. Os descendentes do Cavaleiro Segismundo

correspondentes ao número de jogos que cada turma efectuou: $\mathrm{gr}(A) = 6$; $\mathrm{gr}(B) = 5$; $\mathrm{gr}(C) = \mathrm{gr}(D) = 3$; $\mathrm{gr}(E) = \mathrm{gr}(F) = 2$ e $\mathrm{gr}(G) = 1$. A soma dos graus dos vértices é $6 + 5 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 = 22 = 2 \times 11$. Deste modo sabemos que já se realizaram 11 jogos. Se se tivessem realizado todos os jogos todos os vértices teriam grau 6 (grafo completo) e o número de arestas seria $((7 \times 6)/2) = 21$. Sabemos assim que ainda faltam jogar 10 jogos.

Como a turma A fez 6 jogos, isso significa que ela já jogou com todas as outras, isto é, existem as arestas $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{A, E\}$, $\{A, F\}$ e $\{A, G\}$. Já sabemos que um dos 3 jogos da turma C foi com a A. Também sabemos que o único jogo da turma G foi com a A. Como a turma B fez 5 jogos e não jogou com a G, ou seja, existem as arestas $\{B, C\}$, $\{B, D\}$, $\{B, E\}$ e $\{B, F\}$. Ficamos assim a saber que a turma C também jogou com a B. As turmas E e F só fizeram 2 jogos cada e já sabemos com quem: A e B. Como as turmas C e D fizeram 3 jogos cada uma, como já sabemos todos os jogos das outras turmas, temos que concluir que jogaram entre si. Isto é a aresta $\{C, D\}$ está no grafo.

Obtivemos assim os 3 jogos da turma C: com a A; com a B e com a D.

Na figura 3 apresenta-se o grafo correspondente aos 11 jogos já efectuados.

Se desenharmos agora um grafo com as arestas que faltam a este para ser completo (*grafo complementar*) ficamos a saber quais os 10 jogos que faltam.

Um outro conceito que deve ser introduzido a partir de exemplos é o de *grafo conexo*. Facilmente se percebe o conceito: de cada vértice tem que ser possível chegar a todos os outros. Muito rapidamente se podem desenhar grafos orientados ou não orientados que sejam ou não conexos. A este nível não nos parece ser necessário introduzir o conceito de conexidade forte e, por isso, sugerimos que nos grafos orien-

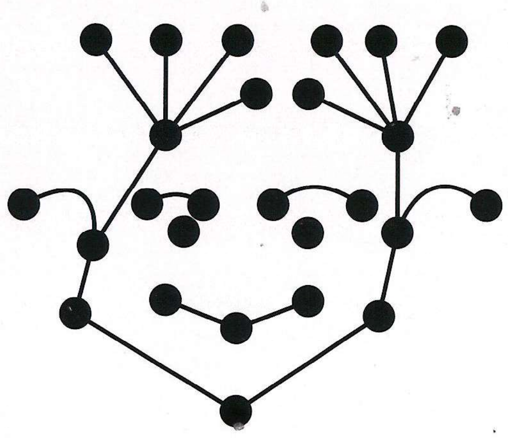


Figura 7. Uma Floresta

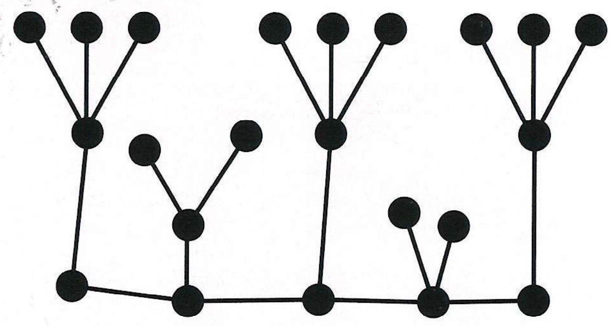


Figura 8. Árvore ou floresta

tados se chame conexo aquilo que em rigor se deveria chamar fortemente conexo: de cada vértice existe um caminho para cada um dos outros.

Árvores

Uma boa maneira de introduzir o conceito de *árvore* é através das relações de descendência e ascendência. Alguns alunos saberão o nome dos avôs e avós e alguns talvez saibam o nome de alguns dos bisavôs. Cada um pode construir a árvore dos seus antepassados até onde saiba os nomes.

Exemplo 8. A Joana pesquisou na Torre do Tombo os seus antepassados até ao século XVII. Para organizar a informação, a Joana construiu um esquema em que se coloca a si num vértice depois liga esse vértice a outros dois vértices que representam o seu pai e a sua mãe, depois cada um destes com o seu pai e mãe e por aí fora até aos antepassados que viveram no século XVII, entre estes encontra-se o cavaleiro Segismundo.

O que é este esquema que a Joana fez? Uma *árvore binária*. Na figura 5 desenha-se o início desta árvore. Pode-se aproveitar para deduzir quantos nós há em cada nível. Não é difícil levar os alunos a perceber que o número de nós de um nível é o dobro do número de nós do nível anterior.

Exemplo 9. Podemos construir outra árvore com a descendência do cavaleiro Segismundo (figura 6). Esta já não é uma árvore binária, pois o grau de cada nó dependerá do número de filhos que cada descendente do cavaleiro tiver.

O conceito de *floresta* está intimamente ligado ao conceito de árvore. Ao definir uma floresta como um conjunto de árvores os alunos perceberão imediatamente o conceito.

Exemplo 10. Na figura 7 desenhamos um grafo, com aspecto divertido, que é uma floresta: Grafo não conexo em que cada componente conexa é uma árvore.

Exemplo 11. Na figura 8 pergunta-se: é uma árvore ou uma floresta? Alguns, mais distraídos, vão responder floresta, uma vez que não reparam que na realidade o grafo é conexo, isto é, há uma única árvore.

Conclusão

Propomos, neste artigo, alguns exemplos que podem ser usados na construção dos conceitos iniciais da teoria de Grafos.

É claro que há um grande espaço de manobra para a criação de bons exemplos que podem surgir na aula de matemática tanto pela mão do professor como pela contribuição dos alunos. O fundamental é que os bons exemplos devem ser construídos de modo a que não sejam uma aplicação imediata dos conceitos mas que requeiram um trabalho intelectual que proporcione aos alunos o prazer da descoberta. Ao constituírem o contexto para a construção de conceitos, os exemplos não são meras ilustrações mas antes o ponto de partida para a discussão e para a introdução dos aspectos teóricos que se pretendem abordar.

Deste modo as aprendizagens decorrem de um processo de discussão, interpretação e compreensão de situações concretas. A definição e a formalização constituem o derradeiro passo deste percurso. Este é um caminho que procura dar maior significado aos modelos de Grafos.

O papel dos bons exemplos não se esgota na fase de introdução e apresentação dos conceitos, estes devem também constituir um ponto de partida para a construção de exercícios de aplicação, com vista à consolidação das aprendizagens.

Bibliografia

http://www.dgidc.min-edu.pt/mat-no-sec/pdf/mac_homologacao.pdf

Paulo Netto, Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos, Editora Blücher, 2003

L. R. Foulds, Graph Theory Applications, Springer, 1992

R. Diestel, Graph Theory, Springer, 2000

O. I. Melnikov, Problemas Divertidos de Teoria de Grafos, Minsk, 2001 (em russo)

Marília Pires
Viktor Kravchenko
Departamento de Matemática
FCT — Universidade do Algarve