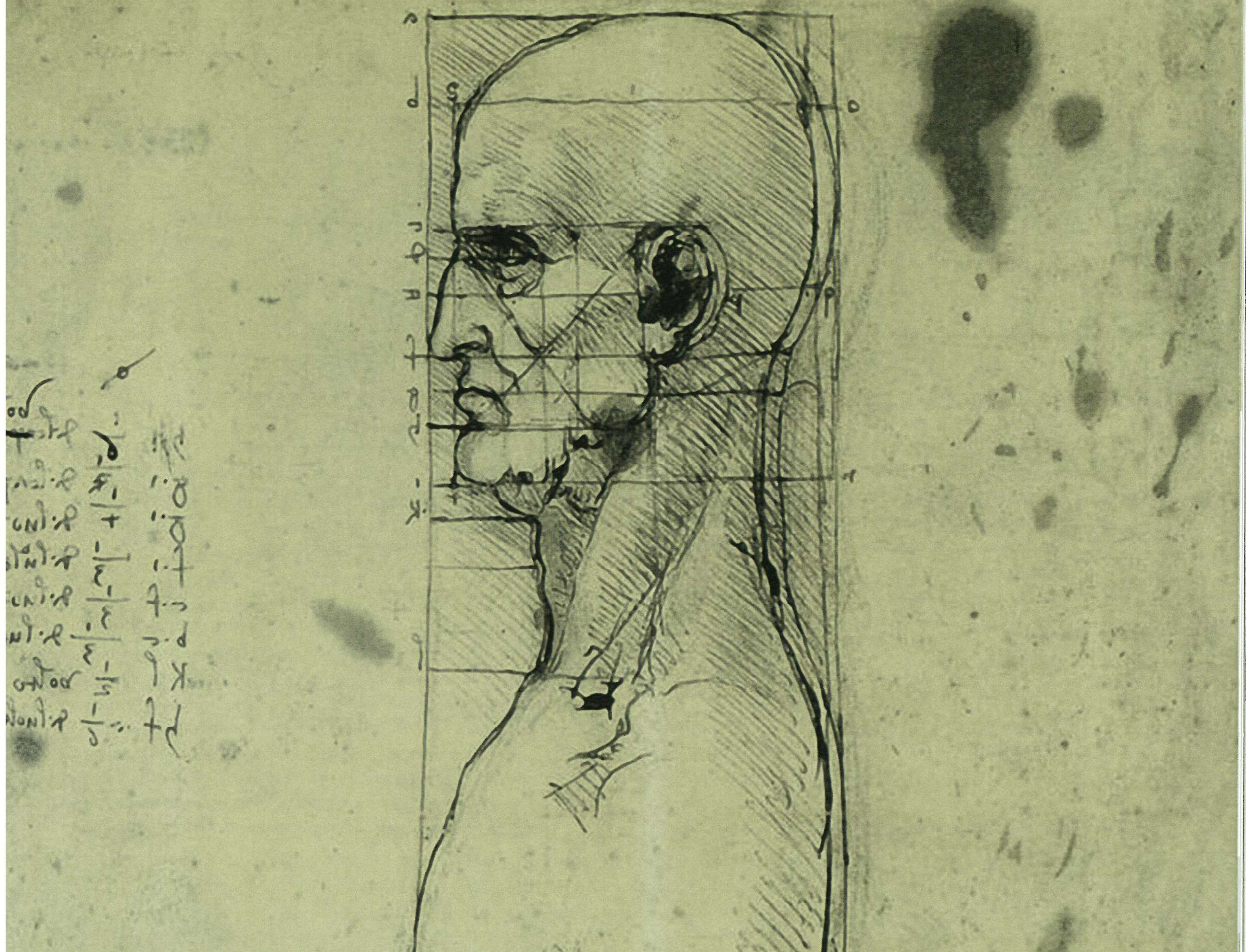


A medida da Arte

José Manuel dos Santos Dos Santos

Pretende-se com este texto contribuir para a divulgação das proporções associadas a algumas obras e trabalhos desenvolvidos no campo artístico. A proporção áurea é já sobejamente conhecida, porém uma outra proporção é por ventura menos conhecida, a proporção radiante que está associado a um número que em conjunto com o número de ouro integram o conjunto dos números mórficos. Facto ainda talvez menos divulgado é que este conjunto tem apenas dois elementos: o número de ouro e o número de prata. Aqui tentaremos caracterizar os números mórficos, apresentar algumas das suas propriedades e ilustrar alguma evidência da sua utilização no campo artístico.

Uma das escalas de comparação das grandezas dos números são as sequências em que a diferença entre dois termos consecutivos é constante.

$$p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_{n-1}, p_n, \ldots; p_n - p_{n-1} = r$$

As progressões aritméticas de números inteiros podem servir-nos para ordenar números naturais. As mais comuns estão relacionadas com a propriedade hereditária dos naturais (progressão aritmética de razão um cujo primeiro elemento é a unidade; a progressão dos múltiplos de um número, entre outras).

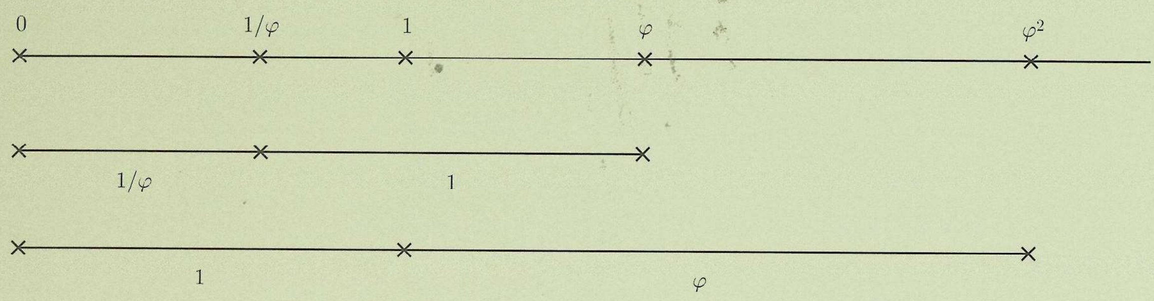


Figura 1.

Outras progressões, não aritméticas, tiveram muita influencia na arte ocidental, é o caso da sucessão de Fibonacci (progressão definida por recorrência à custa de dois termos anteriores sendo os dois primeiros termos iguais a um). A força desta progressão está relacionada com outra forma de comparação.

Ao comparar medidas geométricas bidimensionais e tridimensionais somos levados a utilizar uma progressão geométrica:

$$\ldots, p^{-2}, p^{-1}, 1, p, p2, \ldots \; (p > 1)$$

que é uma escala bastante intuitiva. Neste tipo de escala o quociente:

$$(p^{k+1} - pk)/(p^{k+1} + p^k)$$

é constante, não depende do valor de k. (Figura 1)

Considerando p o número de ouro, a sequência geométrica assume outras duas propriedades interessantes:

a) a soma entre dois elementos consecutivos é igual ao próximo elemento da sequência

$$(p^{k+1} + pk = p^{K+2}, k \in \mathbb{Z})$$

daqui resulta que $1 + p = p^2$;

b) a diferença entre dois elementos consecutivos é igual ao elemento anterior

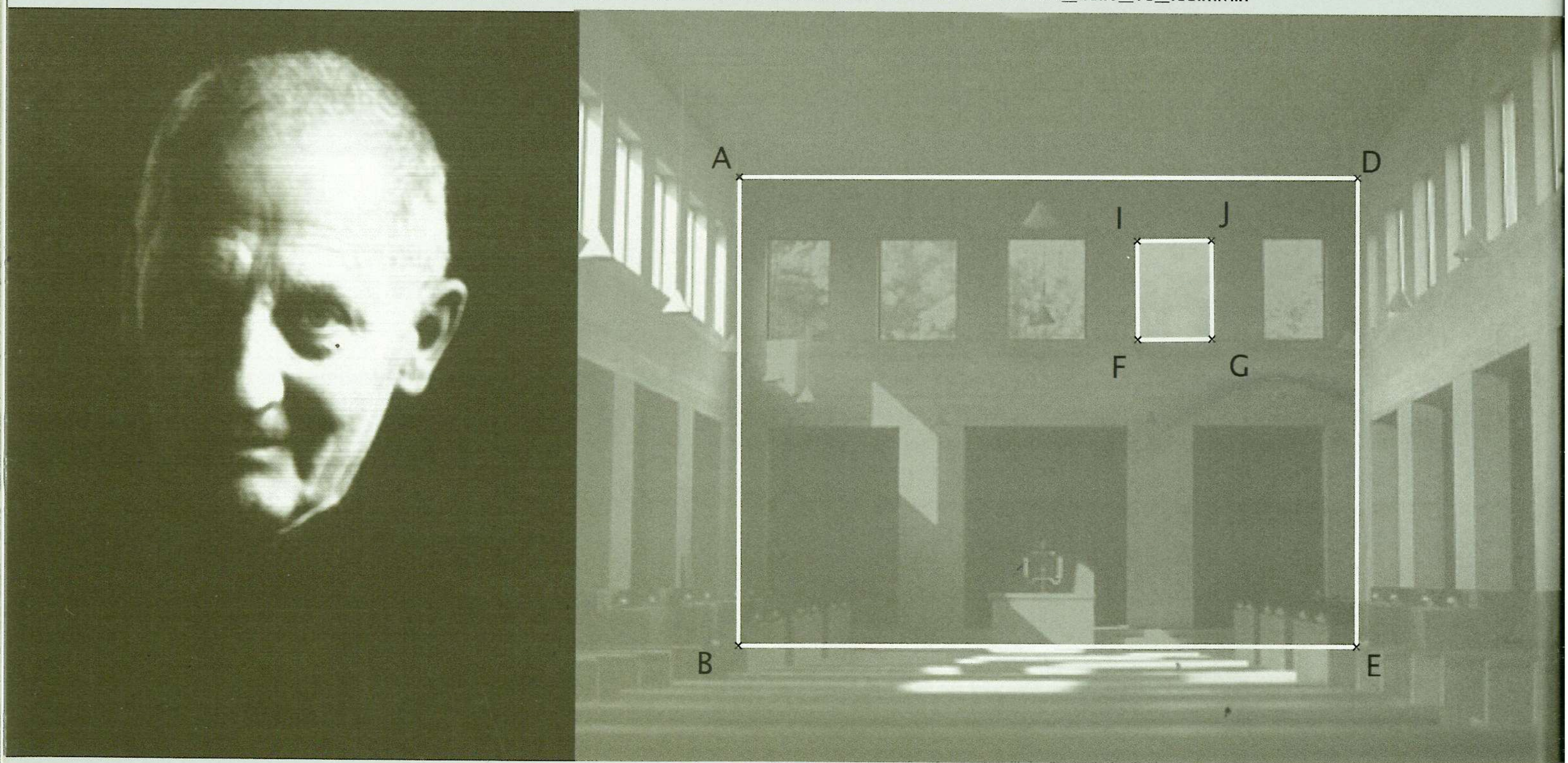
$$(p^{k+1} - p^k = p^{K-1}, k \in \mathbb{Z})$$

daqui resulta que $p - 1 = p^{-1}$;

As propriedades do número de ouro podem sugerir o seguinte problema:

Para que números reais $p > 1$ existem números naturais k e l de modo que: $p - 1 = p^{-l}$ e, $p + 1 = p^k$ (1).

Figura 3. Laan, DOM Hans van der [1904-1991]. In http://www.classic.archined.nl/news/0111/dom_hans_vd_laan.html



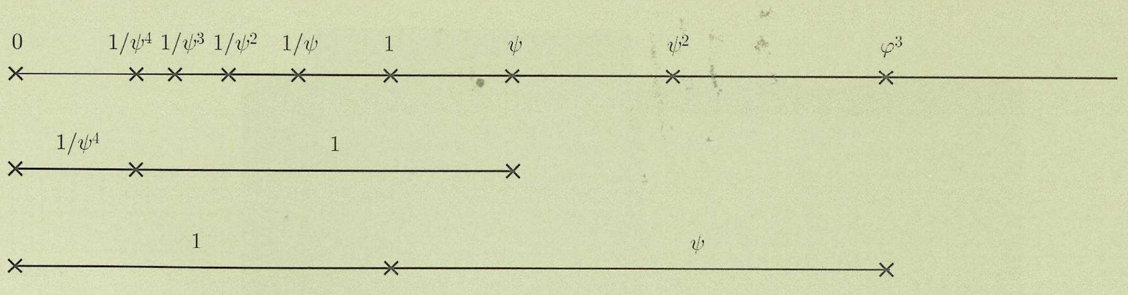


Figura 2.

Pelo que atrás referimos o número de ouro é uma solução do problema, mas haverá outras?

O esquema da figura 2 faz antever que poderá existir um número x tal que:

$$x - 1 = x^{-4} \text{ e } x + 1 = x^3.$$

O monge e arquitecto beneditino Dom Hans van der Laan encontrou um outro número que satisfaz a estas condições[1]. Este sistema de proporções apresentado é a retoma de um outro sistema ofuscado pelo entusiasmo do renascimento onde a proporção áurea foi valorizada por melhor servir a ideia do Homem como centro e medida do mundo[2].

Hans van der Laan aplicou este conhecimento nas proporções usadas na construção da igreja da abadia *Sint Benetdictusberg* em Mamelis na Holanda, como se ilustra na imagem do centro da figura 3 onde os rectângulos $[ABED]$ e $[IFGJ]$ respeitam o sistema de proporções propostos pelo arquitecto.

Hans van der Laan designou as soluções do problema atrás referido por números mórficos encontrando um outro número nestas condições, para além da razão áurea, designando-o por número plástico. Segundo este autor, os números mórficos seriam as escalas geométricas ideais para a concepção de objectos espaciais.

O número plástico de Hans van der Laan é solução da equação:

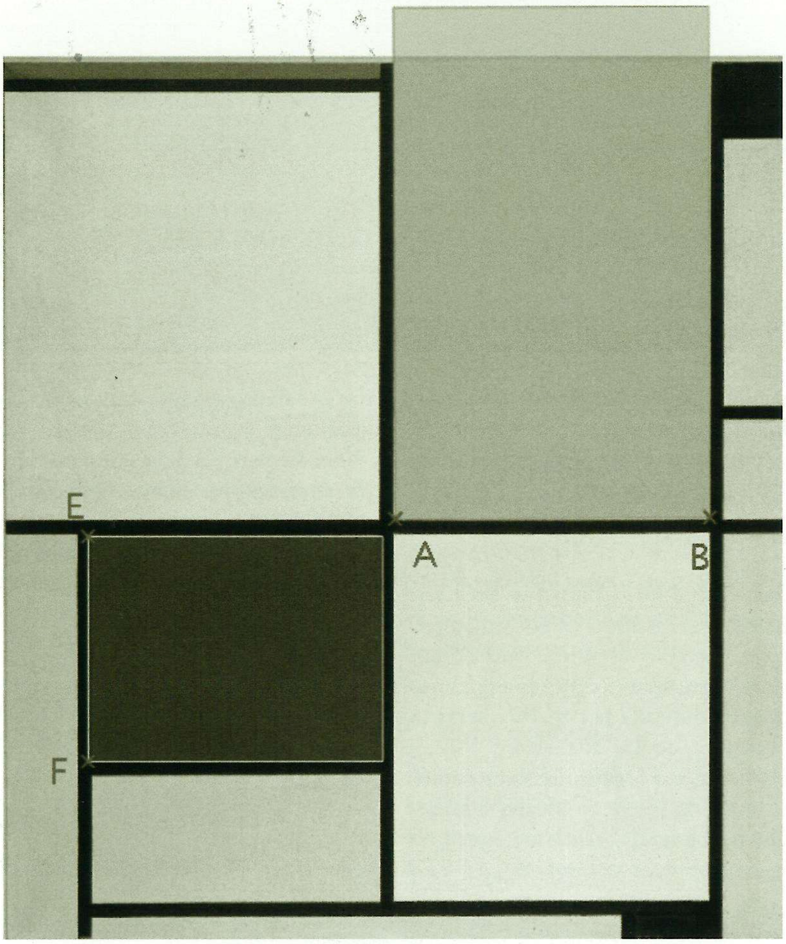
$$x^3 - x - 1 = 0 \ (2)$$

Como podemos escrever

$$x^5 - x^4 - 1 = (x^3 - x - 1)(x^2 - x + 1),$$

segue que a solução de (2) satisfaz a condição $x - 1 = x^{-4}$,

Abadia "Sint Benetdictusberg", Mamelis, Holanda in http://rempei.web.infoseek.co.jp/photo/e-kiji/007laan.html



isto é, a solução real da equação superior a um é o número plástico tomando em (1) $k = 3$ e $l = 4$.

Determinando a solução real da equação (2) obtemos o número de Prata P:

$$\psi = \frac{\sqrt[3]{9-\sqrt{69}}+\sqrt[3]{9+\sqrt{69}}}{\sqrt[3]{18}} \approx 1,32471795$$

A descoberta deste número foi realizada em simultâneo pelo estudante de arquitectura francês Gérard Cordonnier[3]. Este autor designou este número por número radiante e usou a letra ψ. Em 1998 Kruijtzer[4] conjecturou que existiriam apenas dois números mórficos que seriam o número de ouro, φ, e o número radiante, ψ.

Se observarmos a composição de Piet Mondriam (ver figura nesta página) verificamos que o rectângulo radiante (de lado $[EF]$) aparece no rectângulo azul da composição.

Poder-se-ia tentar ajustar um rectângulo áureo (de lado $[AB]$) nos diferentes rectângulos da composição, o que dificilmente se consegue.

De seguida demonstrar-se-á que existem apenas dois números mórficos, os números φ e ψ tais que $\varphi^2 = 1 + \varphi$ e $\psi^3 = 1 + \psi$.

Um número mórfico é solução das duas equações seguintes:

$$x^n - x - 1 = 0 \text{ e } x^m - x^{m-1} - 1 = 0, n, m \geq 2.(3)$$

O primeiro membro de cada uma das equações anteriores é um polinómio de três monómios. O trinómio $x^n - x - 1$, $n \geq 3$ não pode ser decomposto como produto de polinómios de grau inferior que não seja a unidade e ele próprio, isto é, é irredutível[5]. Por outro lado é possível estender o resultado anterior ao trinómio $x^m \pm x^K \pm 1, m \geq 3$ e $1 < k < m$. Este trinómio ou é irredutível ou pode ser escrito ou é o produto de dois polinómios, neste caso o primeiro é irredutível (ou constante) e o segundo polinómio tem raízes de módulo 1.[6]

Assim o trinómio $x^m - x^{m-1} - 1$, $m \geq 3$, ou é irredutível ou o produto de um irredutível pelo polinómio $x^2 - x + 1$. No caso de ser redutível os zeros do polinómio

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	...	Fn
F	1	2	1,5	1,666666667	1,6	1,625	1,615384615	1,619047619	1,617647059	1,618181818	1,617977528	1,618055556	...	φ

Quadro 1.

1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	...	Pn
	1	1	2	1	1,5	1,333333333	1,25	1,4	1,285714286	1,333333333	1,333333333	1,3125	1,333333333	1,321428571	1,324324324	...	ψ

Quadro 2.

tem módulo 1, então os zeros do trinómio satisfazem a equação $|x|^{m-1} = 1/|x-1|$. Porém se a raíz tem módulo 1 ela é um número complexo que se encontra equidistante da origem e do número real 1, a distância de 1. Assim, resulta que uma raíz é o número complexo

$$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i.$$

Mas então o trinómio é divisível por $x^2 - x + 1$.

Pretendíamos encontrar números reais superiores a um que satisfizessem a condição (3). Para $n = m = 2$ os trinómios são idênticos e as duas soluções é o número de ouro e o simétrico do seu inverso. Por outro lado, se m e n são superiores ou iguais a três e se um zero existir ambos os trinómios devem ter um factor comum. Ora, como o primeiro trinómio é redutível isto só pode acontecer se o primeiro dividir o segundo. Em virtude do resultado do parágrafo anterior a existência de um zero comum implica que ocorra a factorização:

$$(x^n - x - 1)(x^2 - x + 1) = x^m - x^{m-1} - 1.$$

Expandindo verificamos que $n = 3$ e $m = 5$. Neste caso a solução é o número plástico de Hans van der Laan.

À semelhança do que acontece com a sucessão de Fibonacci o número de prata também se obtem como limite de uma sucessão definida por recorrência.

De facto desde a edição do Liber Abaci de Leonardo Pisano, também conhecido por Fibonacci, foi estudada a relação entre a sucessão conhecida pelo nome deste autor e o número de ouro. A sucessão definida por:

$$F_0 = 1, F_1 = 1, \ldots, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \ldots$$

é tal que $\lim(F_{n+1}/F_n) = \varphi$. De um modo semelhante podemos obter o número radiante, ou plástico, ψ, este pode ser obtido como o limite da razão de dois termos consecutivos de qualquer uma das duas sucessões seguintes:

Sequencia de Padovan

$$P_0 = P_1 = P_2 = 1, \ldots, P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, \ldots$$
$$\lim(P_{n+1}/P_n) = \psi$$

Sequencia de Perrin

$$P'0 = 3, P'1 = 0, P'2 = 2, \ldots, P'n = P'_{n-2} + P'_{n-3}, \ldots$$
$$\lim(P'_{n+1}/P'_n) = \psi$$

Facilmente podemos obter a sequência de Fibonacci e aproximações de φ (quadro 1). E o mesmo podemos fazer para o número radiante ψ (quadro 2).

Com esta informação podemos encontrar boas aproximações destas duas razões que surgem com alguma regularidade na concepção de obras de arte desde períodos remotos até os nossos dias.

Notas

1 Laan, H. van der, Le Nombre Plastique; quinze Leçons sur l'Ordonnance architectonique, Brill, Leiden, 1960.

2 Richard Padovan, "Dom Hans Van Der Laan and the Plastic Number", pp. 181–193 in *Nexus IV: Architecture and Mathematics*, eds. Kim Williams and Jose Francisco Rodrigues, Fucecchio (Florence): Kim Williams Books, 2002.

3 Padovan, R., Dom Hans van der Laan, Modern Primitive, Amsterdam, 1994

4 Kruijtzer, G., Ruimte en Getal. Het plastische Getal en het gulden-Snedegetal, Architectura & Natura, Amsterdam, 1998.

5 Demonstração pode ser encontrada em: Selmer, E. S., On the irreducibility of certain trinomials, Math. Scand. 4 (1956), 287–302.

6 Demonstração pode ser encontrada em: Tverberg, H., On the irreducibility of the polynomials $x^n \pm x^m \pm 1$, Math. Scand. 8 (1960), 121–126.

José Manuel dos Santos Dos Santos
Escola Superior de Educação do Porto