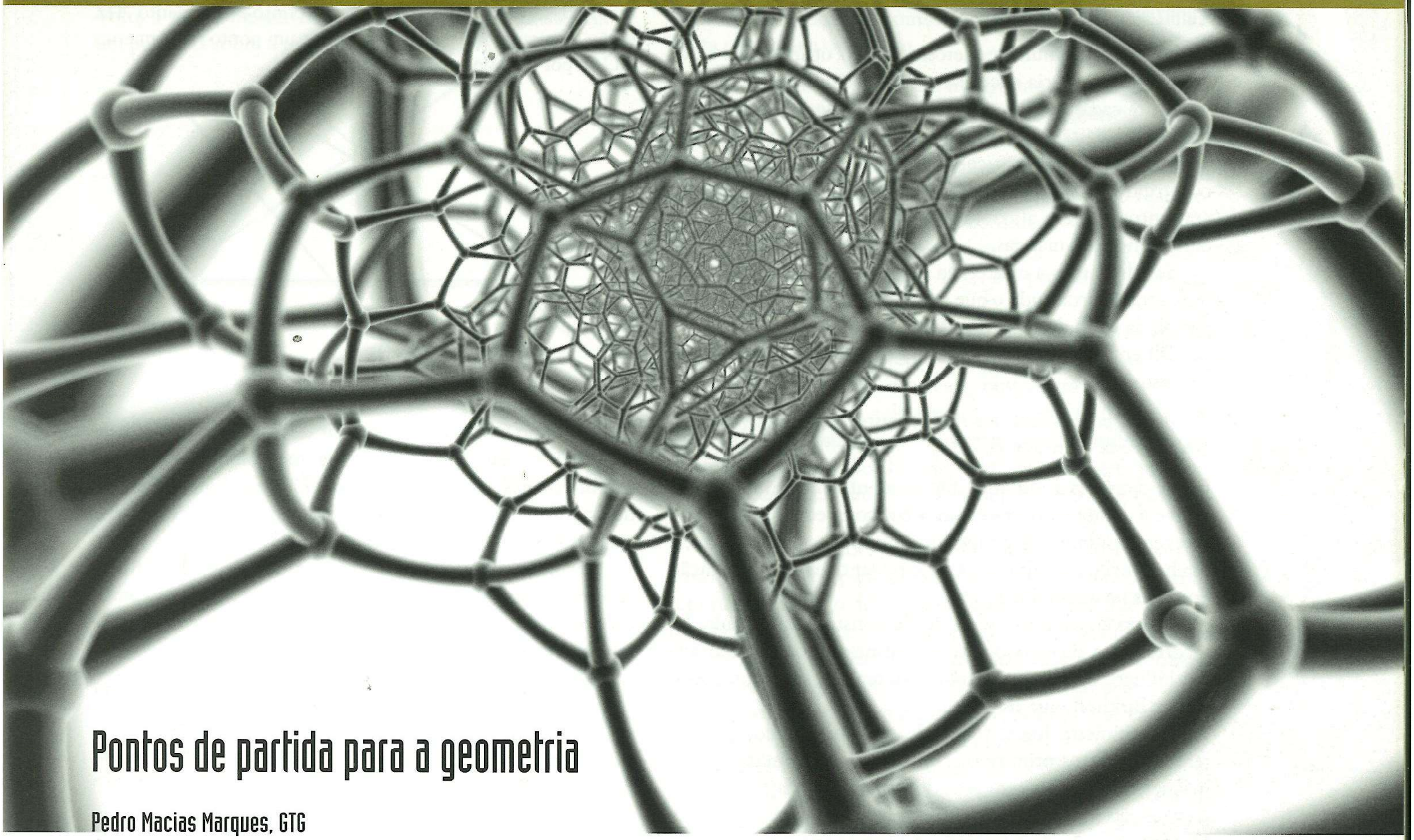


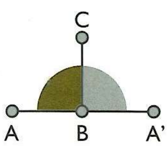
Pontos de partida para a geometria

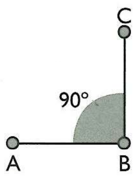
Pedro Macias Marques, GTG

Quando lidamos com conceitos geométricos no estudo de algum assunto (ou quando estamos a quebrar a cabeça com um dos problemas com que o José Paulo Viana nos brinda), podemos, em geral, utilizar abordagens diversas para um mesmo conceito. Por exemplo, reparemos nestas duas formas bem distintas de definir ângulo recto:

Definição 1.
Um ângulo *ABC* é recto se for congruente com o seu suplementar.

Definição 2.
Um ângulo *ABC* é recto se a sua amplitude for 90°.





Ambas são definições correctas (e podemos encontrar muitas mais), mas baseiam-se em pontos de partida distintos: a primeira utiliza a noção de congruência e a segunda a de amplitude. Isto significa que podemos utilizar qualquer uma, mas estaremos a trabalhar em ambientes muito diferentes um do outro. O que esta nota pretende é ajudar a desvendar o que está por trás desta diferença.

Distintas axiomáticas

Estamos habituados a olhar para os axiomas que usamos nas diversas áreas da matemática como regras para um jogo. Quando alteramos as regras, obtemos um jogo diferente. Na geometria, um dos exemplos mais conhecido disto é do axioma das paralelas: se o negarmos, obtemos as geometrias não euclidianas: a hiperbólica e as elípticas. (Para estas últimas são necessárias mais alterações, mas quem quiser ver isto em pormenor, tem no livro de Judith Cederberg [1989] um bom sítio para começar.)

O que pode parecer um pouco estranho é a possibilidade de alterarmos os sistemas de axiomas e obtermos a mesma teoria. Mas acontece, e é até bastante comum. Ora, sendo as consequências as mesmas, interessa saber no que diferem, então, os diversos pontos de partida. Uma das principais diferenças está no caminho que nos leva dos axiomas que escolhemos aos resultados que obtemos.

A geometria euclidiana, que nos é a mais familiar, é um óptimo exemplo disto. Podemos abrir um livro de geometria e deparar com uma demonstração de um teorema espantosamente mais simples do que aquela que havíamos visto noutro livro uns dias antes. Poderá ser habilidade do autor da segunda demonstração, mas muitas vezes a diferença está nos axiomas escolhidos numa abordagem e na outra.

A utilização dos números reais

Um ferramenta muito poderosa quando utilizada na axiomática da geometria euclidiana é a existência de uma bijecção entre cada recta e o conjunto dos números reais. Os números reais já têm a sua axiomática própria (também estes admitem várias axiomáticas, é claro). Ou podem mesmo ser construídos a partir dos racionais, no contexto da teoria dos conjuntos, usando a axiomática destes últimos. Enfim, isto daria pano para mangas.

Se admitimos a existência de uma bijecção assim, estamos a transportar tudo o que sabemos sobre os números reais para cada recta do espaço euclidiano.

Olhemos para um resultado simples, que ilustra muito bem isto.

Dados dois pontos distintos A e B, existe um ponto C, na recta AB, que está entre A e B.

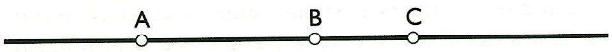
É um daqueles resultados tão evidentes que ninguém se atreve a demonstrar nos ensinos básico e secundário, só nos atrevemos a fazê-lo no superior. Mas, por ser tão simples, é um bom exemplo para observar o poder que tem a utilização dos reais na axiomática.

Observemos como se pode demonstrar este resultado, recorrendo a duas axiomáticas distintas: uma apresentada por Hilbert, onde não são usados os reais, e outra apresentada por Birkhoff, que os utiliza.

Em primeiro lugar, temos de ter presente que *ponto* e *recta* são termos primitivos. Tal como os axiomas são afirmações que se admitem sem demonstração, os termos primitivos são noções que são apresentadas sem uma definição. Quanto à noção de *estar entre*, podemos encontrar abordagens da geometria euclidiana que a tomam como termo primitivo, e outras que a definem a partir de noções anteriores. Vejamos como isto é feito.

No seu livro *Grundlangen der Geometrie* (*Fundamentos da Geometria*, 1962, ou na mais recente tradução para português, 2002), David Hilbert não define a noção de *estar entre* e apresenta axiomas que postulam como esta noção se *comporta*, chamados axiomas de ordem, aqui reproduzidos, a partir da tradução referida:

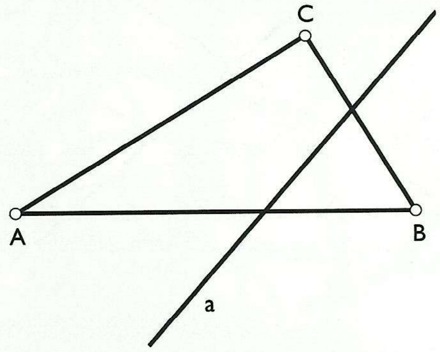
II 1. Se um ponto B está entre um ponto A e um ponto C, então A, B e C são três pontos distintos duma mesma recta, e B está também entre C e A.



II 2. Para cada dois pontos A e C há sempre, pelo menos, um ponto B sobre a recta AC tal que C está entre A e B.

II 3. Dados três pontos quaisquer duma recta, não há mais do que um que está entre os outros dois.

II 4. Sejam A, B e C três pontos que não estão em linha recta e a uma recta no plano ABC que não encontra nenhum dos pontos A, B, C; se a recta a passa por um ponto do segmento AB, então, seguramente, passa também por um ponto do segmento AC ou por um ponto do segmento BC.



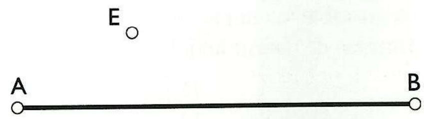
Neste último axioma, são referidas duas outras noções: a de *passar por* e a de *segmento*. A primeira é também um termo primitivo, mas a de *segmento* é definida como um sistema de dois pontos A e B. Diz-se então que os pontos que estão entre A e B são interiores ao segmento AB.

Vejamos como é que, com a axiomática que Hilbert apresenta, podemos demonstrar aquele resultado. Vamos utilizar os axiomas de ordem II 2, II 3 e II 4 e ainda os axiomas de incidência

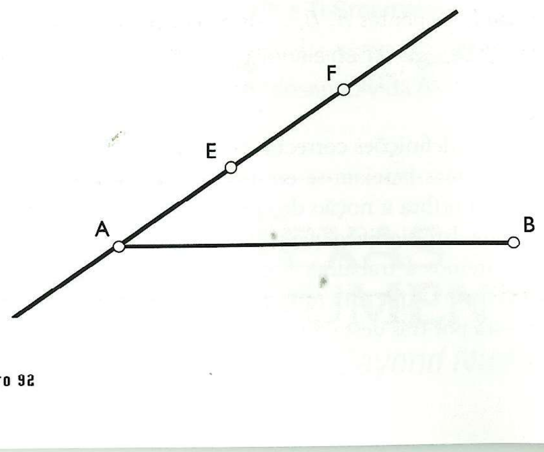
I 1. Para cada dois pontos A, B, há sempre uma recta a que está associada com cada um dos dois pontos A, B.

I 3. Sobre uma recta há sempre, pelo menos, dois pontos. Há pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma recta.

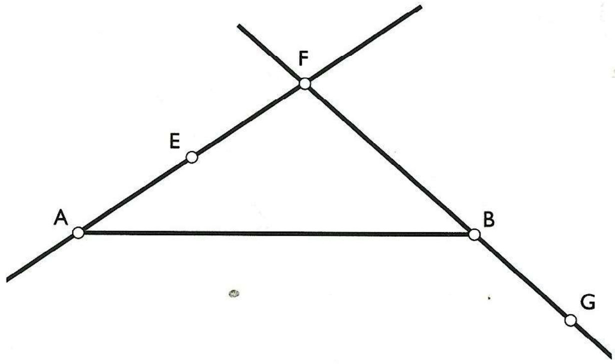
Dados estes pontos de partida, Hilbert demonstra aquele resultado da seguinte forma: utilizando o axioma I 3, toma um ponto E, exterior à recta AB. Embora não o refira na sua demonstração, Hilbert está também a utilizar o axioma I 1 para garantir a existência de uma recta que contenha os pontos A e B. Irá utilizar implicitamente este axioma ao longo da demonstração.



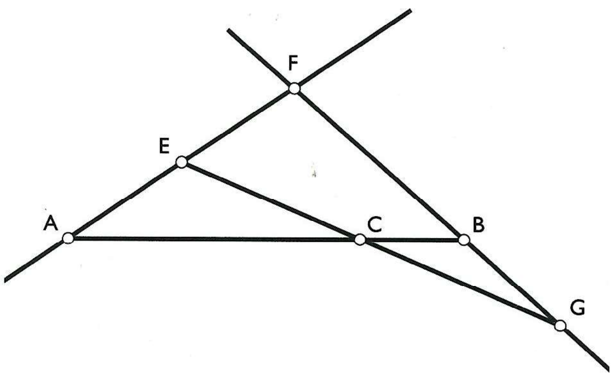
Em seguida, utiliza o axioma II 2 para garantir a existência de um ponto F sobre a recta AE tal que E está entre A e F.



Volta a usar o mesmo axioma para garantir a existência de um ponto G sobre a recta FB tal que B está entre F e G.



Como B está entre F e G, o ponto G não pode estar entre F e B, pelo axioma II 3. Por último, utiliza o axioma II 4, que garante que a recta EG passa pelo segmento AB.

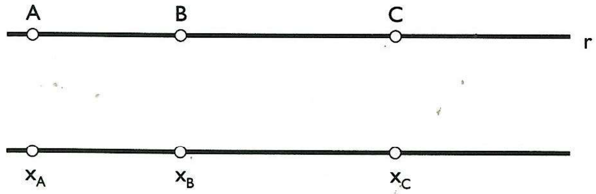


Assim, temos um ponto C, que está entre A e B.

Vejamos agora como, com a axiomática apresentada por George Birkhoff [1932], podemos obter o mesmo resultado. Birkhoff toma como termo primitivo "distância entre dois pontos A, B", designada por $d(A, B)$, dizendo apenas que se trata de um número real não negativo, com a propriedade de, para cada dois pontos A e B, termos $d(A, B) = d(B, A)$. Apresentado este termo primitivo, Birkhoff define a relação de *estar entre*, ao contrário de Hilbert, que a tomou como primitiva. Dados dois pontos distintos A e B, um ponto C está entre A e B se e só se $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$.

Na demonstração daquele resultado, utilizaremos os axiomas:

Postulado I. Os pontos A, B, ... de qualquer recta r podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais x de tal forma que $|x_B - x_A| = d(A, B)$, para qualquer pontos A, B.



Postulado II. Dados dois pontos P, Q (com $P \neq Q$), existe uma única recta r que os contém.

Partindo destes axiomas, para mostrarmos aquele resultado, basta usar o postulado II para garantir a existência de uma recta AB e o postulado I para obtermos uma bijecção entre esta recta e o conjunto dos números reais. Como entre cada dois números reais, há sempre outro número real, podemos tomar x entre x_A e x_B e considerar C o ponto de r associado a x. Como $|x_B - x_A| = |x_B - x| + |x - x_A|$, temos $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B)$, portanto C está entre A e B.

Neste seu artigo de 1932, Birkhoff apresenta apenas quatro axiomas para a geometria euclidiana do plano. A informação transportada dos reais, tanto para a medida das distâncias, como para a dos ângulos, é de tal forma rica, que estes axiomas bastam para mostrar todos os resultados que conhecemos. No caso do resultado que vimos, é até mais que a necessária: bastava, por exemplo, uma bijecção com os racionais.

Estas comparações entre diferentes pontos de partida para a geometria, para além de curiosas, são úteis. Permitem-nos perceber o que é que tem de estar por trás de cada resultado. Isso diz-nos em que condições um resultado é ou não válido. Se soubermos em que axiomas se pode basear um teorema da geometria euclidiana podemos ficar a saber se ainda seria verdadeiro nas não euclidianas, por exemplo. E ficamos a conhecê-lo muito melhor.

Ficamos também mais capazes de escolher a abordagem que queremos utilizar nas nossas aulas. Os alunos (dependendo do grau de ensino) provavelmente não se darão conta destas diferenças, nem é importante que dêem. No entanto, mesmo não trabalhando axiomática com os alunos e não dando definições de cada conceito, cada professor tem de saber qual a abordagem que está a usar, para ser coerente no que faz. Sobre o tratamento das definições nas aulas, assunto deveras delicado, aconselho a leitura da última nota e da que se seguirá a esta (*Sobre as definições (I) e (II)*) e da secção 5 do capítulo VII do livro do Eduardo Veloso (1998).

É opinião do GTG que o ponto de partida apresentado por Birkhoff é o mais adequado, no caso de se querer dar uma ideia do que é um sistema axiomático e de como funcionam as demonstrações, nos ensinos básico e secundário. Desde muito cedo, os alunos estão habituados às noções de distância e de amplitude. Mesmo antes de conhecer o conjunto dos números reais como tal, trabalham com alguns irracionais como o π ou alguns radicais. Deve ser simples, portanto, partir daqueles conceitos para compreender as primeiras definições da geometria.

O desafio que aqui deixamos para o estudo das diferenças entre estas abordagens pode levar a um percurso longo e apaixonante. O GTG terá todo o gosto em discutir estas ideias com professores que o desejem, quer através de correio electrónico, quer pela participação nas nossas reuniões.

Bibliografia

George Birkhoff e Ralph Beatley, *Basic Geometry*, Chelsea Publishing Company, 1959.

George Birkhoff, *A set of postulates for plane geometry, based on a scale and protractor*, Annals of Mathematics, 33: 339–345, 1932.

Judith Cederberg, A *Course in Modern Geometries*, Springer Verlag, 1989.

Eduardo Veloso, *Geometria: temas actuais*, Instituto de Inovação Educacional, 1998.

David Hilbert, *Grundlangen der Geometrie*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1962.

David Hilbert, *Fundamentos da Geometria*, Gradiva, 2003, tradução revista e coordenada por A. J. Franco de Oliveira, com suplementos por Paul Bernays, Federigo Enriques e Henri Poincaré.

Pedro Macias Marques

Grupo de Trabalho de Geometria da APM

gtg@apm.pt

A tarefa *Explorando relações entre fracções, números decimais e percentagens* é uma ligeira adaptação de outra apresentada por Stein, Smith, Henningsen, & Silver, E. (2000). A esta apresentação, segue-se a descrição da sua exploração com duas turmas do 7° ano de escolaridade cujos alunos tinham já algum conhecimento sobre os conceitos de fracção, percentagem e de números representados sob a forma decimal, mas não tinham aprendido algoritmo algum que lhes permitisse responder a questões do tipo "6 que percentagem é de 40?". Ao propor-lhes a tarefa, o professor pretendia que trabalhassem, simultaneamente, com as várias formas de representação de números racionais, que estabelecessem relações entre representações e conceitos com que tinham anteriormente lidado e que as respostas solicitadas se apoiassem em raciocínios centrados nos conceitos e na análise do diagrama e não, fundamentalmente, em procedimentos de cálculo.

A observação da referida descrição ilustra, claramente, que as potencialidades matemáticas da tarefa advêm, antes de mais, de evitar que os alunos alterem a ordem das questões. Com efeito, na turma em que primeiramente foi explorada, o professor para fazer face a dificuldades que surgiram perante a alínea a), sugeriu-lhes que começassem pela alínea c). Sem dificuldade alguma, responderam correctamente 6/40. Em seguida, através de uma divisão, transformaram a fracção num número decimal — alínea b) — e, rapidamente, usando o procedimento de *deslocar* a vírgula duas casas para a direita, representaram este número sob a forma de percentagem.

Na perspectiva do professor, a referida sugestão foi inibidora do desenvolvimento da compreensão conceptual que visava e perverteu as suas intenções pedagógicas. Face a esta constatação, decide que na segunda turma não a apresentaria e que lidaria com eventuais dificuldades dos alunos direccionando a sua atenção para o diagrama e para o que significa sombrear 6 quadrados tendo em conta o número total de quadrados do rectângulo e o modo como estão organizados em linhas e colunas.

Esta decisão fez surgir diferentes estratégias de resolução da alínea a), intimamente relacionadas com as escolhas feitas pelos alunos para sombrear os quadrados. Por exemplo, alguns sombrearam uma coluna e meia. Repararam que como há 10 colunas no rectângulo, cada uma representa 1/10 ou 10% e, por isso, coluna e meia é 15%. Outros sombrearam 6 quadrados justapostos de uma mesma linha ou dispersaram-nos pelo rectângulo. Alguns destes, consideraram que o rectângulo representa 100%, que como há 40 quadrados cada um corresponde a 2,5% e, por isso, 6 quadrados sombreados são 6 × 2,5% ou 15%. Outros, ainda, sombrearam um rectângulo de 3 × 2, descobriram que no diagrama há 6 destes rectângulos e que sobra uma coluna. Indicaram que o conjunto destes rectângulos representa 90% do diagrama, pois a coluna não ocupada por eles corresponde a 10%, e que, por isso, para obter a percentagem da área sombreada basta dividir 90% por 6. Tal como aconteceu com a primeira questão da tarefa, também a exploração da segunda se apoiou significativamente no diagrama e, além disso, nas estratégias usadas pelos alunos para representarem a área sombreada sob a forma de percentagem.

Os raciocínios referidos são meramente ilustrativos e não esgotam todos os seguidos pelos alunos. Apresentei-os, por um lado, com o propósito de sublinhar que a exploração da tarefa mantendo a ordem das questões permitiu deslocar a ênfase da aula da simples execução de procedimentos de cálculo para a compreensão dos conceitos e representações em jogo e suas relações. Por outro lado, pretendi evidenciar que, no contexto dos actuais currículos portugueses, a experiência matemática que a tarefa pode proporcionar é, perfeitamente, adequada e legítima no 2° ciclo do ensino básico e, além disso, favorável a uma aprendizagem significativa da Matemática pelos alunos deste ciclo.

Referência

Stein, M., Smith, M, Henningsen, M, & Silver, E. (2000) *Implementing standard-based mathematics instruction — A case for professional development*. Reston, VA: NCTM e Teachers College Press.

Ana Maria Roque Boavida

ESE de Setúbal