As voltas que os cubos dão

Alberto Canelas

Pegando na ideia e no desafio de Leonor Moreira (vide «Xeque Mate!», in «EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA», n.º 8, 1988) irei tentar fazer uma abordagem de algumas variantes do problema apresentado.

Designarei o caso inicial por *«cubos» num «cubo»* e tentarei, a partir daí, generalizar o problema.

Para melhor sistematização irei dividir este estudo nas três partes seguintes:

1. «Paralelepípedos» num «paralelepípedo»
2. «Cubos» num «paralelepípedo»
3. Outros casos.

Convém aqui precisar os conceitos de «cubo» e de «parapelelípedo». Designarei por «cubo» não só o cubo «vulgar», a três dimensões, mas também o «cubo» a uma dimensão (segmento de recta), a duas dimensões (quadrado) e, especulativamente, o «cubo» a n dimensões, com $n \in \mathbb{N}$. O conceito de «paralelepípedo» corresponderá, de modo semelhante, a uma generalização do conceito de paralelepípedo «vulgar» (para $n=1$, cubo e paralelepípedo confundem-se).

Em todos os casos que irei tratar, os «sólidos contentores» serão «quadriculados» de maneira semelhante ao tabuleiro de xadrez e só serão permitidos «sólidos contidos» cujas «faces» assentem na «quadrícula».

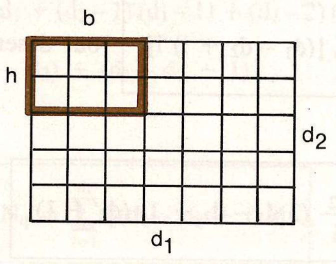
«PARALELEPÍPEDOS» NUM «PARALELEPÍPEDO»

Rectângulos num rectângulo

Consideremos um rectângulo de dimensões d_1 unidades de comprimento x d_2 unidades de comprimento, com $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$. Vamos calcular o número total de rectângulos nele existentes (as dimensões de cada tipo de rectângulo são de b unidades de comprimento x h unidades de comprimento, com $b, h \in \mathbb{N} \wedge b \leqslant d_1 \wedge h \leqslant d_2$)

Estabelecimento da fórmula

Vamos considerar um rectângulo tendo de dimensões, por exemplo, 7 unidades de comprimento × 5 unidades de comprimento.



b×h	N.º	b×h	N.º		b×h	N.º
1×1	7×5	2×1	6×5	....	7×1	1×5
1×2	7×4	2×2	6×4	....	7×2	1×4
....	....	....	....	....	....	....
....	....	....	....	....	....	....
1×5	7×1	2×5	6×1	....	7×5	1×1

$$N_r = \sum_{i=1}^{5} (7\times i) + \sum_{i=1}^{5} (6\times i) + \ldots + \sum_{i=1}^{5} (1\times i) =$$

$$= (7 + 6 + \ldots + 1) \sum_{i=1}^{5} i = \left(\sum_{i=1}^{7} i\right)\left(\sum_{i=1}^{5} i\right)$$

No caso geral podemos concluir:

$$\boxed{N_r = \left(\sum_{i=1}^{d_1} i\right)\left(\sum_{i=1}^{d_2} i\right)} \quad \text{ou} \quad \boxed{N_r = \frac{d_1^2 + d_1}{2} \cdot \frac{d_2^2 + d_2}{2}}$$

Demonstração

Consideremos rectângulos de dimensões 1 × 1. Numa linha caberão d_1 e numa coluna d_2 rectângulos destes. Na totalidade existirão $d_1 \times d_2$ rectângulos 1 × 1. Se os rectângulos forem 2 × 1 existirão $d_1 - 1$ numa linha e d_2 numa coluna, sendo o total de $(d_1 - 1) \times d_2$. Se os rectângulos forem 3 × 2, por exemplo, existirão no total $(d_1 - 2) \times (d_2 - 3)$ rectângulos. Se considerarmos rectângulos genéricos de dimensões b × h, o número total de rectângulos de cada tipo é dado por:

$$N_{b\times h} = (d_1 - b + 1) \times (d_2 - h + 1)$$

Portanto, o número total de rectângulos existentes no rectângulo será dado por:

$$N_r = \sum_{b=1}^{d_1} \sum_{h=1}^{d_2} [(d_1 - b + 1) \times (d_2 - h + 1)] =$$

$$= \sum_{b=1}^{d_1} (d_1 - b + 1) \sum_{h=1}^{d_2} (d_2 - h + 1) =$$

$$= \sum_{b=1}^{d_1} (d_1 - b + 1) \left(d_2^2 - \sum_{h=1}^{d_2} h + d_2\right) =$$

$$= \sum_{b=1}^{d_1} (d_1 - b + 1) \left(d_2^2 - \frac{d_2^2 + d_2}{2} + d_2\right) =$$

$$= \frac{d_2^2 + d_2}{2} \sum_{b=1}^{d_1} (d_1 - b + 1) =$$

$$= \frac{d_1^2 + d_1}{2} \cdot \frac{d_2^2 + d_2}{2} = \left(\sum_{i=1}^{d_1} i\right)\left(\sum_{i=1}^{d_2} i\right)$$

Nota: Chegar-se-ia à mesma conclusão notando que:

$$\sum_{b=1}^{d_1} (d_1 - b + 1) = d_1 + (d_1 - 1) + (d_1 - 2) + \ldots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^{d_1} i$$

$$\sum_{h=1}^{d_2} (d_2 - h + 1) = d_2 + (d_2 - 1) + (d_2 - 2) + \ldots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^{d_2} i$$

e, por conseguinte,

$$\sum_{b=1}^{d_1} (d_1 - b + 1) \sum_{h=1}^{d_2} (d_2 - h + 1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{d_2} i \sum_{b=1}^{d_1} (d_1 - b + 1) = \left(\sum_{i=1}^{d_1} i\right)\left(\sum_{i=1}^{d_2} i\right) =$$

$$= \frac{d_1^2 + d_1}{2} \cdot \frac{d_2^2 + d_2}{2}$$

Paralelepípedos num paralelepípedo

Consideremos um paralelepípedo de dimensões d_1 unidades de comprimento x d_2 unidades de comprimento x d_3 unidades de comprimento, com $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{N}$. Vamos calcular o número total de paralelepípedos nele existentes (as dimensões de cada tipo de paralelepípedo são de b unidades de comprimento x h unidades de comprimento x e unidades de comprimento, com $b, h, e \in \mathbb{N} \wedge b \leqslant d_1 \wedge h \leqslant d_2 \wedge e \leqslant d_3$.

Seguindo um raciocínio idêntico ao do caso anterior facilmente se conclui:

$$\boxed{N_p = \left(\sum_{i=1}^{d_1} i\right)\left(\sum_{i=1}^{d_2} i\right)\left(\sum_{i=1}^{d_3} i\right)} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{N_p = \frac{d_1^2 + d_1}{2} \cdot \frac{d_2^2 + d_2}{2} \cdot \frac{d_3^2 + d_3}{2}}$$

A demonstração poderá ser feita utilizando a metodologia apresentada anteriormente.

Fórmula geral

Podemos resumir as conclusões chegadas no seguinte enunciado:

Num «paralelepípedo» a n dimensões e de dimensões d_1 unidades de comprimento x d_2 unidades de comprimento x ... x d_n unidades de comprimento, com $n, d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$, o número total de «paralelepípedos» a n dimensões (em que os valores das dimensões, referidas à mesma unidade de comprimento atrás mencionada, são números naturais inferiores ou iguais à dimensão correspondente do paralelepípedo onde estão contidos) nele existentes é dado pela fórmula:

$$\boxed{N_p = \prod_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{d_j} i} \quad \text{ou} \quad \boxed{N_p = \frac{1}{2^n} \prod_{j=1}^{n} [d_j \, (d_j + 1)]}$$

No caso particular de «paralelepípedos» existentes em «cubos», temos $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = a$, e, portanto,

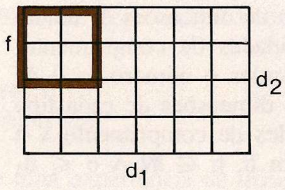
$$\boxed{N_p = \left(\sum_{i=1}^{a} i\right)^n} \quad \text{ou} \quad \boxed{N_p = \left(\frac{a^2 + a}{2}\right)^n}$$

«CUBOS» NUM «PARALELEPÍPEDO»
Quadrados num rectângulo

Consideremos um rectângulo de dimensões d_1 unidades de comprimento x d_2 unidades de comprimento, com $d_1, d_2 \in \mathbb{N} \wedge d_1 \geqslant d_2$. Vamos calcular o número total de quadrados nele existentes (o lado de cada tipo de quadrado é de f unidades de comprimento, com $f \in \mathbb{N} \wedge f \leqslant d_2$

Estabelecimento da fórmula

Vamos considerar um rectângulo tendo de dimensões 6 unidades de comprimento × 4 unidades de comprimento



f	N.º
1	6×4
2	5×3
3	4×2
4	3×1

$$N_q = 6 \times 4 + 5 \times 3 + 4 \times 2 + 3 \times 1 = \sum_{i=1}^{4} [(2 + i)\, i]$$

No caso geral, podemos concluir:

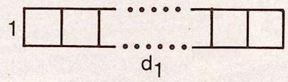
$$\boxed{N_q = \sum_{i=1}^{d_2} [(d_1 - d_2 + i)\, i]} \quad \text{ou, desenvolvendo}$$

$$\boxed{N_q = \frac{d_2}{6} (3\, d_1 - d_2 + 1)(d_2 + 1)}$$

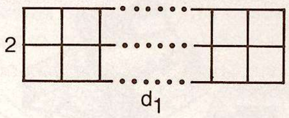
Demonstração

Para demonstrarmos a conclusão referida anteriormente poderíamos seguir um caminho em tudo idêntico ao utilizado nos casos precedentes e chegaríamos facilmente à fórmula desejada. No entanto, para variar, iremos seguir outra via, utilizando o método de recorrência. Consideremos uma pluralidade de rectângulos de dimensões d_1 unidades de comprimento x h unidades de comprimento, com $h \in \mathbb{N} \wedge h \leqslant d_2$. O número de quadrados existentes em cada um desses rectângulos forma uma sucessão de termo geral U_h, como a seguir se indica:

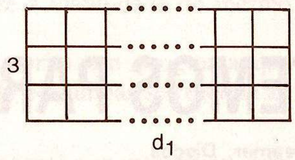
$U_1 = d_1$



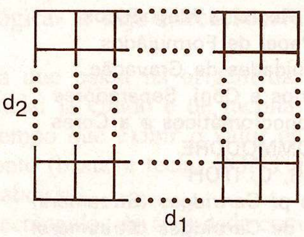
$U_2 = U_1 + d_1 + (d_1 - 1)$



$U_3 = U_2 + d_1 + (d_1 - 1) + (d_1 - 2)$



$U_{d_2} = U_{d_2-1} + d_1 + (d_1 - 1) + (d_1 - 2) + \ldots + (d_1 - d_2) + (d_1 - d_2 + 1)$



Adicionando membro a membro, eliminando os termos comuns e tendo em atenção que $N_q = U_{d_2}$, conclui-se que

$N_q = U_{d_2} = d_2\, d_1 + (d_2 - 1)(d_1 - 1) + (d_2 - 2)(d_1 - 2) +$
$+ \ldots + 2\,(d_1 - d_2) + (d_1 - d_2 + 1)$

ou seja

$$\boxed{N_q = \sum_{i=1}^{d_2} [(d_1 - d_2 + i)\, i]}$$

Cubos num paralelepípedo

Consideremos um paralelepípedo de dimensões d_1 unidades de comprimento x d_2 unidades de comprimento x d_3 unidades de comprimento, com $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{N} \wedge d_1 \geqslant d_2 \geqslant d_3$. Vamos calcular o número total de cubos nele existentes (a aresta de cada tipo de cubo é de g unidades de comprimento, com $g \in \mathbb{N} \wedge g \leqslant d_3$.

Seguindo um raciocínio idêntico ao do caso anterior facilmente se conclui:

$$\boxed{N_c = \sum_{i=1}^{d_3} [(d_1 - d_3 + i)\,(d_2 - d_3 + i)\, i]}$$

Desenvolvendo obter-se-ia a forma polinomial, que, dada a sua complexidade, não terá grande interesse aqui referir.

A demonstração poderá ser feita utilizando a metodologia apresentada no caso anterior.

Fórmula geral

Podemos resumir as conclusões chegadas no seguinte enunciado:

Num «paralelepípedo» a n dimensões e de dimensões d_1 unidades de comprimento x d_2 unidades de comprimento x … x d_n unidades de comprimento, com $n, d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{N} \wedge d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$, o número total de «cubos» a n dimensões (em que as medidas das «arestas», referidas à mesma unidade de comprimento atrás mencionada, são números naturais inferiores ou iguais a d_n) nele existentes é dado pela fórmula:

$$\boxed{N_c = \sum_{i=1}^{d_n} \prod_{j=1}^{n} (d_j - d_n + i)}$$

No caso particular de «cubos» existentes em «cubos», temos $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = a$, e, portanto,

$$\boxed{N_c = \sum_{i=1}^{a} i^n}$$

fórmula esta já referida no artigo de Leonor Moreira anteriormente mencionado.

OUTROS CASOS

O problema não se esgota aqui. Há uma grande variedade de casos que podem ser abordados. A título meramente exemplificativo deixo aqui algumas sugestões para quem estiver interessado.

(Continua na pág. 36)

O problema... (continuação)

$$= \frac{6!\ {}^{47}C_7}{7!\ {}^{47}C_7} \overset{(2)}{=}$$

$$= \frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$$

O problema está resolvido.

Importa agora reflectir sobre a resolução do problema, para tentar perceber o porquê do resultado obtido.

Um primeiro aspecto que importa salientar é que o número de bolas na caixa (47) não é relevante. Se, em vez de 47, tivéssemos trabalhado com uma variável genérica (n), teríamos obtido o mesmo resultado.

Outro aspecto que tem interesse discutir é não ser relevante o facto de se ter escolhido a última bola como sendo aquela que se vai comparar com as seis primeiras. Quer dizer: o problema que nos foi posto é, ao fim e ao cabo, equivalente a este:

Dados 7 números quaisquer, todos diferentes, qual é a probabilidade de um deles ser maior que os restantes?

Como não há números privilegiados, torna-se claro que a probabilidade é 1/7».

Notas:

(1) Conclusão idêntica a do Luís Carmelo *(N. da R.)*.

(2) Tem-se a seguinte propriedade: $\sum_{k=p}^{n} {}^{k}C_p = {}^{n+1}C_{p+1}$

Esta propriedade, que se pode demonstrar por indução, tem a seguinte ilustração no Triângulo de Pascal: a soma dos elementos de uma coluna, até uma linha qualquer, é igual ao elemento que fica na linha abaixo e na coluna à direita.

Ainda o cão (conclusão)

sar de não ser nenhum Ben Johnson, presumo conseguir pelo menos metade (18 km/h) e então o cão terá de fazer 18 × 5,86 = 105 km/h. Impossível: o mamífero mais veloz é a chita que faz 101 km/h (in *Guiness-Book of Records*). Logo, não há cão que me detenha...

2. Se eu fosse mesmo prisioneiro e estivesse mesmo num pátio quadrado, guardado por um cão verdadeiro, ainda havia um outro método muito mais simples e de quase total eficácia. Dava pequenas e vagarosas voltas em torno do ponto H. O cão, dada a sua característica (A'), corria a toda a velocidade à volta do pátio. Obrigava-o assim a dar 6 ou 7 voltas, de 800 metros cada uma. Nessa altura, o cão estaria esfalfado e eu fresco que nem uma alface. Depois, era só uma corridinha de 100 metros: o cão, esgotado, já não tinha forças para me apanhar.

Variante

E se o pátio for circular? Quantas vezes mais depressa tem de correr o cão para que o homem não fuja?

Prolongamento

Ainda no caso do pátio quadrado, qual é realmente a melhor estratégia do cão para evitar a fuga do homem?

As voltas... (continuação)

Caso de figuras «pavimentáveis» com um só tipo de figura

São casos semelhantes aos atrás referidos. Alguns exemplos para este primeiro caso seriam o cálculo do número de triângulos equiláteros existentes num triângulo equilátero (haveria a tentação de fazer a transposição pura e simples para o caso de teatraedros num tetraedro mas aí o problema complica-se, visto o tetraedro não ser «pavimentável» com tetraedros, embora haja abordagens possíveis deste caso), de prismas triangulares regulares em prismas triangulares regulares, etc.

Caso de figuras «pavimentáveis» com dois tipos de figuras

Numa segunda fase poder-se-ia pensar em casos como, por exemplo, o hexágono regular e prisma hexagonal regular que não são «pavimentáveis» com hexágonos regulares e prismas hexagonais regulares respectivamente (por exemplo, no caso do hexágono a «pavimentação» é feita com losangos e hexágonos regulares).

Caso de figuras «curvas»

É um problema já mais complexo. É o caso, por exemplo, de círculos em círculos, esferas em esferas, cilindros em cilindros, esferas em cilindros, etc. Em todos estes casos haveria que definir as regras do jogo, isto é, impor as restrições necessárias de modo a tornar possível a resolução do problema.