Vissicitudes de uma investigação bem sucedida

Existirá algum triângulo, com lados de comprimento inteiro, que tenha perímetro 100 e área inteira?

Primeiros passos e hesitações

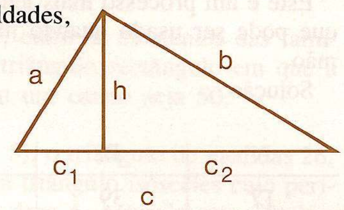
Perante este desafio, alguns «investigadores» começam a procurar, separadamente, mas todos com a mesma dificuldade: como relacionar a área do triângulo com as medidas dos lados?

Partindo de três igualdades,

$c_1+c_2=c$

$h^2+c_2^2=b^2$

$h^2+c_1^2=a^2$



pode chegar-se à seguinte fórmula, que permite relacionar uma altura com os outros três lados de um triângulo qualquer:

$$h = \sqrt{\frac{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}{4c^2}} \quad \text{ou}$$

$$h = \frac{1}{2c}\sqrt{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}$$

Com esta fórmula ganha-se alguma confiança para continuar, mas que fazer com ela?

Aliás, também é conhecida uma fórmula poderosa, a fórmula de Heron, que permite calcular a área de qualquer triângulo a partir das medidas dos seus lados:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{sendo} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Mas a questão permanece, que fazer com estas fórmulas?

Pode tentar-se uma via algébrica a partir da fórmula de Heron, por exemplo.

Tendo em conta os dados do problema, obtém-se:

$$A = \sqrt{50(50-a)(50-b)(a+b-50)}$$

Visto que se pretende que a área seja inteira, o radicando desta expressão deve ser um quadrado perfeito. Poderíamos, assim, ir à procura de quadrados perfeitos múltiplos de 50. Consultando uma tabela de quadrados perfeitos, a tarefa logo se apresenta longa e trabalhosa, há imensos quadrados perfeitos múltiplos de 50. Do ponto de vista algébrico, a tarefa não parece muito atraente.

Felizmente que há poderosos instrumentos de cálculo e, assim, é possível virar o problema do avesso: vamos dar valores inteiros aos lados e vamos ver quando obteremos uma área inteira.

Cada um pode pegar no seu instrumento preferido, e do modo que mais lhe agrade. Pode escolher-se entre o computador e a calculadora. A tarefa torna-se uma questão de organização e... de pôr a máquina a calcular!

Resolução através da folha de cálculo

Coluna A números inteiros de 2 a 33
B int ((100–A)/2)
C 100–A–B
D SQRT $(4*A^2*C^2-(A^2+C^2-B^2)^2)/(2*C)$
(valor da altura referente ao lado C)
E (C*D)/2

A lado A	B lado B	C lado C	D alt (c)	E Área
2	49	49	1.999583	48.98979
3	48	49	2.798226	68.55655
4	48	48	3.996526	95.91663
5	47	48	4.841229	116.1895
6	47	47	5.987765	140.7125
7	46	47	6.835055	160.6238
8	46	46	7.969697	183.3030
9	45	46	8.803677	202.4846
10	45	45	9.938080	223.6068
11	44	45	10.74968	241.8677
12	44	44	11.88791	261.5339
13	43	44	12.67033	278.7472
14	43	43	13.81325	296.9848
15	42	43	14.56044	313.0495
16	42	42	15.70707	329.8485
17	41	42	16.41304	344.6738
18	41	41	17.56098	360
19	40	41	18.21937	373.4970
20	40	40	19.36492	387.2983
21	39	40	19.96873	399.3745
22	39	39	21.10679	411.5823
23	38	39	21.64807	422.1374
24	38	38	22.77190	432.6662
25	37	38	23.24148	441.5880
26	37	37	24.34234	450.3332
27	36	37	24.72936	457.4932
28	36	36	25.79597	464.3275
29	35	36	26.08746	469.5743
30	35	35	27.10524	474.3416
31	34	35	27.28534	477.4935
32	34	34	28.23529	480
33	33	34	28.28427	480.8326

De uma forma rápida ficamos com a certeza de que há, pelo menos, dois triângulos que verificam as condições pedidas.

Não haverá mais que dois triângulos?

A organização dos cálculos não poderia ter sido feita de modo a obter mais triângulos?

A utilização de fórmula de Heron não poderia trazer simplificações ao programa?

Resolução utilizando um programa em BASIC em computador

```
5 REM triângulos de base a
10 FOR A=2 TO 49
20 FOR B=2 TO 49
30 FOR C=2 TO 49
40 IF A+B+C< >100 THEN GOTO 300
50 IF A>=B+C THEN GOTO 300
60 IF B>=A+C THEN GOTO 300
70 IF C>=A+B THEN GOTO 300
80 GOSUB 400
90 GOSUB 500
300 NEXT C
310 NEXT B
320 NEXT A
330 GOTO 600
400 REM Subrotina: cálculo da área dos triângulos de
base a
410 T=A*A+C*C-B*B
420 R=T/(2*A)
430 Q=R*R
440 S=C*C-Q
450 H=SQR(S)
460 AR=A*H/2
470 RETURN
500 REM Subrotina: verificar se a área é um n.º inteiro
510 IF AR=INT(AR) THEN PRINT "base a="; A,
"b="; B, "c="; C, "Área="; AR
520 RETURN
600 END
```

Soluções

base a=17	b=39	c=44	Área=330
base a=17	b=44	c=39	Área=330
base a=18	b=41	c=41	Área=360
base a=26	b=26	c=48	Área=240
base a=26	b=48	c=26	Área=240
base a=29	b=29	c=42	Área=420
base a=29	b=42	c=29	Área=420
base a=32	b=34	c=34	Área=480
base a=34	b=32	c=34	Área=480
base a=34	b=34	c=32	Área=480
base a=39	b=44	c=17	Área=330
base a=41	b=41	c=18	Área=360
base a=42	b=29	b=29	Área=420
base a=44	b=17	c=39	Área=330
base a=44	b=39	c=17	Área=330
base a=48	b=26	c=26	Área=240

Será que estão aqui todas as combinações possíveis? Quantos triângulos haverá, afinal de contas? A organização do programa não poderia ter sido feita de outro modo? E utilizando outra linguagem?

Resolução utilizando um programa em BASIC em calculadora programável

```
10 INP A
15 D=A
20 B=51-D
30 S=SQR (50*(50-A)*(50-B)*(A+B-50))
40 PRT S
50 D=D-1
60 IF D>1 THEN 20
70 GO TO 10
```

Este é um processo mais lento que os anteriores mas que pode ser usado quando não há um computador à mão.

Solução:

A	B	C	Área
17	39	44	330
18	41	41	360
26	26	48	240
29	29	42	420
32	34	34	480

Parece agora não haver dúvidas de que há de facto 5 triângulos que respondem às condições do problema.

No entanto, não será possível melhorar os programas construídos?

E quem não dispuser de um instrumento auxiliar de cálculo, não conseguirá mesmo resolver o problema?

Resolução sem recurso a instrumentos auxiliares de cálculo

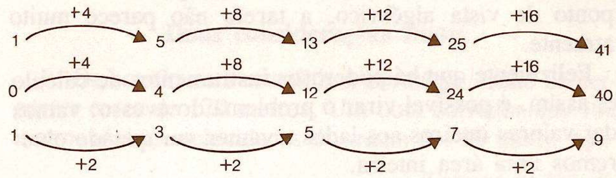
E porque não pensar em triângulos particulares?

Não haverá, por acaso, um triângulo isósceles que responda às condições do problema?

Qualquer triângulo isósceles é sempre decomponível em dois triângulos rectângulos geometricamente iguais. Assim basta procurar entre os triângulos rectângulos algum que tenha as medidas certas.

A redução do problema à procura de triângulos rectângulos é bascada no facto de haver uma regra, simples e interessante, que permite construir facilmente famílias de triângulos rectângulos.

Regra que permite obter famílias de triângulos rectângulos



Deste modo, a regra pode aplicar-se indefinidamente, permitindo obter ternos pitagóricos geradores de famílias de triângulos rectângulos. Os outros elementos da família podem obter-se multiplicando os três valores por um número inteiro qualquer.

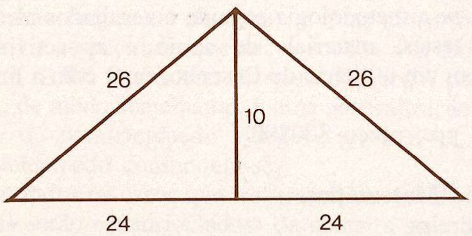
Assim, a família gerada por (5, 4, 3) será:

5	10	15	20	25	
4	8	12	16	20	etc.
3	6	9	12	15	

Agora, basta procurar, entre os elementos das famílias assim geradas, um triângulo rectângulo em que a soma da hipotenusa com um cateto seja 50.

Eureka!

Na família do (13, 12, 5), o triângulo de medidas 26, 24 e 10 permite obter um triângulo isósceles cujo perímetro é 100 e em que a área é, naturalmente, inteira.



Prova-se, assim, a existência de pelo menos um triângulo de lados inteiros, perímetro 100 e área inteira. Este processo é moroso, não dá todas as possibilidades e poderia até não ter dado nenhuma resposta ao problema, mas sem dúvida que é um processo rico do ponto de vista matemático. Mesmo que não tivéssemos descoberto nenhum triângulo, teríamos feito um percurso interessante pelas sendas dos triângulos rectângulos.

Dois desafios

O problema ficou mesmo resolvido, disso não pode haver dúvidas, mas o mais interessante foi a diversidade de processos utilizados.

Se repararmos bem, cada resolução recorreu a conhecimentos matemáticos diferentes, integrando-os de forma pessoal, e respondendo ao problema de forma também diferente.

Certamente que outras resoluções são possíveis, recorrendo ou não a instrumentos auxiliares de cálculo. Porque não pensar noutro processo de resolução?

Por outro lado algumas resoluções sugerem ideias interessantes de generalização. Porque não construir outros problemas a partir deste?

Este artigo foi elaborado por Cristina Loureiro com a colaboração de Albano Silva, Fernando Duarte e Manuel Saraiva.

Retrato final dos triângulos procurados