Ainda o cão e o prisioneiro

José Paulo Viana, E. S. Marquês de Pombal

Depois de resolver o problema do cão e do prisioneiro que o Manuel Saraiva apresentou no último número da revista, a primeira pergunta que também a mim se pôs foi: «Até onde pode ir a velocidade do cão, continuando o homem a conseguir fugir?»

Recapitulemos: temos um prisioneiro (com que nos podemos identificar) no centro (H) do quadrado. Temos um cão que se encontra num dos vértices (C) do quadrado, que só se pode mover ao longo dos lados do quadrado e que tem uma velocidade π vezes superior à nossa. Conseguiremos fugir?

Admitamos que desatamos a correr e não mudamos de direcção. Sejam

E_h — espaço percorrido pelo homem
E_c — espaço percorrido pelo cão
X — distância indicada na fig. 1

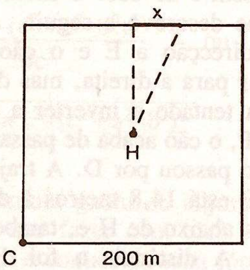

Fig. 1

Vimos que, resolver o problema inicial, consistia em encontrar as soluções da inequação

$$\pi \times E_h - E_c < 0$$
$$\pi \sqrt{100^2 + X^2} - (300 + X) < 0$$
donde $X \in \,]21{,}033\ ;\ 46{,}613[$

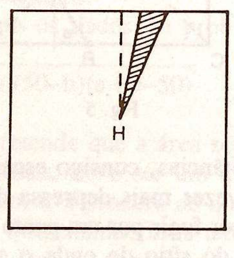

Fig. 2

Há portanto ali uma faixa por onde podemos fugir. Não é lá muito seguro, mas consegue-se. Podemos até calcular a que distância está o cão quando atravessamos o quadrado: 2,18 metros se escolhermos o ponto a meio deste intervalo. Talvez apanhemos um susto, mas não apanhamos uma dentada!

O cão acelera

Surge então a tal questão: *E se o cão for mais rápido? Até onde pode ir a velocidade do cão?*

Voltemos à inequação inicial e substituamos π por K, sendo K a relação entre as velocidades do cão e do homem. Qual o maior valor de K que nos permite ainda fugir? Não esqueçamos que $K > 1$ (o cão corre mais do que nós).

$$K \times E_h - E_c < 0$$
$$K \sqrt{100^2 + X^2} - (300 + X) < 0$$
$$(K^2 - 1)\, X^2 - 600\, X + 100^2\, (K^2 - 9) < 0$$

Resolvendo a equação correspondente a esta inequação, vem:

$$X = \frac{600 \pm 200\, K \sqrt{10 - K^2}}{2\,(K^2 - 1)} \qquad (1)$$

Note-se que, se $K = \pi$, obtemos os valores 21,033 e 46,613, já encontrados atrás.

Que acontece se K aumentar? A «faixa de fuga» vai estreitando, estreitando, até se reduzir a um único caminho possível. E quando acontece isso? Quando a equação anterior só tiver uma solução, isto é, quando

$$200\, K \sqrt{10 - K^2} = 0$$
Logo, $10 - K^2 = 0$
$$K = \sqrt{10} \simeq 3{,}1623$$

Assim, para escaparmos, a relação entre as velocidades terá de ser inferior a $\sqrt{10}$ e o ponto ideal de fuga é, fazendo $K = \sqrt{10}$ em (1), o correspondente a $X = 33{,}333$ metros. Curiosamente, este ponto corresponde a um terço do lado do pequeno quadrado.

Está dada a resposta ao Manuel Saraiva.

Mas, *e se o cão for ainda mais rápido?* Estaremos condenados a ficar presos ou a ser mordidos?

Claro que não! É de esperar que, sendo nós capazes de estar ali no centro do quadrado uma data de tempo a fazer raciocínios e cálculos elaborados, que até nos permitem dizer qual o melhor ponto por onde fugir, não nos esqueçamos que há melhores estratégias do que esta do «correr em frente a toda a velocidade».

Podemos arranjar logo um meio mais eficaz! Começamos a correr em direcção a N e o cão arranca para D. Aí, damos meia volta e voltamos calmamente para trás, de modo a chegarmos a H quando o cão chega a M. Estamos agora muito melhor que antes: se formos para M', temos de percorrer 100 metros, enquanto que o cão, coitado, tem de andar 400 metros, ou seja, tem de correr 4 vezes mais depressa do que nós.

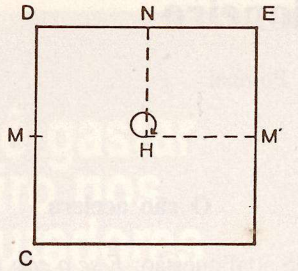

Fig. 3

Sobre o cão

Antes de prosseguirmos a nossa investigação para responder à questão-base deste problema (qual é o valor máximo de K?), temos de fazer uma pausa e ver qual é o comportamento que o cão tem de ter para melhor guardar o homem: tem de ser um cão eficiente, não pode ser um cão qualquer.

Para já, tem uma característica que esteve subentendida em todos os raciocínios anteriores:

(A) ''Escolhe sempre o caminho óptimo'' (M. Saraiva).

Temos, no entanto, de clarificar o sentido da palavra *óptimo*. Podemos admitir que o que o cão faz é ver, em cada momento, qual o ponto de saída mais próximo do homem e correr para lá pelo caminho mais curto, ou seja,

(A') Corre sempre pelo caminho mais curto para o ponto do quadrado mais próximo do homem.

Reparem bem, é um cão cheio de capacidades: tem a noção de quadrado e sabe fazer uma avaliação instantânea do caminho mais curto...

Mas, e se os dois caminhos forem iguais? É o que acontece, por exemplo, quando o cão está em M e nós corremos para M'. Temos de admitir que ele não é tão estúpido que fique indeciso e não corra. É a sua segunda característica.

(B) Se os dois caminhos possíveis forem iguais, opta imediatamente por um deles.

Parece que, do ponto de vista do carcereiro, este seria o melhor comportamento a exigir do cão. Mas não é!

Se eu correr de H para E aos zigue-zagues, as saídas mais próximas vão sendo os pontos P_1, P_2, P_3, P_4,...

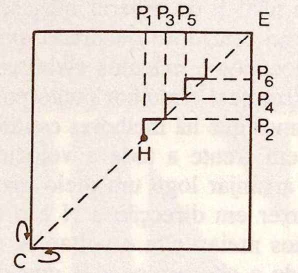

Fig. 4

O cão, se cumprir escrupulosamente (A') e (B), vai andar para trás e para a frente sem se afastar muito de C. Assim, eu acabo por sair por E com o cão ainda longe, mesmo que a sua velocidade seja muito superior à minha.

O cão tem de ter então uma terceira característica:

(C) Quando o homem está perto de uma das diagonais do quadrado, o cão só inverte o sentido da corrida se a diferença entre os dois caminhos (aquele por onde vai e o oposto) ultrapassar um certo valor δ.

Se agora me perguntarem qual deve ser o valor de δ, eu respondo: «Já estão a perguntar muito! Isso é com o cão, o cão que se desenrasque».

A caminho da liberdade

Para se encontrar a melhor solução teórica do problema (maior valor de K e correspondente trajectória do homem), suponho que seria necessário resolver uma equação diferencial bem acima das minhas capacidades e do meu interesse...

Como não consegui encontrar um algoritmo que me permitisse utilizar a folha de cálculo, fiz algumas experiências e tentativas com papel e lápis, simulando as trajectórias do homem e do cão. O melhor resultado que consegui é o que descrevo a seguir.

Arranco em direcção a E e o cão corre para D. Começo a curvar para a direita, mas de modo a que o cão não se sinta tentado a inverter a marcha. Assim, quando chego a P, o cão acaba de passar por M; quando atinjo Q já o cão passou por D. A trajectória de Q até R é rectilínea. P está 14,8 metros à direita de H e Q está 16,4 metros abaixo de H e, também, 16,4 metros à direita de H. A distância **a** foi determinada pelo método habitual (ver início do artigo).

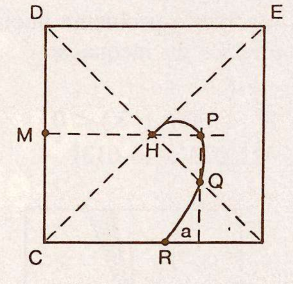

Fig. 5

Nestas circunstâncias, consigo escapar mesmo que o cão corra 5,86 vezes mais depressa do que eu. Curiosamente, acabo por fugir por um ponto do quadrado relativamente perto do sítio de onde o cão partiu...

Duas considerações finais

1. De acordo com esta última estratégia, tenho de percorrer cerca de 120 metros. Um bom corredor dos 100 metros alcança velocidades da ordem dos 36 km/h. Ape-

(Continua na pág. 36)

O problema... (continuação)

$$= \frac{6!\ {}^{47}C_7}{7!\ {}^{47}C_7} \overset{(2)}{=}$$

$$= \frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$$

O problema está resolvido.

Importa agora reflectir sobre a resolução do problema, para tentar perceber o porquê do resultado obtido.

Um primeiro aspecto que importa salientar é que o número de bolas na caixa (47) não é relevante. Se, em vez de 47, tivéssemos trabalhado com uma variável genérica (n), teríamos obtido o mesmo resultado.

Outro aspecto que tem interesse discutir é não ser relevante o facto de se ter escolhido a última bola como sendo aquela que se vai comparar com as seis primeiras. Quer dizer: o problema que nos foi posto é, ao fim e ao cabo, equivalente a este:

Dados 7 números quaisquer, todos diferentes, qual é a probabilidade de um deles ser maior que os restantes?

Como não há números privilegiados, torna-se claro que a probabilidade é 1/7».

Notas:

(1) Conclusão idêntica a do Luís Carmelo *(N. da R.)*.

(2) Tem-se a seguinte propriedade: $\sum_{k=p}^{n} {}^{k}C_p = {}^{n+1}C_{p+1}$

Esta propriedade, que se pode demonstrar por indução, tem a seguinte ilustração no Triângulo de Pascal: a soma dos elementos de uma coluna, até uma linha qualquer, é igual ao elemento que fica na linha abaixo e na coluna à direita.

Ainda o cão (conclusão)

sar de não ser nenhum Ben Johnson, presumo conseguir pelo menos metade (18 km/h) e então o cão terá de fazer 18 × 5,86 = 105 km/h. Impossível: o mamífero mais veloz é a chita que faz 101 km/h (in *Guiness-Book of Records*). Logo, não há cão que me detenha...

2. Se eu fosse mesmo prisioneiro e estivesse mesmo num pátio quadrado, guardado por um cão verdadeiro, ainda havia um outro método muito mais simples e de quase total eficácia. Dava pequenas e vagarosas voltas em torno do ponto H. O cão, dada a sua característica (A'), corria a toda a velocidade à volta do pátio. Obrigava-o assim a dar 6 ou 7 voltas, de 800 metros cada uma. Nessa altura, o cão estaria esfalfado e eu fresco que nem uma alface. Depois, era só uma corridinha de 100 metros: o cão, esgotado, já não tinha forças para me apanhar.

Variante

E se o pátio for circular? Quantas vezes mais depressa tem de correr o cão para que o homem não fuja?

Prolongamento

Ainda no caso do pátio quadrado, qual é realmente a melhor estratégia do cão para evitar a fuga do homem?

As voltas... (continuação)

Caso de figuras «pavimentáveis» com um só tipo de figura

São casos semelhantes aos atrás referidos. Alguns exemplos para este primeiro caso seriam o cálculo do número de triângulos equiláteros existentes num triângulo equilátero (haveria a tentação de fazer a transposição pura e simples para o caso de teatraedros num tetraedro mas aí o problema complica-se, visto o tetraedro não ser «pavimentável» com tetraedros, embora haja abordagens possíveis deste caso), de prismas triangulares regulares em prismas triangulares regulares, etc.

Caso de figuras «pavimentáveis» com dois tipos de figuras

Numa segunda fase poder-se-ia pensar em casos como, por exemplo, o hexágono regular e prisma hexagonal regular que não são «pavimentáveis» com hexágonos regulares e prismas hexagonais regulares respectivamente (por exemplo, no caso do hexágono a «pavimentação» é feita com losangos e hexágonos regulares).

Caso de figuras «curvas»

É um problema já mais complexo. É o caso, por exemplo, de círculos em círculos, esferas em esferas, cilindros em cilindros, esferas em cilindros, etc. Em todos estes casos haveria que definir as regras do jogo, isto é, impor as restrições necessárias de modo a tornar possível a resolução do problema.