A região perdida

António Bernardes, Esc. Sec. Gil Vicente

Descobrir a lei de formação

Uma estratégia útil na resolução de problemas é «descobrir a lei de formação». Ao usarmos esta estratégia, começamos por analisar casos particulares ou versões mais simples do problema e procuramos descobrir a lei ou regra que pode ser aplicada para chegarmos à solução geral.

Recordemos um problema da revista n.º 6, da secção Dia-a-Dia com a Matemática:

«Qual é o número de fósforos necessários para a construção do quadrado de lado 10?»

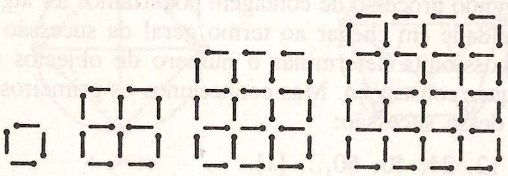

Fig. 1

O estudo dos casos mais simples é o melhor caminho para chegarmos à solução do problema. Contar o número de fósforos nas primeiras construções não oferece grande dificuldade, mas se queremos que essa contagem sirva para descobrirmos a «regra» então há que ter alguma atenção ao modo como a fazemos.

Um processo será por exemplo contarmos, em cada construção, o número de filas de fósforos com o comprimento «igual» ao lado:

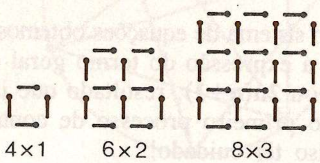

Fig. 2

A organização dos dados obtidos por este processo de contagem pode ser feita na seguinte tabela:

n	f(n)
1	$4 = 1 \times 4 = 1 \times 2 \times 2$
2	$12 = 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 3$
3	$24 = 3 \times 8 = 3 \times 2 \times 4$
4	$40 = 4 \times 10 = 4 \times 2 \times 5$
.	
.	
.	
10	$220 = 10 \times 22 = 10 \times 2 \times 11$

Fig. 3

A análise desta, pode conduzir-nos a uma regra de construção de qualquer das figuras. De facto, o número de fósforos é dado pelo produto da medida do lado pelo número de filas de fósforos (basta contar as filas verticais ou horizontais). Assim, a lei de formação pode ser definida por um polinómio, $\mathbf{n \times 2 \times (n+1)}$, ou seja, $\mathbf{n(2n+2)}$ que, para cada concretização da variável **n**, dá o número de fósdoros para a construção de lado **n**.

Para o quadrado de lado 10 são necessário 220 fósforos.

Mas podemos utilizar outro processo de contagem:

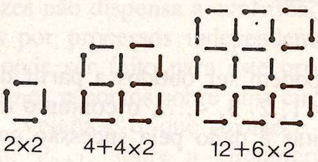

Fig. 4

A figura mostra como é possível construir cada quadrado a partir do quadrado anterior, ou seja, contamos o número de fósforos que é necessário «juntar» a um quadrado para se obter o quadrado seguinte. Tal como anteriormente, podemos organizar as nossas observações numa tabela:

n	f(n)
1	$4 = 2 \times 2$
2	$12 = 4 + 4 \times 2$
3	$24 = 12 + 6 \times 2$
4	$40 = 24 + 8 \times 2$
.	.
.	.
.	.

Fig. 5

Assim, conseguimos descobrir uma lei de formação, agora definida por recorrência:

$$\begin{cases} \mathbf{u(1)=4} \\ \mathbf{u(n+1)=u(n)+4(n+1), \; n \geqslant 1} \end{cases}$$

Definida a regra desta forma, para calcularmos o número de fósforos do quadrado de lado 10, temos de determinar os nove primeiros termos da sucessão definida por recorrência. Pouco prático e bastante monónoto.

Que fazer então?

A Matemática pode dar uma ajuda.

O método das diferenças finitas

Trata-se de uma ferramenta poderosa na resolução de problemas que envolvam sequências de números definidas por um polinómio, das quais se conhecem termos consecutivos. Este método é muito útil, principalmente quando a lei de formação é dada por recorrência, e não é óbvia a sua passagem para termo geral, como no caso da segunda contagem do problema anterior.

Consideremos uma sucessão qualquer:

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

O conjunto das primeiras diferenças finitas é formado pelos termos da sucessão

$a_2-a_1, a_3-a_2, \ldots, a_n-a_{n-1}, \ldots$

O conjunto das segundas diferenças finitas é constituído, analogamente, a partir do conjunto das primeiras diferenças.

Para a sucessão

1, 5, 9, 13,...

cujos termos podem ser obtidos a partir do polinómio $\mathbf{4n-3}$, para $n=1, 2, 3, 4, \ldots$, o conjunto das primeiras diferenças finitas é dado pela sucessão constante

4, 4, 4,...

Não é por acaso que isto acontece. Uma sucessão cujos termos são gerados por um polinómio do 1.º grau do tipo $\mathbf{an+b}$, ou seja,

$a+b, 2a+b, 3a+b, 4a+b, \ldots$

terá sempre o conjunto das primeiras diferenças dado por uma sucessão constante:

a, a, a,...

A constante será o coeficiente real da variável **n**.

A expressão $\mathbf{n^2+n-2}$ gera a sucessão

0, 4, 10, 18, 28,...

Os conjuntos das primeiras e segundas diferenças finitas são formadas, respectivamente pelas sucessões

4, 6, 8, 10,...

e

2, 2, 2,...

Uma sucessão gerada por um polinómio do 2.º grau produzirá sempre uma sucessão constante como conjunto das segundas diferenças finitas. De facto, qualquer polinómio do tipo $\mathbf{an^2+bn+c}$, gera a sucessão

$a+b+c, 4a+2b+c, 9a+3b+c, 16a+4b+c, \ldots$

O conjunto das primeiras diferenças é

$3a+b, 5a+b, 7a+b, \ldots$

e o das segundas

2a, 2a,...

Do mesmo modo, a investigação sobre uma determinada sucessão de números definida por polinómios do 3.º ou 4.º graus, leva-nos a conjuntos das terceiras ou quartas diferenças constituídos por sucessões constantes. E assim sucessivamente...

O método das diferenças finitas baseia-se neste facto e permite, quando uma sucessão origina um conjunto de diferenças constante, descobrir a expressão que a gerou.

Voltemos ao problema dos fósforos. Ao utilizarmos o segundo processo de contagem poderíamos ter alguma dificuldade em chegar ao termo geral da sucessão que nos possibilita determinar o número de objectos para qualquer construção. Mas conhecemos os primeiros termos dessa sucessão:

4, 12, 24, 40, 60,... [1]

Apliquemos então o método das diferenças finitas. Os conjuntos das primeiras e segundas diferenças são formados, respectivamente, pelos termos das sucessões

8, 12, 16, 20,... [2]

e

4, 4, 4,... [3]

A segunda sucessão é constante. Donde, o termo geral da sucessão é definido por um polinómio do 2.º grau. Como determiná-lo?

O primeiro termo de qualquer sucessão de termo geral $\mathbf{an^2+bn+c}$ é, como já vimos, $\mathbf{a+b+c}$, o primeiro das primeiras diferenças é $\mathbf{3a+b}$ e o primeiro termo das segundas diferenças $\mathbf{2a}$.

Para as sucessões [1], [2] e [3], teremos

$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ 3a+b=8 \\ 2a=4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações obtemos $\mathbf{a=2, b=2}$ e $\mathbf{c=0}$. Logo, a expressão do termo geral da sucessão [1] é $\mathbf{2n^2+2n}$ ou $\mathbf{2n(n+1)}$, resultado que já tinha sido atingido com o primeiro processo de contagem.

Mas é preciso ter cuidado!

A região perdida

«Dados 30 pontos de uma circunferência, tracemos todos os segmentos de recta que têm como extremos dois desses pontos. Qual será o número máximo de regiões em que o círculo fica dividido?»

Analisando o problema a partir das situações mais simples, a primeira sensação que se tem é que o número de regiões pode ser obtido com a expressão 2^{n-1}, sendo **n** o número de pontos sobre a circunferência. De facto, para n=1, 2, 3, 4, 5 tudo corre bem:

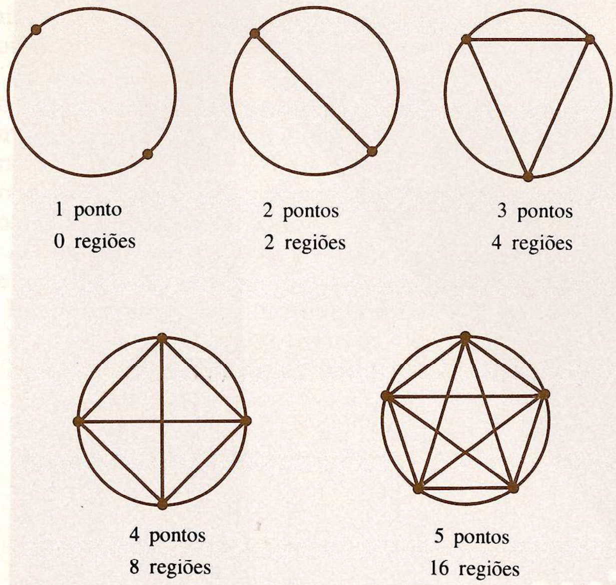

Fig. 6

Uma dúvida surge então:

Foi muito fácil. Será mesmo assim?

Os caminhos da Matemática não têm que ser necessariamente tortuosos e complicados, mas as generalizações apressadas podem ser perigosas.

Consideremos então 6 pontos e contemos as regiões.

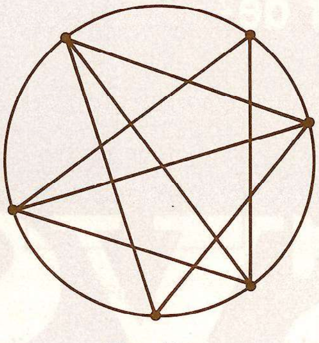

Fig. 7

Uma, duas, três,... trinta e uma! Haverá algum engano? Não, são mesmo 31 regiões.

Abordemos então o problema utilizando o método das diferenças finitas:

n	R(n)	1.as dif.	2.as dif.	3.as dif.	4.as dif.
1	1				
2	2	1			
3	4	2	1		
4	8	4	2	1	
5	16	8	4	2	1
6	31	15	7	3	1
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

Fig. 8

Admitindo que as 4.as diferenças vão ser sempre iguais, o valor seguinte nas 3.as diferenças será 4, 11 nas 2.as e 26 nas 1.as. Para 7 pontos teremos 57 regiões.

E assim sucessivamente... até 30 pontos.

O método leva-nos também a supor que o número de regiões pode ser dado por um polinómio do 4.º grau.

Com mais ou menos trabalho, chegaremos à conclusão que

$$\mathbf{R(n)=(n^4-6n^3+23n^2-18n+24)/24}, \quad [4]$$

em que **R(n)** designa o número de regiões para **n** pontos sobre a circunferência.

Mas a dúvida continua. E se as 4.as difierenças não forem dadas por uma sucessão constante? Estaremos novamente a generalizar apressadamente?

O método das diferenças finitas é simples e poderoso, mas por vezes não dispensa a confirmação dos resultados obtidos por processos independentes. Vamos ver como isso pode ser feito para este problema.

Consideremos **n** pontos sobre uma circunferência (P_1, $P_2, \ldots, P_n$). Vejamos o que acontece se marcarmos outro ponto, P_{n+1}, sobre a circunferência. Quantas novas regiões irão surgir?

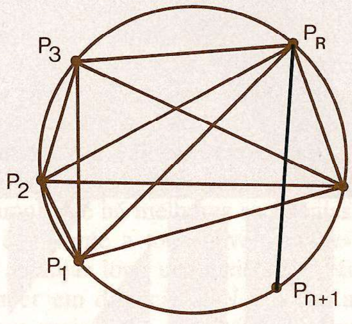

Fig. 9

(Continua na pág. 35)

A importância do problema (conclusão)

Neste momento, dado que, de uma problemática real, emergiu a exigência do cálculo das probabilidades, voltámos às simulações com dados e moedas (já utilizadas na escola primária) para retomar com novos conhecimentos a problemática concreta.

Notas

(1) Em inglês, no original (N. da T.)
(2) Trata-se dos programas italianos (N. da T.)
(3) Trata-se, ainda, dos programas italianos (N. da T.)
(4) Edição crítica de Baldassarre Bonconpagni, Roma, Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche, 185.
(5) Entre outros, podemos citar um problema que diz respeito a pássaros e a uma fonte, a páginas 331-332 e 398-399 no primeiro tomo da edição crítica já referida. Este problema é resolvido, quer pelo método da dupla falsa posição (Catayno), quer por um processo geométrico que utiliza a semelhança de triângulos e o teorema de Pitágoras.
(6) Por exemplo, no tratado de Tommaso della Gazzaia (Mestre de Ábaco) pode ler-se o seguinte problema: «Um pesador do rei utiliza seis pedras de pesos diferentes com que pode pesar de uma a trinta libras». Tommaso demonstra qual é o peso de cada pedra.
(7) Le Matematiche oggi nella società e nella cultura italiana.
(8) Ficamo-nos pela escola média, porque as probabilidades não foram ainda introduzidas oficialmente no currículo da escola secundária superior.

Bibliografia

Boyer, C.B. (1982). *Storia della matematica*. Mondadori editore.

Bunt, L. & al. (1987). *La radici storiche delle Matematiche Elementari*. Zanichelli.

Danzig, T. (1973). *Il numero, linguaggio della scienza*. La Nuova Italia.

Giacardi, L. & Roero, S. (1979). *La matematica delle civiltà arcaiche*. Stampatori Didattica.

Noël, Emile (Ed.) (1987). *Le Matin des Mathématiciens*. Edition Belin, 8.

Quaderni del Centro Studi della Matematica Medievale: Tommaso Della Gazzaia — Pratichą di Geometria e tutte misure di Terre. Dal ms. C. III 23 della Biblioteca comunale di Siena. Transcrizione di Cinzia Nanni, 1982.

Leonardo Eulero. *Elementi di Algebra*. Londra, 1797.

Leonardo Pisano. *Liber Abbaci*. Edizione critica di Baldassarre Boncompagni. Roma: tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857.

A região perdida (conclusão)

Sendo P_k um ponto qualquer, o segmento $[P_{n+1}\ P_k]$ ao intersectar cada uma das cordas já existentes vai determinar novas regiões. Se o segmento intersectar 3 cordas, 4 novas regiões aparecerão.

Resta saber quantas cordas o segmento $[P_{n+1}\ P_k]$ intersecta. Percorrendo a circunferência no sentido dos ponteiros do relógio, $[P_{n+1}\ P_k]$ intersecta qualquer corda que tenha como extremos um dos pontos $P_1,\ldots,$ P_{k-1}, e um dos pontos $P_{k+1},\ldots,$ P_n. Intersectará então $(k-1)\ (n-k)$ cordas, e o número de novas regiões determinadas pelo segmento $[P_{n+1}\ P_k]$ é $(k-1)\ (n-k)+1$.

Como o ponto P_{n+1} pode ser unido a qualquer dos n pontos já existentes o número de novas regiões, **N(n+1)**, será dado por:

$$\mathbf{N(n+1)=\sum_{k=1}^{n} (k-1)\ (n-k)+n,}$$

ou,

$$\mathbf{N(n+1)=(n^3-3n^2+8n)/6}$$

Para n=6, o número de novas regiões que resultam da marcação de P_7 é $N(7)=26$, e $R(7)=57$, confirmando-se assim o resultado anterior.

Mais importante que calcular o número de regiões dados 30 pontos é, sem dúvida, a generalização do problema. Podemos chegar a uma expressão que permita determinar, para qualquer número de pontos, o número de regiões **R(n):**

$$\mathbf{R(n)=1+\sum_{k=1}^{n-1} N(k)=1+\sum_{k=1}^{n-1} (k^3-3k^2+8k)/6,\quad n\geqslant 2}$$

expressão equivalente a [4].

Donde, $R(30)=27841$.

Referências:

Chinn, P. Z. (1988). Inductive Patterns, Finite Differences, and a Missing Region. *Mathematics Teacher*, vol. 81, n.º 6, p. 446-9.

Guillotte, H. P. (19186). The Method of Finite Differences: Some Applications. *Mathematics Teacher*, vol. 79, n.º 6, p. 466-70.

Thompson, A. G. (1985). Developing Students' Matehmatical Thinking. *Arithmetic Teacher*, vol. 33, n.º 1, p. 20-23.