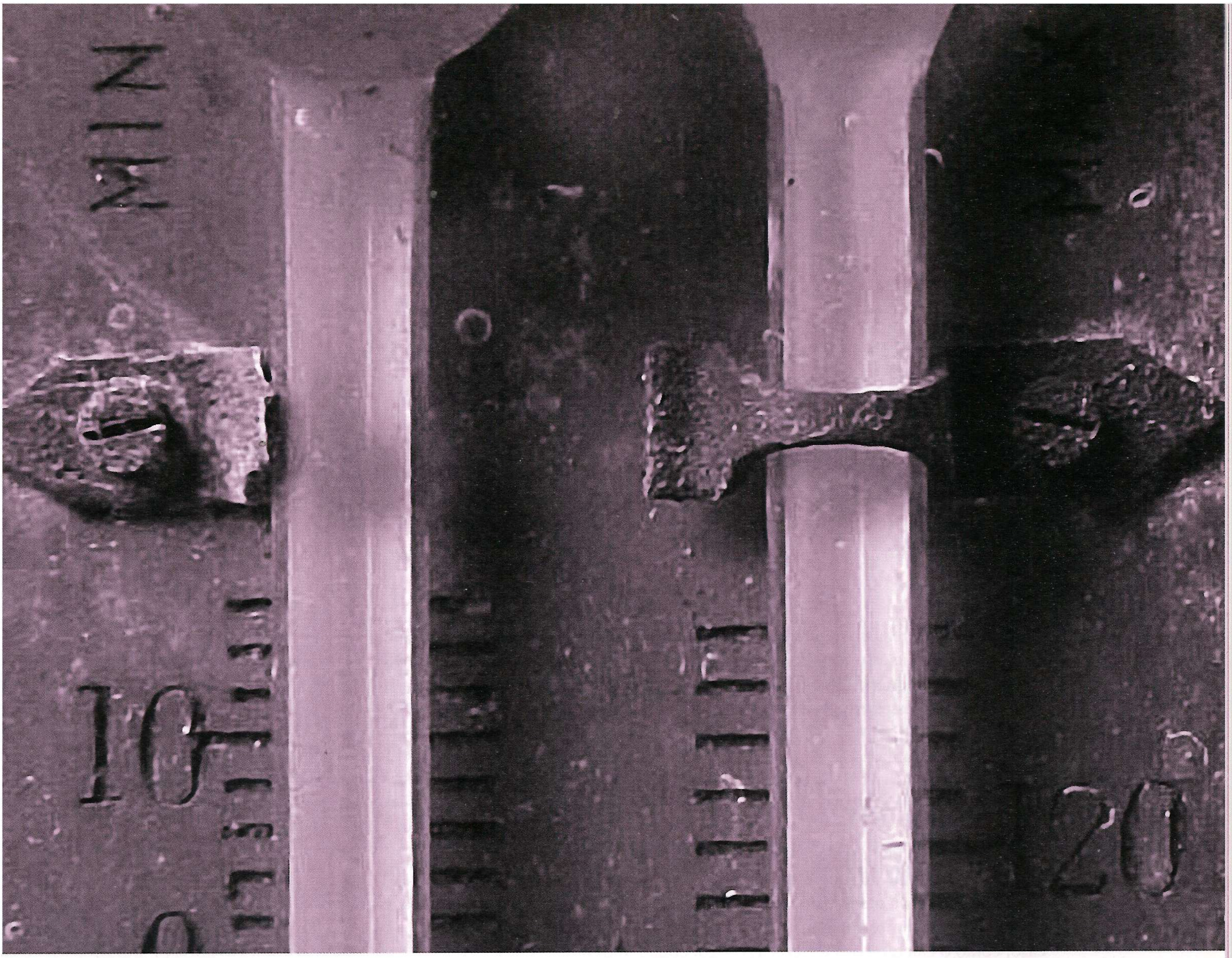

Função modular e escalas termométricas uma proposta de interdisciplinaridade

José Luiz Pastore Mello

Introdução

A relação entre a temperatura na escala termométrica Fahrenheit (T_F) e a temperatura na escala Celsius (T_C) é a dada pela função afim

$$T_C = \frac{T_F - 32}{1,8}.$$

Essa função pode ser facilmente deduzida a partir dos pares ordenados (T_F,T_C) correspondentes às temperaturas de fusão do gelo e de ebulição da água à pressão normal. Esses pares são, respectivamente, (32,0) e (212,100), sendo que a unidade da escala Celsius é representada por °C, e a da escala Fahrenheit por °F.

Devido ao fato da escala Fahrenheit se encontrar em uso corrente nos EUA, e aparecer nas especificações e características de muitos equipamentos, a fórmula de conversão Celsius-Fahrenheit é utilizada com alguma freqüência.

Se por um lado essa fórmula garante uma conversão precisa entre as escalas, por outro ela não é nada prática de ser manipulada através do cálculo mental, o que acaba dificultando a vida de quem viaja para países que utilizam a escala Fahrenheit. Até que o viajante perceba que a melhor estratégia para incorporar o padrão Fahrenheit é simplesmente abandonar sua memória recente da escala Celsius, muitas e muitas contas de conversão acabam sendo feitas.

A proposta deste artigo é a de analisar três fórmulas de conversão entre T_F e T_C que, ao favorecerem o cálculo men-

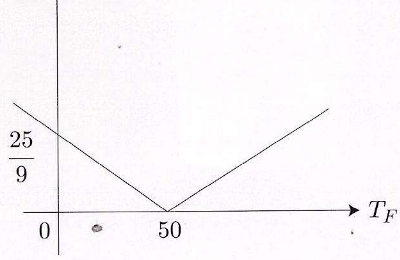

Figura 1.

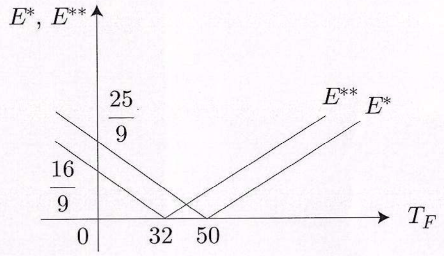

Figura 2.

tal, dispensam o recurso de uma conta armada ou da calculadora. É claro que esse benefício será conquistado ao custo de assumirmos pequenos erros em relação à conversão correta. Avaliaremos esses erros com auxílio do estudo da função modular.

Primeira fórmula:

$$T_C^* = \frac{T_F - 30}{2}$$

Essa fórmula favorece o cálculo mental porque temos apenas que subtrair 30, que é um múltiplo de 10, de T_F e, em seguida, pegar a metade do resultado. Por exemplo, para $T_F = 77$, concluímos rapidamente que $T_C^* = 23{,}5$. Nesse caso, como o cálculo correto seria $T_C = 25$, cometemos um erro de $-1{,}5$°C. Para $T_F = 35{,}6$, temos $T_C^* = 2{,}8$ e $T_C = 2$, o que indica um erro de $+0{,}8$°C.

Uma vez que erros de superestimativa ou de subestimativa da temperatura são desvios da diferença $T_C - T_C^*$ em relação a zero, seja a diferença positiva ou negativa, então é mais adequado que olhemos para o erro absoluto $|T_C - T_C^*|$. Comparando o erro absoluto nos exemplos anteriores, percebemos que a fórmula T_C^* comete um erro menor para a temperatura 35,6°F do que para 77°F. O comportamento do erro absoluto, que chamaremos de E^*, em função de T_F, pode ser assim deduzido:

$$E^* = \left|\frac{T_F - 32}{1,8} - \frac{T_F - 30}{2}\right| \rightarrow E^* = \left|\frac{-10 + 0,2T_F}{3,6}\right|,$$

cujo gráfico está indicado na figura 1.

Para a temperatura de 50°F, que equivale à 10°C, não cometeremos erro algum ao usar T_C^* no lugar de T_C e, para temperaturas próximas desse valor, o erro cometido será pequeno.

Segunda fórmula:

$$T_C^{**} = \frac{T_F - 32}{2}$$

Essa fórmula também favorece o cálculo mental porque trabalha com a divisão por 2, em vez de 1,8, que seria o correto na fórmula T_C. O erro E^{**} cometido por essa nova fórmula é dado por:

$$E^{**} = \left|\frac{T_F - 32}{1,8} - \frac{T_F - 32}{2}\right| \rightarrow E^{**} = \left|\frac{-6,4 + 0,2T_F}{3,6}\right|$$

A figura 2 indica os gráficos de E^* e E^{**} em um mesmo plano cartesiano.

Os gráficos das funções E^* e E^{**} diferem apenas por uma translação.

Observe que E^{**} é zero para $T_F = 32$ (equivalente a 0°C), e pequeno para temperaturas próximas a 32°F.

Além de comparar E^* com E^{**} através dos gráficos, podemos trabalhar também com equações e inequações modulares associadas à situações com significado concreto, como por exemplo:

a) Qual é a temperatura, em Fahrenheit, em que ambas as fórmulas cometem o mesmo erro? (resolve-se a equação modular $E^* = E^{**}$)

b) Quando a primeira fórmula comete um erro menor do que a segunda? (resolve-se a inequação modular $E^* < E^{**}$)

c) Determine a condição para que a primeira fórmula não cometa erros superiores a 1°C. (resolve-se a inequação modular $E^* \leq 1$)

d) Determine os erros que cometeríamos com cada uma das fórmulas no estado de zero absoluto (o zero absoluto é a temperatura mais baixa que se pode atingir, correspondendo ao estado térmico em que as moléculas estão em repouso: aproximadamente -273°C).

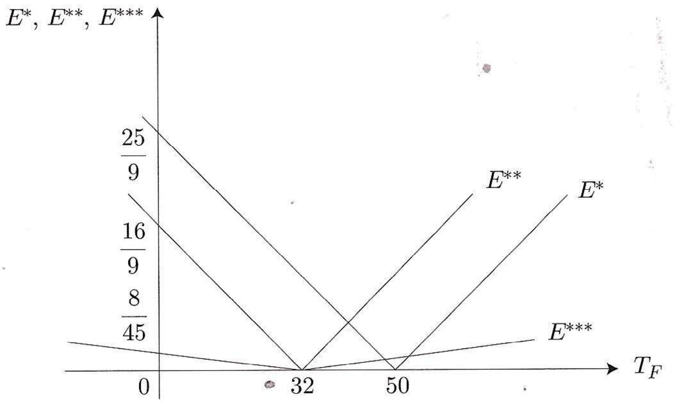

Figura 3.

Sabendo que $E^* < E^{**}$ para $T_F > 41$ (ou $T_C > 5$), e que $E^* > E^{**}$ para $T_F < 41$ (ou $T_C < 5$), sugerimos a seguinte estratégia de escolha entre essas fórmulas em viagens para países de clima temperado que usem a escala Fahrenheit, como por exemplo os EUA: T_C^* é mais adequada na primavera e no verão, onde as temperaturas provavelmente são superiores a 5°C, ao passo que T_C^{**} é mais adequada no outono e no inverno, quando as temperaturas são inferiores a 5°C.

Terceira fórmula:

$$T_C^{***} = \frac{T_F - 32}{2} + 10\% \text{ de } \frac{T_F - 32}{2}$$

A terceira fórmula difere da segunda pelo acréscimo de 10%, o que não compromete significativamente o cálculo mental, já que essa é uma porcentagem simples de calcular.

Apesar de menos prática do que as duas anteriores, a terceira fórmula sempre apresenta aproximação melhor ou igual àquela obtidas por T_C^{**}. Comparando-a com T_C^*, as aproximações obtidas por T_C^{***} só comentem erros maiores em um pequeno intervalo numérico nos arredores de 50°F.

O erro E^{***}, associado ao cálculo de T_C^{***} no lugar de T_C, será dado por:

$$E^{***} = \left| \frac{T_F - 32}{1,8} - 1,1 \cdot \left(\frac{T_F - 32}{2} \right) \right| \rightarrow$$

$$\rightarrow E^{***} = \left| \frac{-0,64 + 0,02T_f}{3,6} \right| .$$

A figura 3 indica os gráficos das funções modulares E^*, E^{**} e E^{***}.

Uma justificativa bastante simples para o fato de T_C^{***} ser uma excelente aproximação para T_C pode ser dada através da seguinte manipulação algébrica:

$$T_C^{***} = 1,1 \cdot \frac{T_F - 32}{2} \rightarrow T_C^{***} = \frac{T_F - 32}{\frac{2}{1,1}} \rightarrow$$

$$\rightarrow T_C^{***} = \frac{T_F - 32}{1,8181\ldots} \approx T_C = \frac{T_F - 32}{1,8}$$

Observando os gráficos da figura 3, e resolvendo a equação modular $E^{***} = E^*$, é fácil verificar que $E^{***} \leq E^{**}$ para qualquer valor de T_F, e que teremos $E^{***} > E^*$ apenas para

$$\frac{532}{11} < T_F < 52,$$

o que corresponde, aproximadamente, ao intervalo entre as temperaturas 9,1°C e 11,1°C. Em relação à esse intervalo, deixo por conta do leitor a verificação de que E^{***} será muito pequeno, variando entre 1/11°C e 1/9°C, e de que o maior erro cometido por E^{***} em relação a E^* será de 0,1°C.

Conclusão

Em viagens para os EUA, se você quiser evitar a fórmula prática T_C^{***} para não ter que calcular porcentagens mentalmente, então use as fórmulas práticas T_C^* na primavera e no verão, e T_C^{**} no outono e no inverno.

Se o cálculo mental com uma porcentagem de 10% não lhe incomoda, então, utilize sempre a fórmula T_C^{***}. Além dela cometer um erro menor ou igual ao cometido por T_C^{**}, só cometerá erros maiores do que os cometidos por T_C^* para temperaturas em torno de 9,1°C à 11,1°C. Nesse intervalo, a maior diferença $E^{***} - E^*$ será de 0,1°C, o que não compromete o uso de T_C^{***} no lugar de T_C^*.

José Luiz Pastore Mello, Colégio Santa Cruz, Brasil