

O Problema do ProfMat 2006

José Paulo Viana

O concurso apresentado aos participantes no ProfMat 2006 de Setúbal consistiu na resolução do problema *Contra-revolução no Principado*:

Após uma revolta popular num minúsculo principado, todos os seus 66 cidadãos, incluindo o príncipe, passaram a ter o mesmo salário: um dinar. O príncipe perdeu o seu direito de voto mas mantém o privilégio de poder pôr à votação novas propostas de redistribuição dos salários. As propostas serão aprovadas por maioria simples (mais votos a favor do que contra). Contudo, o total da verba destinada aos salários deve continuar a ser de 66 dinares e o salário de cada cidadão tem de ser um número inteiro. O príncipe apercebeu-se que, dada uma proposta, a decisão de cada pessoa seria: votar a favor se com isso aumentasse o seu próprio salário, votar contra se diminuísse, abster-se caso o seu salário não se alterasse.

Se o príncipe for inteligente e egoísta, qual será o salário máximo que conseguirá que seja aprovado para si próprio? E qual é o mínimo de propostas que é necessário levar a votação para que isso aconteça?

Apareceram diversas resoluções mostrando que vão ser precisas 7 votações para, no final, o príncipe ficar a ganhar 63 dinares. Nas melhores, os salários intermédios do príncipe são também os maiores possíveis.

O Eduardo Cunha faz algumas considerações estratégicas antes de começar:

- Para uma proposta ser aprovada, terá de aumentar o salário a mais um cidadão do que aqueles a quem diminuir.
- Para aprovar a primeira proposta, o príncipe terá de prescindir do seu salário.
- Em cada proposta, o número de cidadãos com salário nulo será o maior possível e os que votarem a favor terão o mínimo de salário necessário para tal.

Eis agora, com algumas simplificações, a solução mais apresentada:

1ª Votação

33 cidadãos passam a ganhar 2 dinares, 32 cidadãos e o príncipe deixam de ter salário. Aprovada com 33 votos a favor e 32 contra.

2ª Votação

Dos 33 cidadãos com 2 dinares de salário, 17 passam a ganhar 3 dinares e os outros 16 perdem o salário. O príncipe fica com 15 dinares. Aprovada com 17 votos a favor e 16 contra.

3ª Votação

Dos 17 cidadãos com salário, 9 passam a ganhar 4 dinares e os outros 8 perdem o salário. O príncipe passa a receber 30 dinares. Aprovada com 9 votos a favor e 8 contra.

4ª Votação

Dos 9 cidadãos com salário, 5 passam a ganhar 5 dinares e os outros 4 perdem o salário. O príncipe passa a receber 41 dinares. Aprovada com 5 votos a favor e 4 contra.

5ª Votação

Dos 5 cidadãos com salário, 3 passam a ganhar 6 dinares e os outros 2 perdem o salário. O príncipe passa a receber 48 dinares. Aprovada com 3 votos a favor e 2 contra.

6ª Votação

Dos 3 cidadãos com salário, 2 passam a ganhar 7 dinares e o outro perde o salário. O príncipe passa a receber 52 dinares. Aprovada com 2 votos a favor e 1 contra.

7ª Votação

Os dois cidadãos com salário deixam de o ganhar e 3 que não tinham salário passam a receber 1 dinar. O príncipe passa a ganhar 63 dinares. Aprovada com 3 votos a favor e 2 contra.

O Eduardo Cunha e o Francisco Estorninho demonstram que o salário máximo do príncipe é 63 através da análise exaustiva dos casos de salário superior.

A Sara Cravo apresenta a sua resposta na forma de notícia no jornal *Correio do Príncipe*.

Um dos motivos por que gostamos deste problema é que, dadas as suas implicações sociais e políticas, suscita uma série de comentários:

[É preciso] uma contra-contra-revolução que dê direito de voto ao príncipe e lhe retire o direito a apresentar propostas. (Darcília Machado)

E viveu feliz quase para sempre... (até o povo descobrir uma forma de virar a situação). (Ana Paulino)

E viveu feliz quase para sempre... bem... não é bem assim, porque um mês depois o povo expulsou-o. (Francisco Estorninho)

Neste problema se nota como a estupidez do conformismo dos cidadãos leva à sua desgraça! (Isabel Viana)

[Muita gente] só opta por ir votar quando dessa votação pode resultar um benefício ou um prejuízo para o próprio. Caso contrário, abstém-se, por o problema ser dos outros. (...) Quando nos tiram tudo ficamos contra mas, se depois nos derem uma migalha daquilo que já foi nosso, ficamos a favor. Há também os que não se importam que tirem tudo aos outros desde que lhes dêem algo a si. (Iva & Nuno Angelino)

O Francisco Estorninho sugere que as três pessoas que ficaram com salário foram o matemático [que ajudou o príncipe nas propostas], o contabilista do saco azul e o cabeleireiro/manicure/pedicure.

José Paulo Viana, Esc. Sec. Vergílio Ferreira

Lista de participantes

Individuais: Ana Paulino, Darcília Machado, Eduardo Cunha, Fernando Manuel Pessoa, Francisco Estorninho, João Manuel Nogueira, Isabel Viana, Manuel Atalaia, Mária Correia de Almeida, Nuno Nascimento, Sara Cravo, Tânia Reis, Vanda Coelho.

Em equipa: Daniel Castanho e Sandra Neves, Iva & Nuno Angelino.

Premiados e prémios

- 1º. Francisco Estorninho, *Calculadora Gráfica TI84 PSE + TI Smartview*, oferta Texas Instruments
- 2º. Nuno Nascimento, *Calculadora Casio VI-9850GB P com Interface TV*, oferta Beltrão Coelho
- 3º. Tânia Reis, *Calculadora Gráfica Casio fx-9860G*, oferta Beltrão Coelho
- 4º. Isabel Viana, *Jogo DIS X*, oferta AFR
- 5º. Eduardo Cunha, *Livro e: História de um Número*, de Eli Maor, oferta Gradiva
- 6º. Iva & Nuno Angelino, *Livro Desastre no Ensino da Matemática*, oferta Gradiva

Atenção: Os prémios devem ser levantados até 30 de Julho de 2007. Por favor, contactar a sede da APM em Lisboa.

Materiais para a aula de Matemática

A actividade que a seguir se apresenta, com outra formulação, foi concebida inicialmente como uma actividade para ser explorada com alunos do 11º Ano de Métodos Quantitativos da Escola Secundária António Arroio, no ano lectivo de 2000-2001. No entanto, ela poderá ser utilizada com alunos do 9º ano pois apenas requer conhecimentos básicos de trigonometria.

Quais os tamanhos da Terra, Sol e Lua? Quais as distâncias da Terra ao Sol e à Lua? Poucos sabem hoje como eram feitos esses cálculos na antiguidade. O objectivo desta tarefa, *Qual o astro mais distante da Terra: O Sol ou a Lua?*, é relacionar aspectos da História da Matemática com conteúdos fundamentais da Geometria e Trigonometria, privilegiando a interdisciplinaridade.

Ana Paula Figueiredo Silva, Escola Secundária da Amora