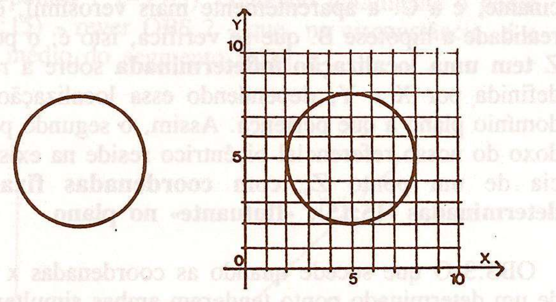
As mais belas rectas do mundo

Fernando Bensabat, E. Secundária Sebastião e Silva

Como professor do 5.º grupo do Ensino Secundário — área das chamadas Artes Visuais — tive recentemente necessidade de explorar mais detalhadamente uma rubrica do programa da disciplina de Teoria de Design, intitulada «Métodos de Desenho». Apesar da designação, estes Métodos de Desenho não são mais que processos controlados, que recorrendo a um encadeamento de operações de carácter gráfico ou geométrico, visam alterar formas previamente definidas. Assim, por exemplo, a texturização de superfícies, de natureza acentuadamente gráfica, transforma profundamente a qualidade perceptiva dos objectos.

Contudo, para além da simples utilização de grafismos, há nos Métodos de Desenho outros processos mais aliciantes - refiro-me às operações de simetria (translações, rotações, simetrias central e axial) e, sobretudo, a um método que desde logo me fascinou: **Alteração da Malha Geradora**. No âmbito das geometrias alternativas, que assentam em axiomáticas não-euclideanas, este método parece abrir interessantes perspectivas no domínio da organização métrica do plano, pelo que passarei a expor uma das suas inúmeras possibilidades.

Chamo **malha geradora** (fig. 1) a uma estrutura linear constituída por linhas referenciais que servem de suporte a uma dada forma e que permite transitar do plano da expressão para o plano da compreensão. Chamo «compreensão de uma forma» à intuição racional das suas características qualitativas e quantitativas.



Expressão — Compreensão

Fig. 1

A malha geradora mais óbvia e conveniente corresponde, naturalmente, ao referencial cartesiano ortonormado. Que acontecerá, no entanto, se o modificarmos qualitativamente?

Seja o referencial cartesiano ortonormado. Chamo «linhas de referência das abcissas» a todas as rectas de abcissa constante, ou seja, a todas as rectas verticais. Do mesmo modo, chamo «linhas de referência das ordenadas» a todas as rectas de ordenada constante, isto é, a todas as rectas horizontais. Desta forma, podemos considerar que o plano cartesiano é resultante da intersecção de dois feixes ortogonais de rectas paralelas. As linhas de referência das abcissas intersectam-se num ponto impróprio do plano, situado a uma distância não finita da origem das coordenadas, a que chamarei ponto X; as linhas de referência das ordenadas irão igualmente intersectar-se num ponto impróprio do plano, que designarei por Y.

Localizemos agora esses pontos X e Y a uma distância finita da origem das coordenadas. Sejam X e Y os pontos médios de dois lados consecutivos de um quadrado com 10 de lado, com lados horizontais e verticais e com um vértice na origem das coordenadas (fig.2).

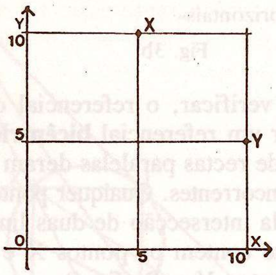
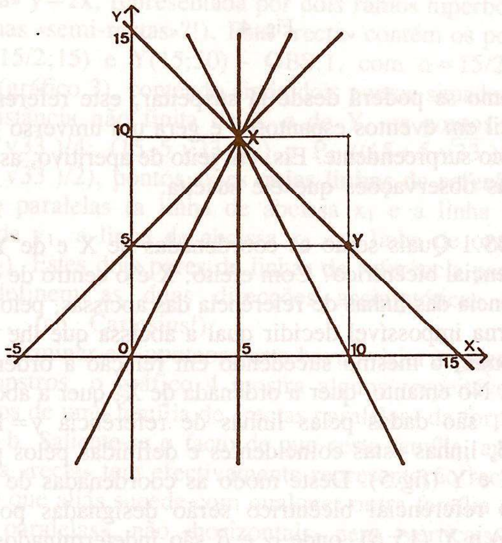


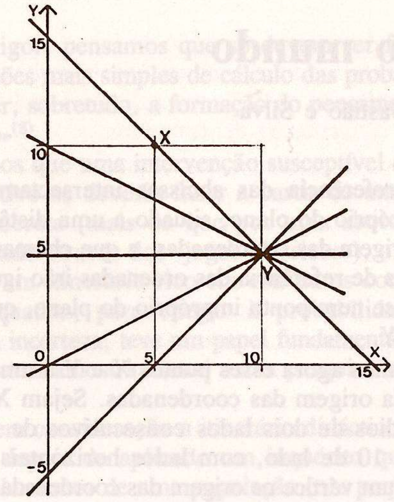
Fig. 2

Tal como foi atrás mencionado, as linhas de referência das abcissas intersectam-se em X, do mesmo modo que as linhas de referência das ordenadas se intersectarão em Y (fig. 3a e 3b).



Linhas de referência das abcissas ou linhas de abcissa constante ou «Rectas Verticais»

Fig. 3 a



Linhas de referência das ordenadas ou linhas de ordenada constante ou «Rectas Horizontais»

Fig. 3b

Como se pode verificar, o referencial ortonormado foi substituído por um referencial **bicêntrico** e os dois feixes ortogonais de rectas paralelas deram lugar a dois feixes de rectas concorrentes. Qualquer ponto P do plano ficará definido pela intersecção de duas linhas de referência: a recta que contém os pontos X e P e a recta que contêm os pontos Y e P (fig.4).

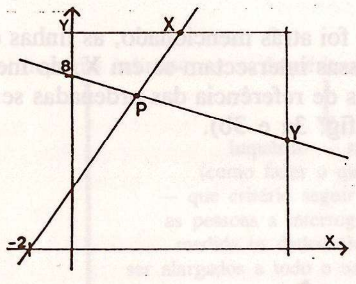


Fig. 4

Como se poderá desde já suspeitar, este referencial é fértil em eventos espantosos e gera um universo geométrico surpreendente. Eis, em jeito de aperitivo, as primeiras observações que ele suscita:

OBS.1 Quais serão as coordenadas de X e de Y no referencial bicêntrico? Com efeito, X é o centro de convergência das linhas de referência das abcissas, pelo que se torna impossível decidir qual a abcissa que lhe corresponde, o mesmo sucedendo em relação à ordenada de Y. No entanto, quer a ordenada de X, quer a abcissa de Y, são dadas pelas linhas de referência $y=15$ e $x=15$, linhas estas coincidentes e definidas pelos pontos X e Y (fig.5). Deste modo as coordenadas de X e Y no referencial bicêntrico serão designadas por X (α;15) e Y (15;β), onde α e β são indeterminados. O primeiro paradoxo deste referencial, consiste no facto de dois **pontos de localização fixa e determinada do plano terem coordenadas «flutuantes»**, já que as coordenadas α e β estarão dependentes do domínio plano em que X e Y estejam contidos.

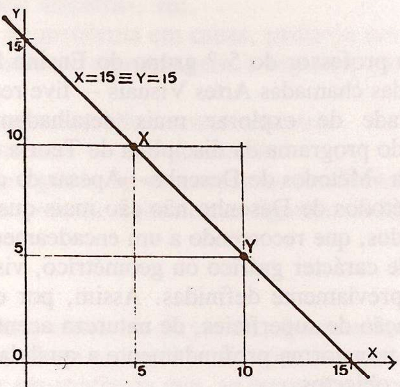


Fig. 5

OBS.2 Como consequência imediata da observação anterior, surge uma outra questão embaraçosa: onde se encontra localizado o ponto Z(15;15) no referencial bicêntrico? Três situações alternativas poderão ser consideradas:

A. o ponto Z(15;15) **é a própria recta que une X e Y**, domínio plano resultante da intersecção das linhas de referência $x=15$ e $y=15$ (rectas coincidentes);

B. o ponto Z(15;15) **não existe** no plano ordenado pelo referencial bicêntrico ou, pelo menos, **tem uma localização indeterminada**;

C. o ponto Z(15;15) **é um ponto determinado** situado algures sobre a recta definida pelos pontos X e Y.

Embora a hipótese A. seja, sem dúvida, a mais fascinante, e a C. a aparentemente mais verosímil, é na realidade a hipótese B. que se verifica, isto é: o ponto Z **tem uma localização indeterminada** sobre a recta definida por X e Y, dependendo essa localização do domínio plano a que pertença. Assim, o segundo paradoxo do nosso referencial bicêntrico reside na existência de um ponto Z, **com coordenadas fixas e determinadas (15;15), «flutuante» no plano**.

OBS.3 O que sucede quando as coordenadas x e y de um determinado ponto tenderem ambas simultaneamente para infinito, independentemente do seu sinal? Obviamente, a linha de referência das abcissas torna-se paralela ao primitivo eixo das abcissas, o mesmo sucedendo à linha de referência das ordenadas, que se torna paralela ao primitivo eixo das ordenadas (fig.6). As duas linhas de referência mencionadas intersectam-se no ponto I, cujas coordenadas, por esse facto, são ambas ∞, sem sinal determinado. Temos, assim, **a uma distância finita dos pontos X e Y, um ponto de coordenadas não finitas!** Terceiro paradoxo... ou o infinito mesmo à mão de semear?

Após estas primeiras observações - que normalmente deveriam suscitar um apreciável acréscimo na produção de adrenalina... - irei procurar mostrar alguns dos surpreendentes resultados obtidos na representação gráfica de funções lineares neste referencial.

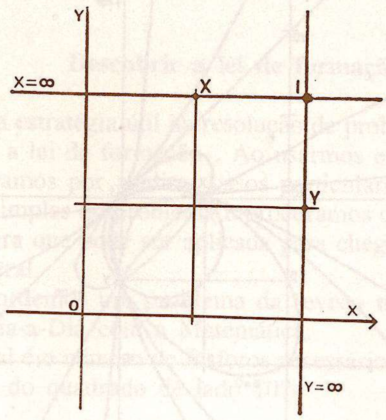


Fig. 6

Sejam então as rectas dadas na forma $y=mx+b$ e representemos no referencial bicêntrico as bissectrizes dos quadrantes ímpares e pares, respectivamente $y=x$ e $y=-x$.

Como podemos observar no gráfico 1, as duas «rectas» apresentam configurações diferentes: ao passo que a «recta» $y=x$ mantém (orgulhosa) a sua representação rectilínea, a «recta» $y=-x$ tem uma sedutora representação elíptica. Trata-se de duas «rectas perpendiculares» **que se intersectam em dois pontos**: o ponto O (0;0) e o ponto I (∞;∞). Refira-se que a «recta» $y=x$ tem um ponto localizado a uma distância não finita de X e Y, o «ponto» P (–5;–5), contendo igualmente o ponto Z (15;15) - rever OBS.2 - que, na circunstância, é o ponto médio do segmento [XY].

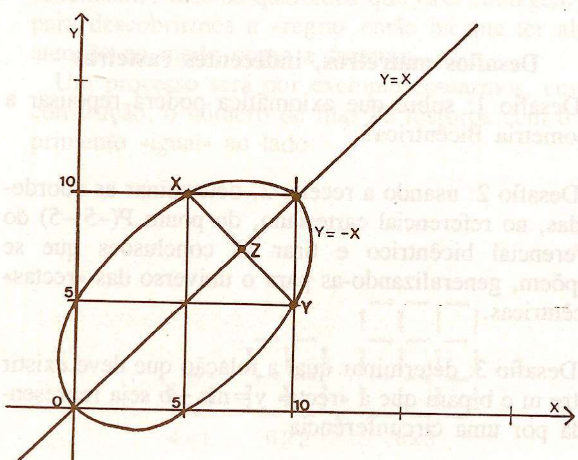


Gráfico 1

Note-se ainda que a «recta» $y=-x$ contém os pontos X e Y cujas coordenadas são, por tal motivo, X(–15;15) e Y(15;–15): $\alpha=\beta=-15$ — rever OBS. 1.

Sejam agora as duas «rectas paralelas» $y=-x+10$ e $y=-x+30$. Como facilmente se verifica no gráfico 2, a «recta» $y=-x+10$ tem uma representação circular, contendo os pontos X(–5;15) e Y(15;–5) - OBS.1 com $\alpha=\beta=-5$. A segunda «recta», com uma representação rectilínea, contém o tão enigmático ponto Z(15;15), desta feita situado **a uma distância não finita de X e de Y**. As duas «rectas paralelas» intersectam-se no ponto I(∞;∞), como aliás convém a duas paralelas que se prezem…

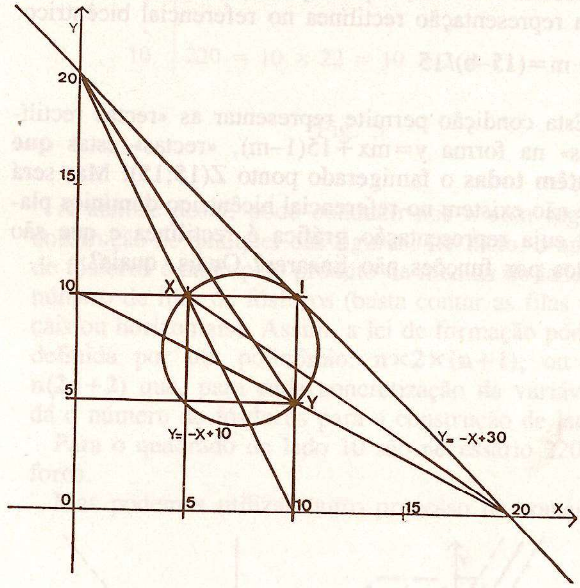


Gráfico 2

Surge-nos finalmente um exemplar mais sofisticado, a «recta» $y=2x$, representada por dois ramos hiperbólicos (duas «semi-rectas»?!). Esta «recta» contém os pontos X(15/2;15) e Y(15;30) - OBS.1, com $\alpha=15/2$ e $\beta=30$ (gráfico 3), contendo ainda dois pontos situados a uma distância não finita de X e de Y, os pontos P_1 $((15-5\sqrt{33})/4;\ (15-5\sqrt{33})/2)$ e P_2 $((15+5\sqrt{33})/4;\ (15+5\sqrt{33})/2)$, pontos esses **cujas linhas de referência são paralelas** (a linha de abcissa x_1 e a linha de ordenada y_1, a linha de abcissa x_2 e a linha de ordenada y_2). Estes dois pares de linhas de referência paralelas definem as duas direcções assimptóticas da «recta»… (ah, Cartesius!).

Para terminar em apoteose esta breve visita à galeria dos monstros, o gráfico 4 mostra alguns respeitáveis membros de uma família de «rectas paralelas» da forma $y=-x+b$. Saliente-se o facto de que nesta família, apenas uma «recta» tem efectivamente representação rectilínea, o que aliás sucede com qualquer outra família de «rectas paralelas», não «horizontais» nem «verticais».

Em jeito de conclusão desta viagem aventureira às terras da «rectolândia bicêntrica», gostaria de deixar como bónus algumas receitas utilitárias, bem como os inevitáveis desafios aos mais temerários.

«Receitas da Avó»

Receita 1: coordenadas α e β, no referencial bicêntrico, de um ponto P(x;y) do referencial cartesiano ortonormado:

- $\alpha=(10x-5y)/(10-y)$
- $\beta=(10y-5x)/(10-x)$

Receita 2: coordenadas, no referencial cartesiano ortonormado, de um ponto P(α;β) do referencial bicêntrico:

- $x=(100\alpha+50\beta-10\alpha\beta)/(75+5\alpha+5\beta-\alpha\beta)$
- $y=(50\alpha+100\beta-10\alpha\beta)/(75+5\alpha+5\beta-\alpha\beta)$

Receita 3: condição para que a recta $y=mx+b$ tenha uma representação rectilínea no referencial bicêntrico:

- $m=(15-b)/15$

Esta condição permite representar as «rectas rectilíneas» na forma $y=mx+15(1-m)$, «rectas» estas **que contêm todas** o famigerado ponto Z(15;15)! Mas será que não existem no referencial bicêntrico domínios planos cuja representação gráfica é rectilínea e que são dados por funções não lineares? Quais, quais?

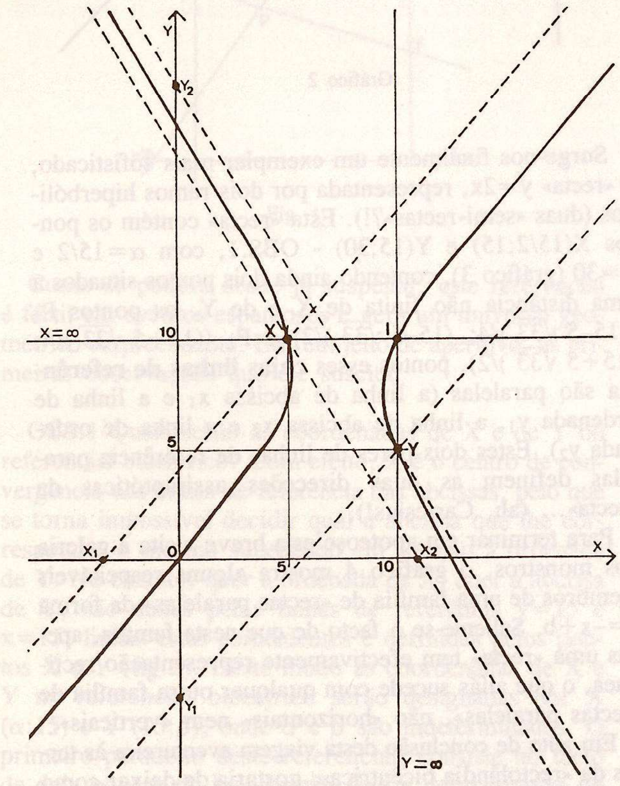


Gráfico 3

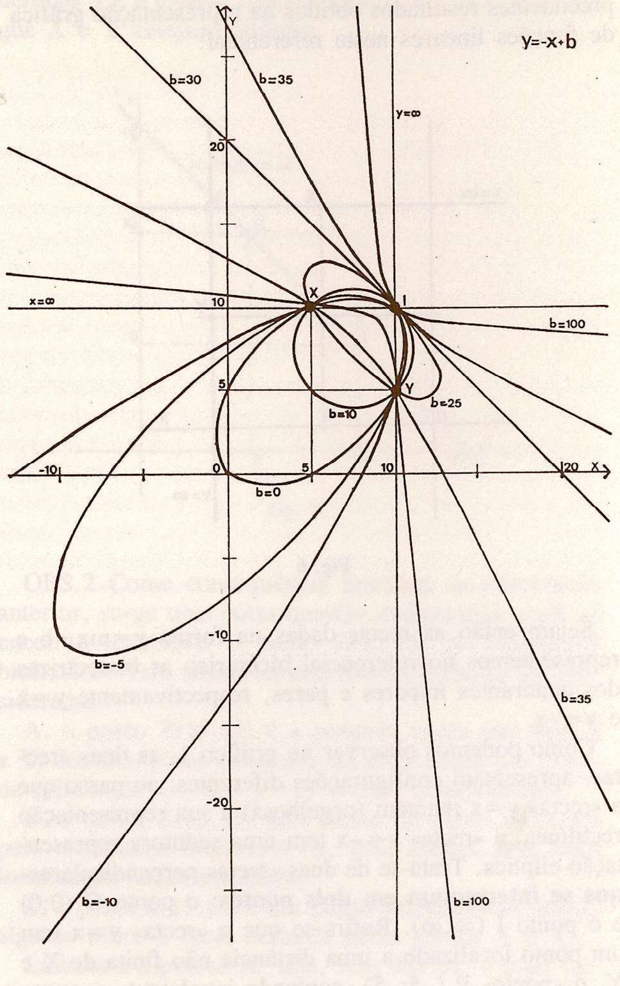


Gráfico 4

Desafios matreiros, indecentes rasteiras

Desafio 1: sobre que axiomática poderá repousar a Geometria Bicêntrica?

Desafio 2: usando a receita 2, determinar as coordenadas, no referencial cartesiano, do ponto P(–5;–5) do referencial bicêntrico e tirar as conclusões que se impõem, generalizando-as para o universo das «rectas» bicêntricas.

Desafio 3: determinar qual a relação que deve existir entre m e b para que a «recta» $y=mx+b$ seja representada por uma circunferência.

Desafio 4: resolver os desafios 1, 2 e 3!

!selpmis saim a é erpmes men asse ,atcer ed otnemges mu ed otnemirpmoc olep adad ajes sotnop siod ertne aicnâtsid atruc siam a arobmE
(Quando se muda de referencial...)