O artigo seleccionado para este número é de Yuri Grabovsky. O autor mostra como as fracções continuadas explicam os sistemas de calendário. A publicação desta tradução foi autorizada pelo autor. No seu site encontram-se as versões originais em html e pdf: `http://www.math.temple.edu/~yury/calendar/`.

Calendários modernos e fracções continuadas

Yury Grabovsky
Departamento de Matemática, Temple University
`yury@temple.edu`

1. História muito breve

Actualmente existem muitos calendários em uso: hebreu, chinês, hindu, etíope, etc.. Estes diversos sistemas parecem completamente artificiais, puro produto da escolha arbitrária do homem, como a linguagem. Contudo, na base de todos os calendários está a observação do movimento periódico do Sol e da Lua através dos céus. Eis os números. Um ano é $365{,}24219878$ dias e um mês lunar dura $29{,}530589$ dias. O quociente destes dois números é $12{,}368267$, igual ao número de lunações de um ano. Assim, percebe-se que o mês lunar dure entre 29 e 30 dias e que existam cerca de 12 meses lunares num ano. O mais antigo calendário babilónico era lunar, com 12 meses de 29 e 30 dias alternadamente, em acordo com estes números. Note-se que num tal calendário lunar o ano contém apenas 354 dias, uma subestimativa grosseira. Porém, por volta do quinto milénio a.C., pelo menos, este calendário foi substituído por um calendário egípcio de 12 meses, cada um com 30 dias.

Neste calendário, o ano possuía somente 360 dias e a discrepância foi reconhecida sem demora. Para o ajustar foram adicionados 5 dias, os epagómenos, no final do ano de 360 dias. Este calendário esteve em vigor durante mais de 3000 anos de Faraós, até 238 a.C.. O notável Decreto de Canopo, de Ptolomeu III, introduziu um sexto dia epagómeno de quatro em quatro anos. Denomina-se calendário de Alexandria e sobrevive nos dias de hoje nos calendários das igrejas Copta e Etíope.

O nosso calendário descende directamente do antigo calendário romano. Até 46 a.C. os romanos usavam o calendário de 365 dias. Durante a campanha no Egipto, Júlio César ficou a conhecer o calendário de Alexandria, com um ano bissexto por cada ciclo de quatro anos, muito mais rigoroso do que o calendário romano em vigor, de 365 dias. César trouxe consigo de Alexandria o astrónomo Sosígenes, em cujos conselhos baseou a reforma do calendário, criando o calendário juliano. A duração média do ano neste calendário é de $365{,}25$ dias, que é muito próxima do número mais exacto de $365{,}24219878$. O calendário juliano era tão bom que acumulava apenas um erro de 1 dia em cerca de 100 anos. Mesmo assim, durante o milénio seguinte a discrepância foi reconhecida e deram-se sugestões para a corrigir. Finalmente, em 1582, o Papa Gregório XIII reuniu uma comissão para planear um novo e mais rigoroso sistema de calendário. O principal autor deste novo sistema foi o astrónomo napolitano Aloysius Lilius. Seguindo as recomendações desta comissão, o Papa Gregório XIII decretou que o dia seguinte a 4 de Outubro de 1582 fosse 15 de Outubro, que os anos terminados em "00" fossem anos comuns em vez de bissextos — excepto os divisíveis por 400 — e que o Ano Novo começasse em 1 de Janeiro. O mundo não católico entendeu o decreto do calendário como uma usurpação católica. Foram necessários quase 200 anos para se operar a mudança. A Grã-Bretanha e as suas colónias efectuaram a alteração em 1752, seguindo-se a 2 de Setembro o dia 14 de Setembro e o dia de Ano Novo transitou de 25 de Março para 1 de Janeiro.

Se o seu computador possuir um programa de calendário que apresente os calendários de 1582 e 1752, poderá verificar-lhe a fé religiosa. Por exemplo, no meu sistema Linux os resultados são

```
    October 1582            September 1752
Su Mo Tu We Th Fr Sa     Su Mo Tu We Th Fr Sa
    1  2  3  4  5  6            1  2 14 15 16
 7  8  9 10 11 12 13     17 18 19 20 21 22 23
14 15 16 17 18 19 20     24 25 26 27 28 29 30
21 22 23 24 25 26 27
28 29 30 31
```

tornando o meu computador protestante!

O ano 2000 é um dos raros anos bissextos que terminam em "00". Isso só voltará a suceder 400 anos depois. O calendário gregoriano tanto é rigoroso (erro de 1 dia em cerca de 3300 anos) como cómodo. Será arte alcançar um tal esquema ou existe ciência por detrás? As fracções continuadas fornecem precisamente essa ciência.

2. Fracções continuadas

A história das fracções continuadas remonta ao algoritmo de Euclides. Recordemo-lo. Suponhamos que queríamos determinar o máximo divisor comum dos números 75 e 33.

$$75 = 2 \cdot 33 + 9 \qquad \frac{75}{33} = 2 + \frac{9}{33}$$

$$33 = 3 \cdot 9 + 6 \qquad \frac{75}{33} = 2 + \frac{9}{3 \cdot 9 + 6} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{6}{9}}$$

$$9 = 1 \cdot 6 + 3 \qquad \frac{75}{33} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{6}{1 \cdot 6 + 3}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{6}}}$$

$$6 = 2 \cdot 3 \qquad \frac{75}{33} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{2 \cdot 3}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$$

O último resto não nulo, no nosso caso 3, é o máximo divisor comum de 75 e 33. Contudo, não existem provas de que os gregos conhecessem a ligação entre as colunas acima, da esquerda e da direita. A primeira fracção continuada foi usada em 1572 por Bombelli para aproximar $\sqrt{13}$. A primeira fracção continuada infinita surge em 1659 na obra de Lord Brouncker, para expandir $4/\pi$. Foi o desenvolvimento sistemático da teoria por Euler, iniciado em 1737, que mostrou o valor do conceito tanto para a teoria de números como para a análise. Seguiu-se uma torrente de resultados. Nos séculos XVIII e XIX todos os que eram alguém na matemática deram o seu contributo. Se o número for racional, a fracção continuada termina, como em $75/33$. Se o número for irracional a fracção continuada continua infinitamente. Por exemplo, para o número irracional $\sqrt{2}$ podemos executar o algoritmo de Euclides, no fundo como se procurássemos o máximo divisor comum de $\sqrt{2}$ e 1. O algoritmo nunca irá terminar, dado que os números são incomensuráveis.

$$\sqrt{2} = 1 + 0.41421356\ldots = 1 + \frac{1}{2.41421356\ldots} =$$

$$1 + \frac{1}{2 + 0.41421356\ldots} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 0.41421356\ldots}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 0.41421356\ldots}}} = \ldots$$

concluindo

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

A beleza estética das fracções continuadas pode até derivar para a justificação do significado de alguns números da álgebra ou geometria. A expansão

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

poderia sugerir que o número $\tau = (1+\sqrt{5})/2$ tem algum significado. De facto, este número não é mais nem menos do que a *razão áurea*.

Se terminarmos a fracção continuada infinita do número irracional α no passo n, iremos obter uma aproximação racional α_n de α. Ao número racional α_n chama-se o enésimo convergente de α. Por exemplo, os primeiros quatro convergentes dos números $\sqrt{2}$ e π são

$$\alpha = \sqrt{2} = 1.41421356\ldots \qquad \pi = 3.141592654\ldots$$

$$\alpha_0 = 1 \qquad \pi_0 = 3$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \qquad \pi_1 = \frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$$

$$\alpha_2 = \frac{7}{5} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} \qquad \pi_2 = \frac{333}{106} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}}$$

$$\alpha_3 = \frac{17}{12} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} \qquad \pi_3 = \frac{355}{113} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}}$$

$$\alpha_4 = \frac{41}{29} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} \qquad \pi_4 = \frac{103993}{33102} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292}}}}$$

O nome convergente provém do facto destes convergirem efectivamente para o número. Por exemplo,

$$\alpha - \alpha_4 \approx 4.2 \times 10^{-4} \qquad \pi - \pi_4 \approx 5.8 \times 10^{-10}$$

No gráfico relativo a $\sqrt{2}$, verifica-se que os convergentes se situam alternadamente acima e abaixo do valor exacto de $\sqrt{2}$ (ver gráfico 1).

No gráfico relativo a π, observa-se o mesmo padrão de aproximação (ver gráfico 2). Com efeito, isto é válido para qualquer número.

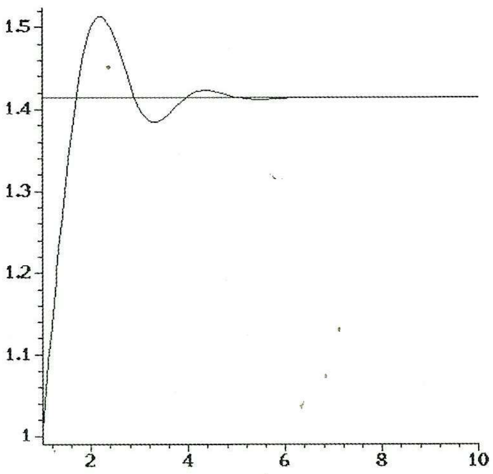

Gráfico 1.

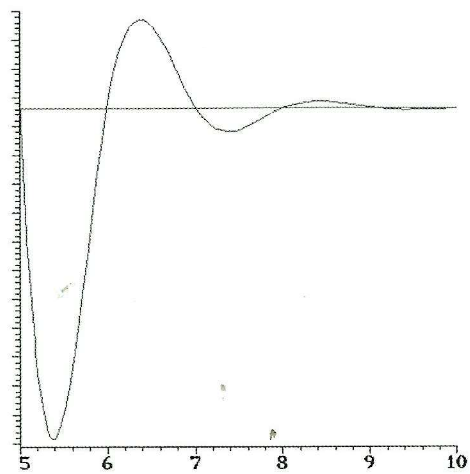

Gráfico 2.

A rapidez de convergência das fracções continuadas para o número que representam varia de número para número (mas é sempre muitíssimo grande). Eis uma comparação entre os erros de convergência para $\sqrt{2}$ (verde) e π. (Ver gráfico 3.)

As expansões em fracções continuadas têm muitas propriedades notáveis. Estamos interessados principalmente no seu poder de aproximação, pertinente para planear um bom sistema de calendário. Sucede que os convergentes α_n para o número irracional α apresentam propriedades superiores de aproximação. De seguida define-se rigorosamente o que se entende por uma boa aproximação.

Definição 1. *A fracção p/q diz-se uma boa aproximação de α se para qualquer $q' < q$ e qualquer inteiro p' se tem*

$$|q\alpha - p| < |q'\alpha - p'|.$$

As boas aproximações de $\sqrt{2}$ ocorrem quando $q = 2, 5, 12$ e 29. A boa aproximação seguinte ocorre quando $q = 70$. (Ver gráfico 4.)

As boas aproximações de π ocorrem quando $q = 7$, 106 e 113. A boa aproximação seguinte não ocorre antes de $q = 33102$ (ver gráfico 5).

Note-se que os números q são precisamente os denominadores dos convergentes para $\sqrt{2}$ e π, respectivamente. Não se trata de um acaso e verifica-se de modo geral para todos os convergentes e para todos os números α. Afirme-mo-lo rigorosamente e sem ambiguidades sob a forma de um teorema.

Teorema. *Todo o convergente é uma boa aproximação (no sentido da definição 1) de α e, inversamente, toda a boa aproximação de α é um dos números α_n, para algum $n \geq 1$. Com efeito, q_n é o menor inteiro $q > q_{n-1}$ tal que*

$$|q\alpha - p| < |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$$

para um inteiro p.

Tem-se também as desigualdades

$$\frac{1}{2q_{n+1}} < |q_n\alpha - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}}.$$

A demonstração do teorema é dada no livro de Serge Lang. Não é muito difícil de seguir mas bastante astuciosa para a descobrir por si próprio. Christian Huygens foi o primeiro a descrever o sentido em que as fracções continuadas fornecem as melhores aproximações dos números reais.

Agora que sabemos que as fracções continuadas são muito boas a aproximar números racionais e irracionais, não será surpresa descobri-las em muitos sítios pouco habituais (à primeira vista). Estudando as fracções continuadas com maior profundidade seríamos levados a descobrir muitas propriedades espantosas destes objectos. Podemos dizer que existe música nas fracções continuadas. Falando de música, também existem fracções continuadas na música. Equipados com as fracções continuadas, regressemos aos calendários para descobrir como elas explicam mais ou menos qualquer sistema de calendário alguma vez proposto ou implementado.

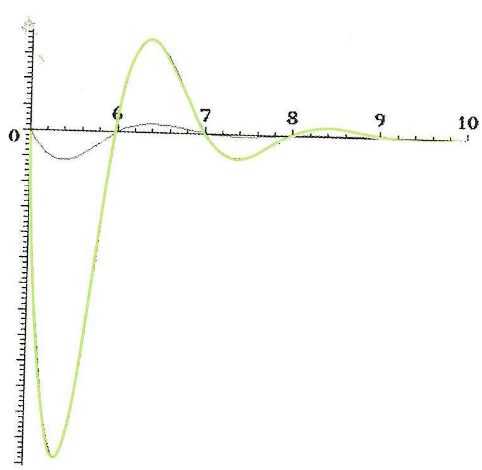

Gráfico 3.

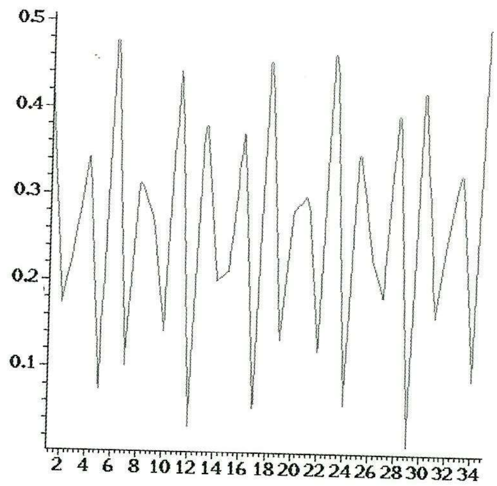

Gráfico 4.

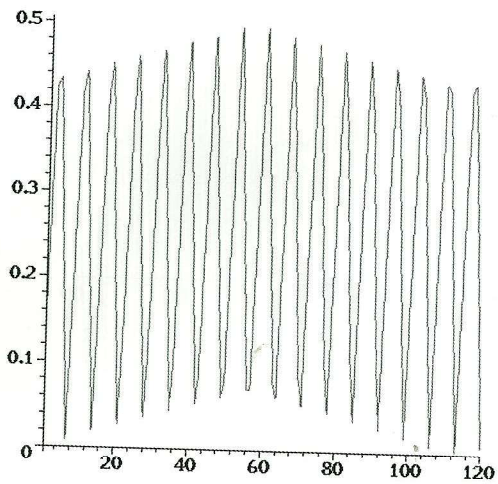

Gráfico 5.

3. Calendários e fracções continuadas

A ideia de um calendário moderno é ter um ciclo abarcando q anos, p dos quais são bissextos ao passo que os $q - p$ restantes não o são. Os números p e q devem ser escolhidos de modo que a duração do ano médio seja tão próxima do ano astronómico quanto possível. Além disso, a duração do ciclo q e a regra para seleccionar p anos bissextos deve ser fácil de usar e de implementação cómoda. Tanto o ciclo juliano de 4 anos como o gregoriano de 400 anos são exemplos de sistemas de calendário fáceis e cómodos. Em contraste, o ciclo hebreu de 19 anos requer uma calculadora para determinar os anos bissextos (em que se adiciona um mês, não um dia).

Consideremos agora o ciclo de q anos durante o qual existem p anos bissextos. Durante o ciclo decorrem $365q + p$ dias. Isto torna a duração do ano médio igual a $365 + p/q$ dias. Assim, precisamos de encontrar um valor *conveniente* para q, que torne p/q tão próximo de $\alpha = 0,24219878$ quanto possível. Já sabemos que é preciso examinar a sequência de convergentes provenientes da expansão em fracção continuada do número α. Para $\alpha = 0,24219878$ tem-se

$$0.24219878 = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \ddots}}}}}$$

que dá a seguinte sequência de convergentes:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{4}, \ \frac{p_2}{q_2} = \frac{7}{29}, \ \frac{p_3}{q_3} = \frac{8}{33}, \ \frac{p_4}{q_4} = \frac{31}{128}, \ \frac{p_5}{q_5} = \frac{163}{673}.$$

A primeira fracção da sequência corresponde ao sistema juliano do ciclo de 4 anos, com um único ano bissexto. As restantes fracções propõem ciclos de duração muito inconveniente: $29, 33, 128$ e 673 anos, respectivamente. Vamos, pois, rejeitá-los. (No entanto, a ideia de um período de 33 anos chegou a ocorrer. Na verdade, um tal calendário seria mais rigoroso do que o actual calendário gregoriano, mas menos rigoroso que o calendário com o ciclo de 500 anos, apresentado abaixo.) Em vez disso, é preferível ter um ciclo com a duração de vários séculos, se a regra de selecção do ano bissexto for suficientemente simples. Assim, suponhamos que $q = 100q'$, devendo q' ser um inteiro entre 1 e 9. Isto corresponde ao problema de aproximar o número $\alpha' = 100\alpha = 24,219878$ através de racionais.

$$0.24219878 \times 100 = 24 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}$$

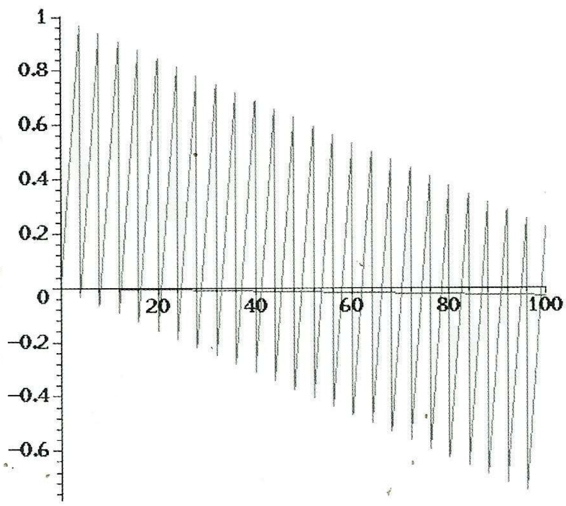

Gráfico 6.

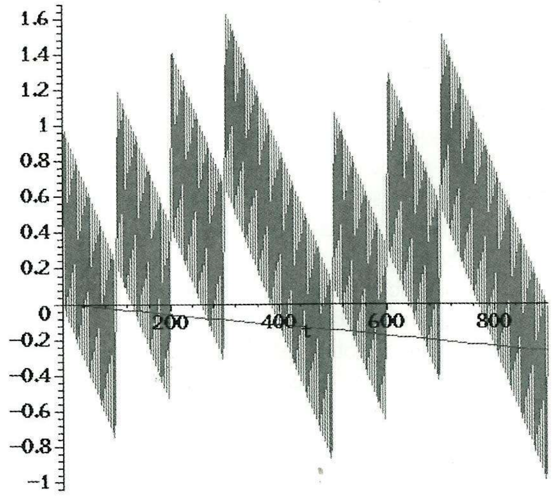

Gráfico 7.

É fácil calcular os primeiros 4 convergentes

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{97}{4},\ \frac{p_2}{q_2}=\frac{121}{5},\ \frac{p_3}{q_3}=\frac{218}{9},\ \frac{p_4}{q_4}=\frac{993}{41}.$$

Vemos que existem três candidatos para modelo do calendário. O primeiro corresponde ao nosso calendário gregoriano. Baseia-se num ciclo de 400 anos com 97 anos bissextos: todos os divisíveis por 4 (uma centena) excepto os 100^o, 200^o e 300^o anos, perfazendo os 97 anos necessários num ciclo. A fracção seguinte $121/5$ corresponde a um calendário com um ciclo de 500 anos com 121 anos bissextos em cada ciclo. Num tal calendário, todos os anos divisíveis por 4 seriam bissextos, a menos que fossem divisíveis por 100, com a excepção dos anos divisíveis por 500, que ainda seriam bissextos. Este sistema é tão simples e cómodo como o calendário gregoriano e proporciona maior precisão. O ano gregoriano é 26 segundos mais longo que o ano solar, resultando num dia de erro em cada 3320 anos. O calendário de ciclos de 500 anos é mais curto 17 segundos do que o ano solar, resultando num erro de 1 dia em cada 5031 anos. Escapou esta parte ao Papa! A última opção para o calendário propõe um ciclo de 900 anos. Porém, com 218 anos bissextos no ciclo, o calendário requer 7 excepções à regra do quarto ano $(218 = 900 \div 4 - 7)$. Tal disposição iria criar um calendário mais complicado. Além disso, um ciclo de 900 anos talvez seja um pouco longo demais para ser cómodo. Por isso, rejeitamos este calendário, mais rigoroso, em favor dos mais simples.

O gráfico 6 mostra a diferença entre o tempo do nosso calendário gregoriano e o tempo solar real, ao longo de 100 anos. As oscilações *dente de serra* são as inserções dos anos bissextos em cada quatro anos.

O gráfico 7 mostra a diferença entre o tempo do calendário gregoriano e o tempo solar real ao longo de 900 anos. As inserções dos anos bissextos individuais são quase invisíveis. Vê-se claramente o efeito das omissões dos anos bissextos em cada século e o efeito do ano bissexto em cada 4 séculos. Na verdade, se omitirmos a regra dos 400 anos mas continuarmos a omitir os anos bissextos em cada século, o erro do calendário assemelhar-se-á ao gráfico 8.

A linha verde mostra os erros do calendário gregoriano, para comparação.

Até o calendário gregoriano irá acumular um grande erro. Eventualmente.

Aqui, (ver gráfico 9) os anos bissextos individuais já não são visíveis. As oscilações menores são as omissões centenárias dos anos bissextos. Estão agrupadas de modo a repetir blocos de quatro. Verificamos que o nosso calendário acumula erros na razão de 1 dia por cada 3300 anos.

Poder-se-ia especular sobre o que fazer no futuro para corrigir a lenta acumulação de erros do calendário gregoriano. A ideia é manter o sistema antigo mas efectuar algumas raras correcções. Mais uma vez, as fracções continuadas dão muito jeito. Por outras palavras, pretendemos um ciclo de duração q muito mais longa, abrangendo vários ciclos de 400 anos $q = 400q'$, onde q' é o número de ciclos de 400 anos no novo ciclo mais longo. Vamos então expandir $400 \times 0,24219878$ numa fracção continuada.

$$400 \times 0.24219878 = 96 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}$$

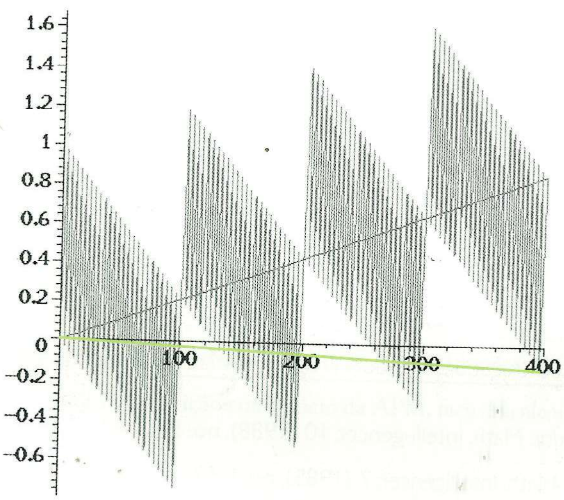

Gráfico 8.

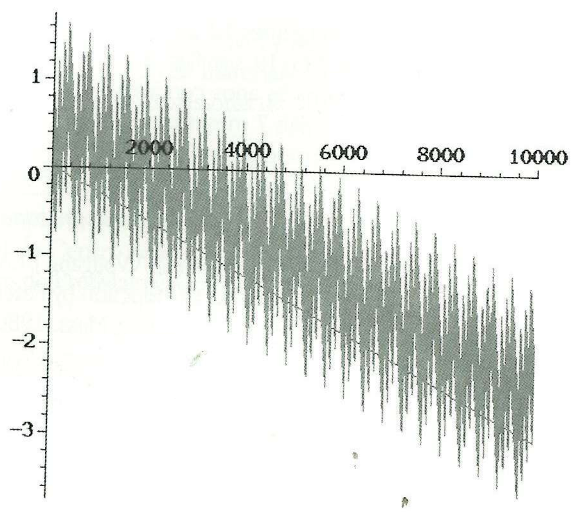

Gráfico 9.

Os convergentes são $96, 97, 775/8, 2422/25, 5619/58, \ldots$ O terceiro convergente sugere um ciclo de $8 \times 400 = 3200$ anos, com um total de 775 anos bissextos. Recorde-se que, de acordo com o calendário gregoriano, existem 97 anos bissextos por cada ciclo de 400 anos. Por isso, nos 8 ciclos teremos $8 \times 97 = 776$ anos bissextos. Assim, anular o ano bissexto em cada 3200 anos, permitirá manter o calendário gregoriano no tempo decorrido e torná-lo simultaneamente muito mais rigoroso.

O novo sistema acumularia um erro de 1 dia em 100000 anos, ou seja, nunca. Seria possível um cenário ainda mais interessante, caso o Papa tivesse feito as contas. Se o nosso calendário se baseasse num ciclo de 500 anos, sugerido acima, então iríamos expandir $500 \times 0,24219878$ numa fracção continuada

$$500 \times 0.24219878 = 121 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}}$$

com convergentes

$$[121, \frac{1211}{10}, \frac{19497}{161}, \frac{59702}{493}, \frac{138901}{1147}, \frac{337504}{2787}, \ldots].$$

O segundo convergente $1211/10$ sugere uma nova duração de ciclo de 5000 anos com 1211 anos bissextos no ciclo. O calendário com ciclo de 500 anos teria 1210 anos bissextos em 5000 anos. De modo a perfazer 1211 anos bissextos, talvez quiséssemos ter 30 de Fevereiro de 5000 em celebração do 5º milénio. O calendário com ciclo de 5000 anos acumularia um erro de 1 dia em 1 milhão de anos! Este sistema foi sugerido por Bernard Rasof (Continued fractions and 'leap' years, *The Mathematics Teacher*, 63, pp. 144-148, 445, 1970.) Seja como for, ou o Papa não fez bem as contas (o que me parece improvável) ou os dados astronómicos da época não eram suficientemente rigorosos para justificar o ciclo de 500 anos, ou havia outras razões para estabelecer o actual calendário (por exemplo, o ano próximo de 1600 não aumentaria a discrepância entre as duas versões do calendário sob o ciclo dos 400 anos).

As fracções continuadas também podem ser usadas para descobrir o ciclo metónico do calendário hebreu. Nos calendários lunares introduz-se um mês extra (de Lua Nova a Lua Nova) num ano bissexto. Tal como mencionamos no início, existem $12{,}368267$ lunações num ano. Expandindo este número numa fracção continuada obtemos

$$12.368267 = 12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{17 + \ddots}}}}}}$$

com convergentes $12, 25/2, 37/3, 99/8, 136/11, 235/19, 4131/334, \ldots$. O ciclo metónico corresponde ao sexto convergente $235/19$, significando que existem aproximadamente 235 lunações em 19 anos.

Se todos os anos contivessem 12 meses, então em 19 anos teríamos $19 \times 12 = 228$ meses. Por isso, é necessário introduzir mais 7 meses para obter 235. A regra actual do ano bissexto requer uma calculadora: o ano Y é bissexto se $7Y + 1 \pmod{19} < 7$.

Os livros seguintes são referências excelentes para saber mais acerca de fracções continuadas:

- Lang, Serge. *Introduction to Diophantine approximations*. Second edition. Springer-Verlag, New York, 1995.
- Jones, William B.; Thron, Wolfgang J. *Continued fractions. Analytic theory and applications.* With a foreword by Felix E. Browder. With an introduction by Peter Henrici. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 11. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1980.

A história do calendário e as fracções continuadas também são discutidas em dois artigos do Mathematical Intelligencer:

- Dutka, Jacques. *On the Gregorian revision of the Julian calendar.* Math. Intelli-gencer, 10 (1988), no. 1, 56–64.
- Rickey, V. Frederick. *Mathematics of the Gregorian calendar.* Math. Intelligencer, 7 (1985), no. 1, 53–56.

Tradução de Luís Reis