A importância do problema

Lucia Grugnetti, Universidade de Cagliari (Itália)

Ao fazer, ainda que em traços gerais, a história da Matemática desde os Babilónios e dos antigos Egípcios, a importância atribuída ao problema como caminho preferencial para a transmissão do saber, aparece de forma absolutamente clara. De facto, grande parte das matemáticas antigas foi-nos transmitida exactamente sob a forma de problemas.

O contexto histórico sublinha também a importância do recurso a problemas não como fins em si mesmos, mas que estejam pertinentemente integrados na realidade quotidiana.

Fala-se actualmente com muita frequência de «problem-solving»(1) e de contexto real, e está certo que se fale mas, na minha opinião, tendo consciência do passado que a história das matemáticas nos proporciona, é interessante ir aí procurar alguns exemplos notáveis.

Devemos, pois, fazer frente a esta temática do ponto de vista da sua actualização; é exactamente nesse sentido que considero os novos programas(2) satisfatoriamente adequados.

Transcrevo a seguir, as passagens mais relevantes relativamente ao papel do problema nos programas de Matemática da Escola Primária, da Escola Média e nas propostas para o Ensino Superior(3).

Escola Primária

O pensamento matemático é caracterizado por uma actividade de resolução de problemas e isto vem ao encontro da tendência da criança de fazer perguntas e de procurar as respostas. Portanto, as noções matemáticas básicas devem ser fundadas e construídas a partir de situações problemáticas concretas, provenientes de experiências reais da criança e que proporcionem, também, a oportunidade de verificar os conhecimentos matemáticos anteriores, os instrumentos e as estratégias utilizadas, bem como, as dificuldades com que a criança se confronta.

Escola Média

É necessário lembrar que «resolver» um problema não significa só aplicar regras fixas a situações já esquematizadas, mas significa, também, abordar os problemas de raiz, e pedir ao aluno que se encarregue totalmente da tradução em termos matemáticos.

No quadro deste trabalho de tradução, encontrar-se-á, entre outras, uma motivação concreta para a construção de expressões aritméticas e para as convenções da escrita.

Também para as equações e inequações se encontra motivação na resolução de problemas adequados.

Ensino Superior

Ao tratar os vários temas, o professor deve ter presente que o que qualifica, de forma pertinente, a actividade matemática é a formulação e a resolução de problemas no sentido mais lato do termo.

Consequentemente, cada tema deve ser considerado prioritariamente como um campo de problemas. Sem negar totalmente a presença de exercícios de tipo repetitivo como suporte da aprendizagem, não resta qualquer dúvida que a educação matemática se realiza, essencialmente, no desafio de resolver problemas novos.

Quando da verificação, é então necessário controlar até que ponto o aluno transfere os conhecimentos que tem, para situações diferentes das já encontradas.

Da análise do problema surgirá a exigência de uma teoria que permita a sua resolução e assim, à medida que as noções teóricas vão sendo assim apreendidas, deverão ser oportunamente relacionadas e ordenadas.

Pondo em evidência estas passagens relativas aos diferentes programas, não quero com isso afirmar que a única via da didáctica da Matemática seja a que «passa» pelos problemas. Como com todos os aspectos do ensino, o do ensino por problemas comporta muitos riscos quando exagerado, quando se torna um assunto rotineiro e, principalmente, quando é a única proposta de trabalho.

Creio, apesar de tudo, que os problemas têm um papel muito importante no ensino, se forem considerados como uma descoberta de estratégias, de uma via para ultrapassar um obstáculo, como uma forma de construir um conceito (partindo de um contexto real) e, portanto, como uma interpretação pensada e crítica da realidade.

Neste contexto, creio não ser inútil prestar atenção ao papel que o problema tem tido ao longo da História.

O problema na História

Como se sabe, na tradição matemática anterior aos Gregos (Babilónios e antigos Egípcios), encontra-se, essencialmente, a resolução de problemas.

Não temos, dessa época, tratados com teoremas, mas sim, problemas, muitas vezes acompanhados da indicação do procedimento a seguir para a sua resolução.

Esses problemas estão, em geral, relacionados com a realidade e os temas, em torno dos quais são construídos são, principalmente, de ordem alimentar (o pão e a cerveja no caso dos antigos Egípcios), de ordem comercial ou financeira, ou ainda relativos à partilha de terras entre herdeiros, etc.

Alguns especialistas deste período da história da matemática julgaram que a aplicação prática era, talvez, uma roupagem de carácter pedagógico; tratava-se de tornar atractivo o esforço que era exigido ao aluno.

O texto dos problemas compreende geralmente um enunciado que, depois de uma referência ao concreto, é do tipo: «Acrescentei ao meu quadrado o seu lado obtive tanto» (subentendido: qual é o lado?).

Segue-se uma série de instruções expressas na segunda pessoa do singular, chega-se ao resultado e, no fim, temos a «prova», verificar se o resultado permite reconstituir os dados.

No caso da matemática dos antigos Egípcios e do Papyrus Rhind, em particular, que remonta a cerca de 1600 a.C., pode-se notar que a maioria dos 87 problemas apresentados, são de natureza prática, mas, nalguns casos, parece que o escriba (Ahmes) teve a intenção de propor adivinhas ou jogos matemáticos. É o caso do problema 79 que considera «7 casas, 49 gatos, 343 ratos ...» e que encontramos com uma forma parecida, no Liber Abbaci[4] (de Leonardo Pisano) escrito em 1202.

Leonardo Pisano (dito Fibonacci) recorre ao mesmo problema com a forma «7 velhinhas vão viajar para Roma, cada uma com 7 machos ...» (que encontramos também em vários contos bem conhecidos) como um exemplo de progressão geométrica com 6 termos em que o primeiro é 7 e cuja razão é 7.

É interessante salientar que Fibonacci, a propósito deste problema e de quase todos os outros do seu Liber Abbaci, apresenta mais do que um processo de resolução.

Encontra-se frequentemente escrito «est enim alius modus in solvendo similes questiones».

Não é raro que um problema seja resolvido por via algébrica e por via geométrica, explorando o uso de quadros, esquemas e de representações gráficas adequadas[5].

No Liber Abbaci há também um outro aspecto fundamental, no que se refere à resolução de um problema, que é a possibilidade de, nalguns casos, para certos valores dos dados ou devido a condições especiais, o problema não ser resolúvel (ou a solução não ter sentido).

Fibonacci fala de «questio insolubilis» relativamente a certos problemas de partilha de dinheiro entre várias pessoas.

A maioria dos «Traités d'Abaque» tanto da Idade Média como da Renascença são, de facto, recolhas de problemas.

Neles se encontram problemas práticos e problemas recreativos que, devido às argumentações e às estratégias interessantes a que fazem apelo, ainda hoje são apresentados.

Por exemplo, incluem-se nesta tradição os problemas relacionados com pesagens dispondo de um número limitado de pesos[6].

Numa época anterior, encontram-se as curiosas e famosas «Propositiones ad acuendos juvines» (para tornar os jovens inteligentes) D'Alcuin (que viveu na corte de Carlos Magno).

As «Propositiones» são uma recolha de questões «matemáticas» que influenciaram, durante alguns séculos, os autores dos manuais escolares. Entre outros, encontra-se o subtil problema, conhecido sob diversas formas, cujo enunciado é frequentemente «Um lobo, uma cabra e uma couve...»

Em épocas mais recentes, matemáticos célebres como Descartes, Leibnitz, Newton, Euler, deram bastante atenção à resolução de problemas.

Euler, no seu tratado de Álgebra, interessante também do ponto de vista didáctico pela variedade e elegância dos problemas discutidos, recorre a uma apresentação «agradável» dos problemas. Por exemplo, o problema no 50 do quarto capítulo é apresentado da forma seguinte:

> Um macho e um burro transportavam um carregamento de alguns meios quintais.
>
> O burro queixava-se da sua carga e disse ao macho: «Só preciso de meio quintal da tua carga para que a minha seja o dobro da tua».
>
> O macho respondeu: «Sim, mas se me deres meio quintal da tua carga, eu ficarei três vezes mais carregado do que tu».
>
> Quantos meios quintais transportava cada um?

Segue-se uma explicação muito clara e detalhada da resolução do problema em que Euler «ensina» a equacionar e a resolver um sistema de equações lineares.

O papel actual do problema

No breve percurso histórico manifestaram-se alguns aspectos do ensino em que houve recurso aos problemas.

Fiz alusão a problemas com várias estratégias de resolução, a problemas «impossíveis», à tradução de problemas descritos verbalmente em problemas descritos por equações e sistemas de equações.

Evidenciou-se um recurso constante aos problemas como campo de aplicação de conceitos e de regras.

Esses aspectos, importantes, não são de certo exaustivos, pelo menos actualmente.

Como é sabido, a partir dos anos setenta, em vários países do mundo, tem havido quem se bata, com uma ênfase cada vez maior, por uma metodologia por problemas.

«Partidários» de um pragmatismo acentuado (e talvez limitativo), por um lado, e «bourbakistas» convictos, por outro lado, encetaram uma polémica muito viva.

Sem entrar no âmago desta discussão que, em alguns casos tem sido muito animada, quero aqui pôr em evidência o ponto de vista do Centro de Investigação e Experimentação de Educação Matemática (CRSEM) de Cagliari, onde trabalho, que é o nosso ponto de vista sobre o papel do problema no mundo actual.

Acreditamos que o problema ou um problema em si mesmo não é importante, mas sim um conjunto coordenado de problemas, na acepção mais ampla do termo e, ainda melhor, um conjunto de situações problemáticas que, a partir da realidade (que, por vezes, pode mesmo ser uma situação de jogo) permite abrir caminho, progressivamente, até uma generalização a que não se pode renunciar.

Compreende-se, facilmente, que se trata de um processo indutivo em cujo quadro um conceito se constrói por «aproximações sucessivas».

Com este sentido mais amplo, a metodologia por problemas não corre o risco apontado por alguns matemáticos e, em particular, por Luigi Pepe que, numa conferência em Janeiro de 1985[7] para o seminário didáctico de Ferrara, disse, entre outras coisas: «um ensino por problemas, mesmo engenhosa e brilhantemente resolvidos, fora de um quadro disciplinar, pode concretamente conduzir a uma forma nova e mais perigosa de nocionismo...»

Neste ponto parece fundamental um entendimento claro sobre o sentido a atribuir à metodologia por problemas ou ao papel do problema na didáctica.

Uma coisa é resolver mecanicamente muitos problemas (algumas das práticas escolares recusam problemas que não se enquadrem rigorosamente em esquemas pré-estabelecidos), outra coisa bem diferente é partir de uma discussão crítica sobre uma ou várias problemáticas (também sobre a forma de problema) para atingir gradualmente, por formas e tempos adequados ao nível de escolaridade, um conceito.

A seguir, o conceito poderá, ou melhor, deverá ser, por sua vez, aplicado à análise da realidade.

Considero oportuno proporcionar aqui uma ilustração desta metodologia desenvolvida no quadro do CRSEM dirigido pelo Prof. Oscar Montaldo.

O aspecto principal do projecto de investigação e experimentação matemática, iniciado há já alguns anos pelo Centro, é uma renovação didáctica coordenada desde a escola primária até aos níveis superiores da escola secundária, caracterizada por uma aproximação em espiral aos diferentes temas que vão sendo convenientemente alargados e aprofundados, à medida que se avança nos níveis de escolaridade.

O exemplo diz respeito à didáctica das «probabilidades» na Escola Primária e na Escola Média.

As minhas colegas Carla Caredda e Maria Polo que coordenam os grupos da escola primária ligados ao CRSEM, tratando este tema, observaram que as crianças muito novas (5-7 anos), em presença de uma situação problemática (mesmo de jogo), dificilmente conseguiam distinguir a sua experiência pessoal da situação a analisar.

Pelo contrário, acontece frequentemente que, ao procurar a forma de resolver a situação, as crianças «forçam» a escolha dos algoritmos de resolução exactamente porque relacionam tudo com a sua experiência anterior.

Ultrapassada esta fase, as situações problemáticas, que pressupõem escolhas e previsões em condições de incerteza, podem proporcionar um bom contributo.

Para adoptar uma atitude didacticamente correcta, é fundamental interrogarmo-nos sobre quais são as «situações de incerteza» para a criança.

De certeza que não são as mesmas do professor ou dos adultos que as rodeiam (de qualquer forma, todas as situações problemáticas, sob aspectos diferentes, são situações de incerteza para alguém).

A criança, da escola pré-primária está num ponto máximo (relativo) de «situação de incerteza», dado que a ultrapassagem de uma situação problemática não é só a «descoberta» da solução (ou soluções) mas é, principalmente, a formação de conceitos.

É necessário, então, evitar demorar muito tempo na fase das operações concretas, qualquer que seja o objectivo da actividade; arriscar-nos-íamos, assim, a só favorecer os processos repetitivos que não coincidem com a aquisição de conceitos.

«A situação problemática» quase nunca coincide com um único problema, mas sim, com a passagem (principalmente no que se refere às crianças) de um problema concreto (por exemplo, de caracter lúdico) a um problema de nível «formal».

Que questões se põem à criança na passagem do primeiro ao segundo nível?

No contexto de uma experiência realizada em aulas do terceiro ano de escolaridade (8 anos), os alunos começaram por trabalhar, a nível lúdico, em actividades de extracção de bolas coloridas, no decurso das quais se observou, em especial, os momentos de previsão das cores das bolas a extrair.

Na fase seguinte, não tendo o material concreto à disposição, foi-lhes proposta a seguinte ficha:

Neste saco há uma bola branca e uma preta. O Pedro vai extrair só uma bola.

Lê com atenção e marca com uma cruz o caso que consideras correcto.

Qual das três afirmações é, com certeza, impossível?

O Pedro tirou uma bola preta.
O Pedro tirou uma bola vermelha.
O Pedro tirou uma bola branca.

Qual é, com certeza, verdadeira?

O Pedro tirou uma bola preta.
O Pedro tirou uma bola branca ou uma bola preta.
O Pedro tirou uma bola amarela.

Qual é possível?

O Pedro tirou uma bola preta.
O Pedro tirou uma bola vermelha.

Dos dados recolhidos, foi possível constatar-se como uma «certeza» e, portanto, um «conhecimento», que se poderia considerar adquirido ao nível da experiência concreta, não estava de forma nenhuma adquirido ao nível das operações mentais que requerem o recurso à «simulação pensada» da actividade concreta.

A razão apresentada por um aluno que tinha assinalado o primeiro caso da ficha, foi: «lembro-me muito bem que no último jogo a primeira bola que tirei era branca».

No momento em que a criança faz a passagem correcta do problema concreto ao problema formal, aquela situação pode ser considerada ultrapassada.

Ao nível da escola média, tendo em conta os programas em vigor, pensamos que só devem ser formalizadas as noções mais simples de cálculo das probabilidades e favorecer, sobretudo, a formação do pensamento «probabilístico»[8].

Pensamos que uma intervenção susceptível de atingir este objectivo se deveria fazer a partir de uma problemática concreta (mais do que por uma abordagem da probabilidade através dos «jogos clássicos»), o que pode constituir um itinerário rico em estruturas conceptuais.

Neste quadro, para chegar à probabilidade como medida da incerteza, teve um papel fundamental a necessidade de uma amostra casual numa pesquisa não exaustiva.

Tendo em consideração o itinerário didáctico (descrito a seguir) depois de aplicado um inquérito que atingiu todos os elementos de uma população (um pequeno centro agrícola de cerca de 800 famílias) pôs-se-nos a questão da sua transferência para uma população mais vasta (uma cidade com cerca de 250 000 habitantes: Cagliari). Como proceder?

A impossibilidade (ou pelo menos a dificuldade) de chegar directamente a todos os membros da população pareceu imediatamente evidente.

Daí, a necesidade de recorrer a uma «amostra».

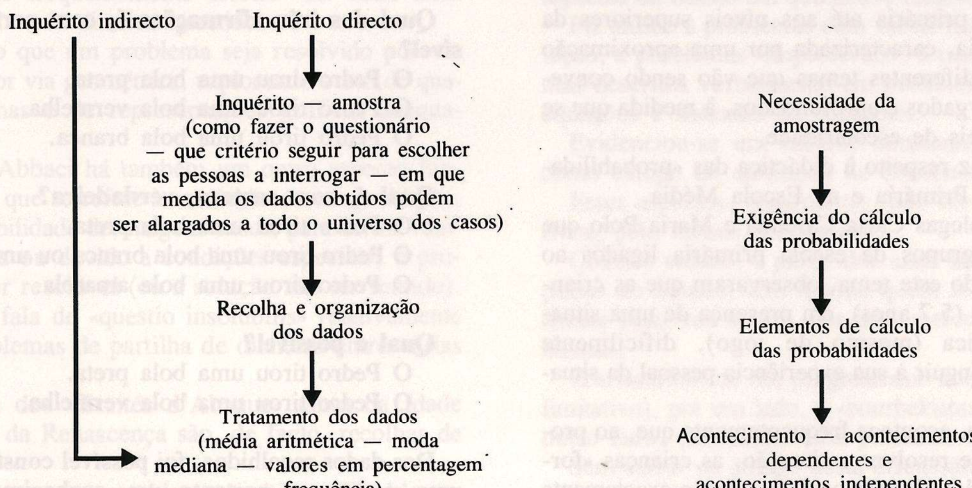
Depois de um inquérito preliminar nas aulas, verificou-se que o significado deste termo não era, em geral, conhecido dos alunos. Recorremos então a exemplos, como: «o costureiro mostra ao cliente uma amostra de tecido para que este possa escolher», «para uma análise de sangue, colhe-se uma amostra», «se uma discoteca quer saber qual é a música preferida dos jovens, interroga uma amostra», etc.

Voltando ao problema em causa, pediu-se aos alunos que discutissem e respondessem à seguinte questão:

«Será correcto escolher como amostra:
a) os habitantes de um quarteirão?
b) os empregados de determinado escritório?
c) algumas pessoas cujos nomes figuram na lista telefónica?»

As respostas, como era de prever, foram as mais díspares; desenvolveu-se, então, um trabalho guiado que permitiu pôr em evidência que, se queremos uma amostra representativa de toda a população da cidade, é difícil que as suas características se encontrem todas num só quarteirão. Não se pode, portanto, excluir *a priori* um habitante qualquer, por não pertencer àquele quarteirão. Todos os habitantes devem estar, à partida, em iguais condições de ser recolhidos.

Desta forma, começa a precisar-se a ideia de «igual possibilidade», e a procura das condições que definem esta «igual possibilidade» conduz à exigência de uma medida adequada e, portanto, à exigência do cálculo das probabilidades.



(Continua na pág. 35)

A importância do problema (conclusão)

Neste momento, dado que, de uma problemática real, emergiu a exigência do cálculo das probabilidades, voltámos às simulações com dados e moedas (já utilizadas na escola primária) para retomar com novos conhecimentos a problemática concreta.

Notas

(1) Em inglês, no original (N. da T.)
(2) Trata-se dos programas italianos (N. da T.)
(3) Trata-se, ainda, dos programas italianos (N. da T.)
(4) Edição crítica de Baldassarre Bonconpagni, Roma, Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche, 185.
(5) Entre outros, podemos citar um problema que diz respeito a pássaros e a uma fonte, a páginas 331-332 e 398-399 no primeiro tomo da edição crítica já referida. Este problema é resolvido, quer pelo método da dupla falsa posição (Catayno), quer por um processo geométrico que utiliza a semelhança de triângulos e o teorema de Pitágoras.
(6) Por exemplo, no tratado de Tommaso della Gazzaia (Mestre de Ábaco) pode ler-se o seguinte problema: «Um pesador do rei utiliza seis pedras de pesos diferentes com que pode pesar de uma a trinta libras». Tommaso demonstra qual é o peso de cada pedra.
(7) Le Matematiche oggi nella società e nella cultura italiana.
(8) Ficamo-nos pela escola média, porque as probabilidades não foram ainda introduzidas oficialmente no currículo da escola secundária superior.

Bibliografia

Boyer, C.B. (1982). *Storia della matematica*. Mondadori editore.

Bunt, L. & al. (1987). *La radici storiche delle Matematiche Elementari*. Zanichelli.

Danzig, T. (1973). *Il numero, linguaggio della scienza*. La Nuova Italia.

Giacardi, L. & Roero, S. (1979). *La matematica delle civiltà arcaiche*. Stampatori Didattica.

Noël, Emile (Ed.) (1987). *Le Matin des Mathématiciens*. Edition Belin, 8.

Quaderni del Centro Studi della Matematica Medievale: Tommaso Della Gazzaia — Pratica di Geometria e tutte misure di Terre. Dal ms. C. III 23 della Biblioteca comunale di Siena. Transcrizione di Cinzia Nanni, 1982.

Leonardo Eulero. *Elementi di Algebra*. Londra, 1797.

Leonardo Pisano. *Liber Abbaci*. Edizione critica di Baldassarre Boncompagni. Roma: tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857.

A região perdida (conclusão)

Sendo P_k um ponto qualquer, o segmento $[P_{n+1}\ P_k]$ ao intersectar cada uma das cordas já existentes vai determinar novas regiões. Se o segmento intersectar 3 cordas, 4 novas regiões aparecerão.

Resta saber quantas cordas o segmento $[P_{n+1}\ P_k]$ intersecta. Percorrendo a circunferência no sentido dos ponteiros do relógio, $[P_{n+1}\ P_k]$ intersecta qualquer corda que tenha como extremos um dos pontos $P_1, \ldots, P_{k-1}$, e um dos pontos $P_{k+1}, \ldots, P_n$. Intersectará então $(k-1)\ (n-k)$ cordas, e o número de novas regiões determinadas pelo segmento $[P_{n+1}\ P_k]$ é $(k-1)\ (n-k)+1$.

Como o ponto P_{n+1} pode ser unido a qualquer dos n pontos já existentes o número de novas regiões, **N(n+1)**, será dado por:

$$\mathbf{N(n+1)=\sum_{k=1}^{n} (k-1)\ (n-k)+n,}$$

ou,

$$\mathbf{N(n+1)=(n^3-3n^2+8n)/6}$$

Para $n=6$, o número de novas regiões que resultam da marcação de P_7 é $N(7)=26$, e $R(7)=57$, confirmando-se assim o resultado anterior.

Mais importante que calcular o número de regiões dados 30 pontos é, sem dúvida, a generalização do problema. Podemos chegar a uma expressão que permita determinar, para qualquer número de pontos, o número de regiões **R(n)**:

$$\mathbf{R(n)=1+\sum_{k=1}^{n-1} N(k)=1+\sum_{k=1}^{n-1} (k^3-3k^2+8k)/6,\ \ n\geqslant 2}$$

expressão equivalente a [4].

Donde, $R(30)=27841$.

Referências:

Chinn, P. Z. (1988). Inductive Patterns, Finite Differences, and a Missing Region. *Mathematics Teacher*, vol. 81, n.º 6, p. 446-9.

Guillotte, H. P. (19186). The Method of Finite Differences: Some Applications. *Mathematics Teacher*, vol. 79, n.º 6, p. 466-70.

Thompson, A. G. (1985). Developing Students' Matehmatical Thinking. *Arithmetic Teacher*, vol. 33, n.º 1, p. 20-23.