



## Zenão de Elea e o tempo

Carlos Correia de Sá

Os quatro argumentos de Zenão de Elea “contra o movimento” gozam duma inegável popularidade. Conhecem-se oito ou nove argumentos que lhe são atribuídos (dos quarenta que, segundo Proclo de Lícia, teria concebido), mas os quatro que pretensamente demonstram a impossibilidade de movimento são os mais populares e os que mais têm estimulado o engenho de matemáticos, físicos e filósofos (quase sempre na tentativa de os desmontar, e não de os compreender). É impossível dar aqui uma ideia, mesmo que muito pálida, de tudo o que se tem escrito sobre estes quatro argumentos, pelo que me limitarei, após breves considerações introdutórias, a tentar expor a interpretação que deles deu Jean Zafriropoulo no livro *L'École Éléate* (Paris 1950).

### Pitagóricos e Eleatas

Por volta de 500 a. C., a cultura científica grega era dominada pela Escola Pitagórica, sediada em Crotona, na Magna Grécia. Os filósofos desta Escola concebiam qualquer objecto material como sendo constituído por uma quantidade finita de corpúsculos indivisíveis, a que chamavam *mónadas*, e estendiam esta concepção corpuscular da matéria também ao espaço e ao tempo. As *mónadas* pitagóricas tinham *tamanho*, dado que na composição de qualquer segmento de recta, de qualquer figura plana ou sólida, bem como de qualquer período de tempo intervinha apenas um certo *número* (isto é, uma quantidade *finita*) delas. Por exemplo, um segmento de recta seria constituído por *pontos* materiais com uma certa *extensão*, do mesmo modo que um intervalo de tempo seria constituído por *instantês* com uma certa *duração*.

Uma teoria alternativa terá tido origem na própria Escola de Crotona, com Anaxágoras de Clazomene. Para este

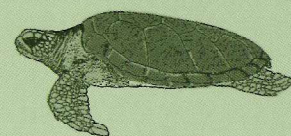
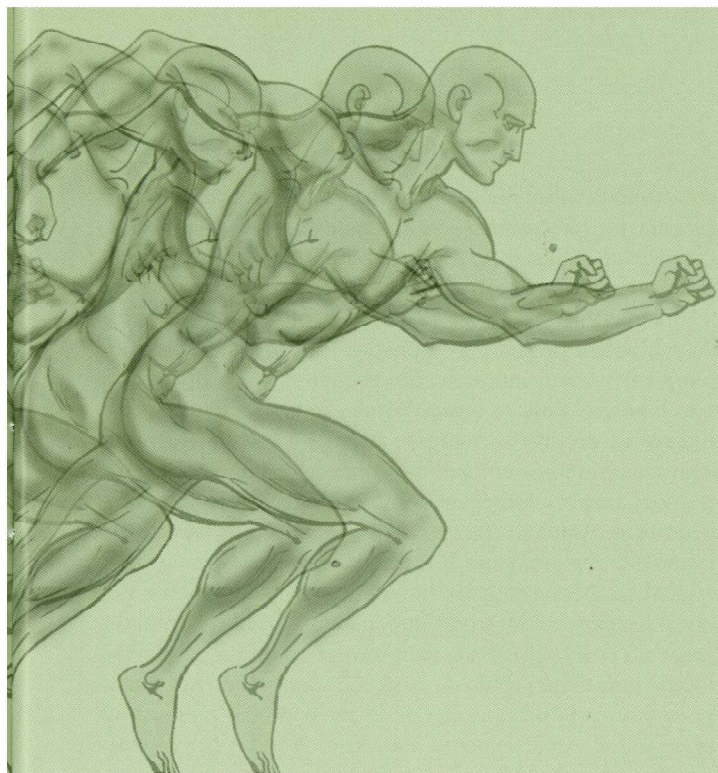
filósofo, também ele pitagórico, a matéria seria ainda constituída por corpúsculos, mas sem tamanho (Leibniz diria: *infinitamente pequenos*) e em quantidade infinita. Portanto, as grandezas (quer espaciais, quer temporais) poderiam subdividir-se indefinidamente. Um traço, historicamente importante para a matemática, do sistema de Anaxágoras é a concepção *contínua* do universo, por oposição à concepção *discreta* dos primeiros pitagóricos.

Os filósofos de outra cidade da Magna Grécia, Elea, propuseram uma segunda alternativa ao sistema das *mónadas* indivisíveis. Enquanto que Anaxágoras representou apenas um desvio da ortodoxia da sua Escola, Parménides de Elea defendeu uma concepção radicalmente diferente da pitagórica. Para os eleatas, o universo é uno e indivisível, e não há nele lugar para as *mónadas*, tenham elas tamanho ou não.

A epistemologia de Parménides também é inovadora: o conhecimento obtém-se só por via intelectual; os sentidos conduzem ao erro, pelo que por via empírica não se obtém o verdadeiro conhecimento; a pluralidade e a mudança que constantemente se observam no mundo são aparências, resultado do carácter enganoso da percepção sensorial. Intimamente ligado à teoria eleata do conhecimento, está o *método dialéctico*. A primeira argumentação por *redução ao absurdo* da história (embora a propósito dum tema de filosofia, e não de matemática) aparece no poema didáctico *Da Natureza*, de Parménides. E é um discípulo deste, Zenão de Elea, quem desde a Antiguidade costuma ser considerado como o dialecta por excelência.

Segundo a tradição, Zenão argumentava indirectamente, como era típico dos eleatas: para combater uma tese, aceitava-a por momentos e demonstrava que ela era contraditória. Seguindo de muito perto Zafriropoulo, veremos que





os quatro argumentos de Zenão contra o movimento podem interpretar-se como uma excelente ilustração deste método dialéctico.

### Os argumentos de Zenão contra o movimento

*Dicotomia:* Não há movimento porque, antes de um móvel percorrer um certo espaço, tem de percorrer metade desse espaço; mas, antes de percorrer metade desse espaço, tem de percorrer metade de metade desse espaço; e assim indefinidamente. Portanto, o movimento não pode chegar sequer a começar.

*Aquiles:* Se Aquiles, o mais veloz corredor da Ática, der algum avanço a uma lenta tartaruga, então nunca conseguirá vencê-la numa corrida. Com efeito, quando Aquiles atingir o local de onde a tartaruga partiu, já esta terá avançado e se encontrará num outro local adiante dele; e, quando Aquiles atingir esse outro local, já a tartaruga terá realizado novo avanço; e assim indefinidamente. Portanto, Aquiles nunca conseguirá atingir a tartaruga.

*Seta:* Uma seta voando para o alvo está, na realidade, parada. Com efeito, em cada instante, a seta ocupa uma só posição, ou seja, em cada instante, a seta está parada; portanto, a seta está sempre parada.

*Estádio:* Considerem-se três filas paralelas de atletas num estádio, uma imóvel, outra correndo num dos sentidos, e a última correndo no sentido oposto. Se, numa unidade de tempo, cada um dos atletas em corrida passar por um dos atletas em repouso então um corredor dum fila passa por um corredor da outra fila em metade desse tempo. Portanto, a unidade de tempo é igual ao seu dobro.

Os dois primeiros destes argumentos são facilmente explicáveis em termos de convergência de séries reais, por ne-

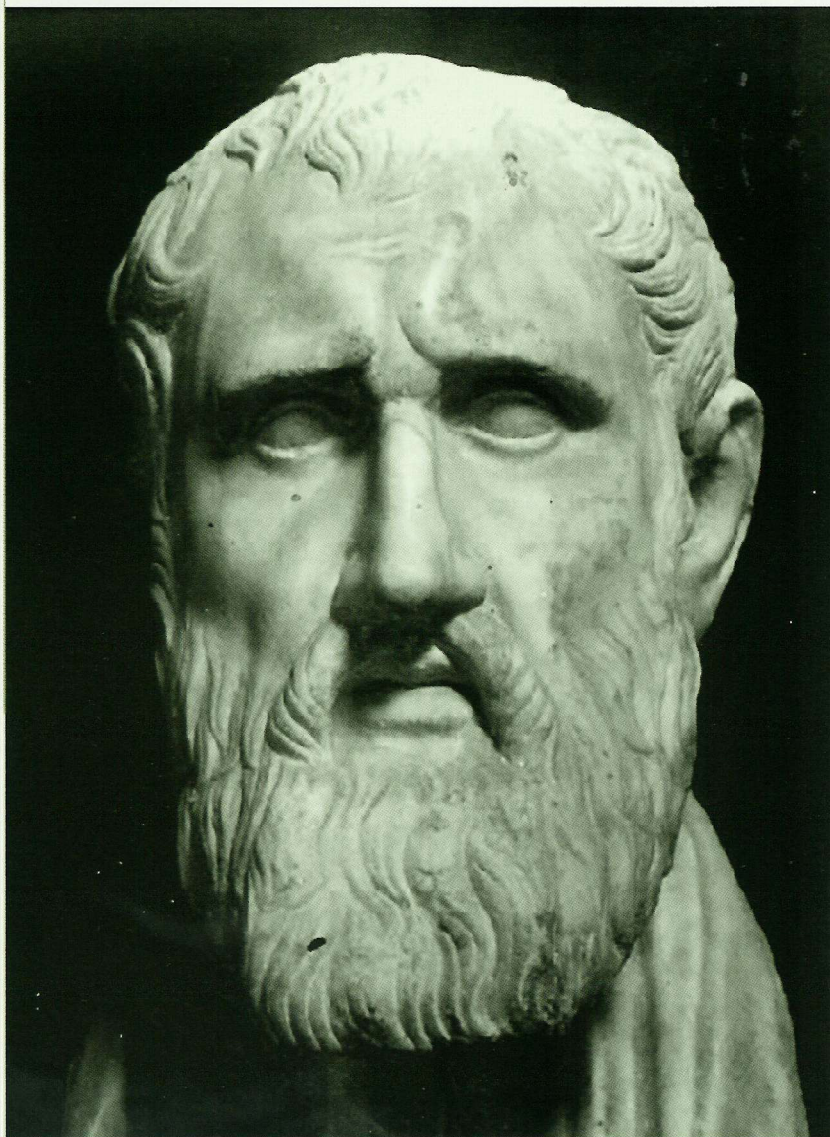
les se supor que o espaço é indefinidamente divisível. Na *Dicotomia*, a trajectória do móvel subdivide-se em infinitas partes, cada uma das quais é metade da anterior, e no *Aquiles*, o percurso da tartaruga até ser alcançada é também subdividido em infinitos “avanços”, cada vez menores.

Contudo, esta explicação não envolve o tempo. Se a situação que Zenão considerava paradoxal se resumisse à decomposição dum espaço limitado numa infinidade de partes com grandeza, então seria desnecessário dar-lhe formulações que envolvessem movimento. Não é de crer que um dialecta da craveira de Zenão tenha cometido tal falta. Argumentar sobre o *movimento* implica discorrer sobre o *espaço* e também sobre o *tempo*; se Zenão se referiu ao movimento, e não apenas ao espaço, então uma explicação satisfatória dos seus argumentos deve levar o tempo em linha de conta.

### A interpretação de Zafiropoulo

Para Jean Zafiropoulo (*L'École Éléute*, Paris 1950), Zenão pretenderia, com os quatro argumentos acerca do movimento, rebater todas as possibilidades de constituição corpuscular do espaço e do tempo, tanto na concepção de mónadas com grandeza, que tinha sido preconizada pelos primeiros pitagóricos, como na de mónadas sem grandeza, que era proposta por Anaxágoras. Não se restringindo aos casos em que as mónadas espaciais e as mónadas temporais tivessem ambas grandeza ou fossem ambas desprovidas dela, Zenão teria contemplado também a possibilidade de as estruturas dum segmento de recta e dum intervalo de tempo não serem “isomorfas” uma à outra. Assim, ter-se-ia visto na necessidade de considerar quatro casos distintos, todos tecnicamente possíveis dentro do sistema corpuscular geral defendido pe-





Zenão [495?–435? a.C.]

las correntes pitagóricas, e de apresentar quatro argumentos distintos, a fim de os rebater a todos.

Estrutura do espaço e do tempo refutada por cada argumento		mónadas espaciais	
		extensas	não extensas
mónadas temporais	duráveis	<i>Estádio</i>	<i>Dicotomia</i>
	não duráveis	<i>Seta</i>	<i>Aquiles</i>

O argumento da *Dicotomia* destinar-se-ia a rebater a possibilidade de as mónadas espaciais serem inextensas mas as mónadas temporais serem duráveis. A inextensão das mónadas espaciais permitiria a indefinida subdivisão de qualquer segmento de recta; pelo contrário, qualquer decomposição do intervalo de tempo teria apenas um número finito de componentes. Portanto, se um segmento de recta fosse percorrido por um móvel num certo intervalo de tempo, bastaria

considerar uma subdivisão suficientemente grande do espaço para ter forçosamente vários subintervalos percorridos durante um só instante. Mas isso permitiria *decompor o instante*, o que é absurdo.

Com o *Aquiles*, Zenão pretendia provar que é absurda a hipótese de todas as mónadas (tanto espaciais como temporais) serem infinitamente pequenas. De acordo com esta hipótese, tanto o espaço como o tempo seriam indefinidamente divisíveis. Assim, se Aquiles fizesse uma corrida com uma tartaruga em que lhe concedesse um certo avanço, nunca mais a conseguiria alcançar. Com efeito, antes de a alcançar, Aquiles teria de passar pelo ponto de partida da tartaruga; mas enquanto o corredor fizesse esse percurso, o animal também avançaria (ainda que mais lentamente do que o seu perseguidor); portanto, quando Aquiles se encontrasse no ponto de partida da tartaruga, já esta se teria deslocado uma certa porção de espaço, conquistando assim um novo avanço (ainda que menor do que o inicial) sobre o seu perseguidor. Analogamente, enquanto Aquiles percorresse esta nova porção de espaço, a tartaruga continuaria o seu lento movimento, mantendo-se à frente dele. E assim sucessivamente. A tartaruga manteria *sempre* um certo avanço, isto é, Aquiles *nunca* a atingiria.

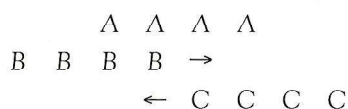
A concepção de mónadas espaciais com extensão e mónadas temporais sem duração seria rebatida pelo argumento da *Seta*. A explicação poderia ser inteiramente simétrica da do primeiro argumento acima. Com efeito, qualquer intervalo de tempo seria indefinidamente divisível, enquanto que qualquer decomposição dum segmento de recta teria apenas um número finito de componentes. Portanto, se uma seta fosse atirada a um alvo, bastaria considerar uma subdivisão suficientemente grande do tempo para ver que, sobre a trajectória da seta, haveria pelo menos uma posição ocupada durante vários instantes; ora, enquanto estivesse nessa posição, a seta estaria *parada* e não em movimento.

Finalmente, Zenão rebateria a que se supõe ser a mais antiga concepção da escola de Crotona, a das mónadas (tanto espaciais como temporais) com grandeza, através do argumento do *Estádio*. Este argumento mostra que a primitiva concepção pitagórica é incompatível com a noção de *velocidade relativa*. Considerem-se três móveis, um deles em repouso e os outros dois em movimento uniforme na mesma direcção e em sentidos opostos, e suponha-se que cada um destes tem, relativamente ao primeiro, uma velocidade tal que percorrem uma mónada espacial enquanto decorre uma mónada temporal. A velocidade do segundo móvel relativamente ao terceiro (ou do terceiro relativamente ao segundo) seria tal que, enquanto decorresse uma mónada temporal, seriam percorridas duas mónadas espaciais; uma vez mais, isso permitiria *dividir o instante*.

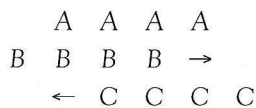
É costume denotar cada um dos móveis em causa por uma sequência de letras iguais, cada uma representando um corredor, o que é bem adequado ao modelo de mónadas extensas que se pretende considerar. Admita-se que, em cada instante (isto é, durante cada mónada temporal), cada um dos corredores BB... e CC... avança o espaço ocupado por um A; então, em cada instante, cada um dos corredores



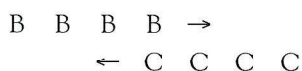
BB... passa por dois dos corredores CC... . Portanto, os corredores passam da posição



à posição



sem que os corredores BB... e CC... tenham de passar pela posição intermédia seguinte:



Esta situação era certamente considerada absurda. Uma outra formulação, com o mesmo efeito lógico, poderia ser a de que, como os corredores BB... e CC... tinham forçosamente de passar pela referida posição intermédia, a mónada temporal podia ser dividida em duas partes, conclusão contraditória com a noção de *mónada*.

### Uma explicação pela Teoria dos Conjuntos

Se a interpretação de Zafropoulo corresponder às verdadeiras intenções de Zenão, então o argumento *Aquiles* afigura-se como o único insatisfatório. Com efeito, é o único que repousa numa falácia que, uma vez desfeita, lhe tira quaisquer pretensões de destruir a hipótese pitagórica que estava destinado a rebater.

Qualquer um dos quatro argumentos admite uma interpretação segundo a qual a consideração dum certo movimento se reduz (em termos modernos!) ao estabelecimento duma bijecção entre dois conjuntos. Uma lei de movimento é uma correspondência entre o tempo e o espaço, que a cada instante faz corresponder a posição ocupada pelo móvel nesse instante. Todos os movimentos considerados por Zenão nestes argumentos se podem considerar como sendo injectivos (isto é, sem paragens nem recuos); portanto, qualquer deles definiria uma correspondência bijectiva entre o conjunto das posições ocupadas e o conjunto dos instantes em que essas posições são ocupadas.

É claro que não pode haver uma bijecção entre um conjunto finito e um conjunto infinito, e é a isso que se reduzem as argumentações tanto da *Dicotomia* como da *Seta*. Zenão terá dado a estes dois argumentos a forma que julgou mais espectacular, como verdadeiro dialecta que era, mas eles são essencialmente idênticos (ou duais, se se preferir). Do mesmo modo que a *Dicotomia* permite a conclusão absurda de que o instante pode ser dividido, também a *Seta* permitiria dividir a mónada espacial. É tão absurdo que uma seta voadora ocupe a mesma posição durante infinitos instantes, como que o móvel da *Dicotomia* (que também pode ser uma seta voadora!) consiga ocupar infinitas posições num só instante.

Este género de argumento só funciona bem quando se supõe que o espaço e o tempo têm estruturas diferentes. Se se supuser um intervalo de tempo isomorfo a um segmento de recta, então não se poderá obter um absurdo através dum só movimento. Por isso, nos dois argumentos restantes, destinados a rebater as duas hipóteses em que as estruturas do espaço e do tempo seriam idênticas, Zenão é forçado a considerar mais do que um móvel. Isso permite-lhe comparar os espaços entre si: conjugando duas leis de movimento (compondo uma das bijecções com a inversa da outra), obtém uma bijecção entre as duas trajectórias.

No *Estádio*, Zenão consegue, a partir de dois movimentos em sentidos opostos, considerar um "movimento relativo" a velocidade dupla da dos outros dois, pondo assim um mesmo conjunto finito de instantes simultaneamente em bijecção com dois conjuntos finitos (não vazios) de pontos, dos quais um tem o dobro dos elementos do outro. Isto é absurdo, porque implica uma bijecção entre estes dois últimos conjuntos, que têm cardinais diferentes.

Também no *Aquiles*, um mesmo conjunto de instantes está simultaneamente posto em bijecção com os conjuntos das posições ocupadas pelos dois participantes na corrida. Para cada instante,  $t$ , em que dura a corrida, designem-se por  $A_t$  e  $T_t$  as posições ocupadas por Aquiles e pela tartaruga nesse instante; por composição duma destas bijecções com a inversa da outra, podemos pôr em correspondência as posições  $A_t$  e  $T_t$  (para o mesmo  $t$ ). Como a tartaruga parte com um certo avanço, nem todas as posições ocupadas por Aquiles são ocupadas pela tartaruga. Zenão pretende que, em consequência disso, também nem todas as posições ocupadas pela tartaruga podem ser ocupadas por Aquiles pois (se nos for permitido atribuir uma ideia errada a Zenão), havendo uma bijecção entre os dois conjuntos de posições, não poderia um deles estar estritamente contido no outro. Ora, supondo-se esses conjuntos infinitos, tal argumento não é válido! Portanto, a concepção de Anaxágoras não foi rebatida (se admitida tanto para o espaço como para o tempo).

Se se aceitar a interpretação sugerida por Zafropoulo, os outros três argumentos de Zenão acerca do movimento são inatacáveis.

### Bibliografia

- António Andrade Guimarães: *O Pensamento Matemático na Grécia Antiga* (1ª Parte: da Antiguidade Oriental até Zenão de Eleia), Porto, 1973.
- Thomas L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford, 1921.
- Paul-Henri Michel: *De Pythagore à Euclide. Contribution à l'Histoire des Mathématiques Préeuclidiennes*. Paris, 1950.
- Jean Zafropoulo, *L'École Éléate*, Paris 1950.

Carlos Correia de Sá  
Departamento de Matemática Pura  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
Centro de Matemática da Universidade do Porto