
Nuno Milagaia

Um relógio analemático na ESE de Setúbal

Rita Bastos e Eduardo Veloso

Quando os participantes no ProfMat 2006 começarem a chegar à ESE de Setúbal, na tarde do dia 14 de Novembro, encontrarão, se tudo correr como esperamos, uma grande elipse desenhada num dos pátios da escola, com marcas assinalando as horas do dia. No eixo menor da elipse estará espetada uma vara vertical que projectará uma sombra que irá intersectar a elipse na marca que corresponde (por exemplo) às 17 horas e 45 minutos. Olhando para o seu relógio de pulso e fazendo alguns ajustes indicados num painel perto da elipse, cada participante poderá constatar (esperamos!) a exactidão deste relógio de Sol (chamado) analemático. No Centro de Ciência Viva de Constância existe um relógio do mesmo tipo cuja foto, amavelmente cedida pelo Centro, publicamos aqui. Neste artigo descreveremos o que é um relógio analemático e tentaremos demonstrar porque razão funciona. As razões do seu nome e a sua origem são obscuras e sobre isso remetemos os leitores para uma nota final.

Nos relógios de Sol existe quase sempre um mostrador graduado (indicando as horas do dia) e uma haste ou vara (o gnómon) que projecta a sombra do Sol sobre o mostrador. No relógio analemático o mostrador é uma elipse desenhada no chão (supostamente plano e horizontal) e o gnómon é vertical e a sua posição depende do dia do ano (ao longo de um segmento contido no eixo menor da elipse). Para compreender o seu fundamento é essencial ter uma ideia clara do que é a esfera celeste.

Uma esfera celeste de 10 metros de raio, porque não?

É irresistível, mesmo depois de tudo o que sabemos, não pensar que a Terra onde vivemos é o centro de uma enorme esfera celeste onde estão incrustadas as estrelas e sobre cuja superfície vagueiam o Sol, os planetas do sistema solar, os cometas, os satélites artificiais, etc. Excluindo os satélites artificiais, todos os outros objectos celestes estão a distâncias enormes da Terra, se as compararmos com o raio da Terra. Portanto, a Terra é mesmo o centro pontual T dessa esfera celeste imaginária. Para localizarmos os seus pontos, projectamos os círculos e pontos fundamentais que usamos sobre a Terra na esfera celeste, a partir do centro da Terra, e acrescentamos o nome *celeste*. Obtemos assim o *equador celeste* ($Eq - Eq'$), os *pólos celestes* (P_N e P_S), os *meridianos celestes* e os *paralelos celestes*. E ainda o *horizonte celeste* (*hor. cel.*) (associado à nossa posição sobre a Terra) e o *Zénite* (Z) e o *Nadir* (Na) (respectivamente o ponto exactamente acima da nossa cabeça na esfera celeste e o seu antípoda). Colocando, como é *normal*, o horizonte horizontal a figu-

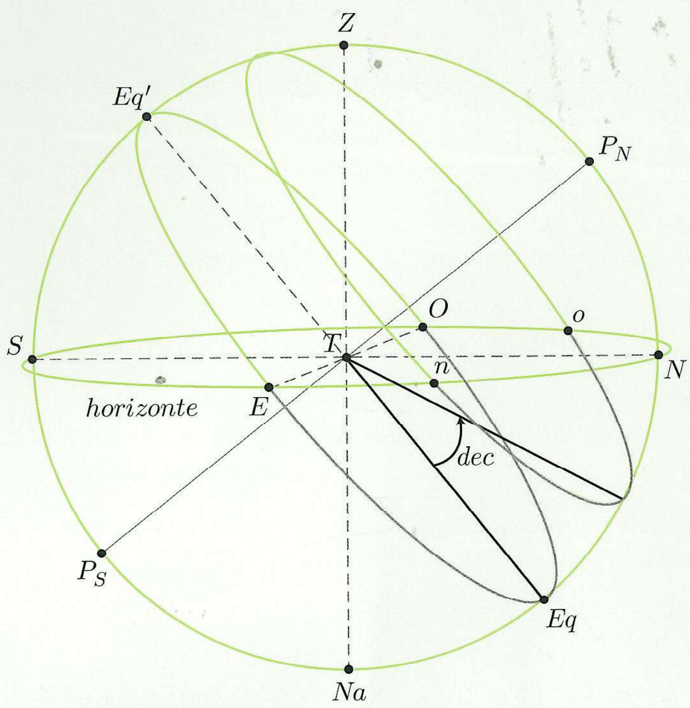

Figura 1.

ra 1 dá conta dessa nossa imaginária esfera celeste, em que a latitude escolhida (ângulo $Eq'TZ$) foi 38° — aproximadamente a de Setúbal. Acrescentámos na figura os pontos cardeais sobre o horizonte N, S, E, e O (pense o leitor um pouco como decidimos essa localização dos pontos cardeais). É certo que nós sabemos que a Terra não é o centro do Universo, que o Sol não se move em torno da Terra mas o contrário é que é verdadeiro, etc.. Mas, do ponto de vista matemático, essa verdade física não é muito importante, podemos abstrair do que não interessa, e neste caso a disputa entre o heliocentrismo ou o geocentrismo é-nos indiferente, o nosso modelo geocêntrico é mais conveniente e intuitivo e não vai afectar as conclusões. Sabemos também que as distâncias a que estão os astros da Terra pode ser muito diferente: a luz demora mais de 4000 anos a chegar à Terra quando vem da *Proxima Centauri* (estrela mais próxima da Terra se excluirmos o Sol) e apenas cerca de 9 minutos quando vem do Sol! Portanto, a esfera celeste está longe de ser uma esfera ... Mas a matemática e em particular o estudo das projecções centrais ajuda-nos a compreender que isso não tem importância, por assim dizer cada astro na esfera celeste é *mais uma direcção do que um ponto*. O astro pode estar mais perto ou mais longe, o que interessa para nós é a direcção de onde recebemos a sua luz! Portanto, se imaginarmos uma esfera em torno de nós com um raio de 10 metros, digamos, o ponto em que o raio de luz vindo de cada astro intersecta essa esfera pode ser para nós a *verdadeira* posição do astro. Ou seja, do ponto de vista do seu funcionamento, tanto dá considerar a esfera celeste de dimensão *infinita* ou considerá-la com 10 metros de raio. Matematicamente, do ponto de vista do movimento dos astros em torno de nós, é tudo equivalente. Mas devemos ter em conta um ponto importante, pois se o desprezarmos o modelo ficará inutilizável: não podemos considerar que o astro é uma *lâmpada* a 10 metros de distância, pois então os seus raios ao chegar à Terra num dado momento não seriam paralelos! Estando o astro, em particular o Sol, a enorme distância de nós, os seus raios num dado instante são todos paralelos entre si. Isto é fundamental para o que se segue.

A direcção do Sol, em cada momento, é dada pela recta que une o Sol na *esfera celeste* com o centro da esfera. Nesse momento, e em *qualquer outro ponto* da Terra, a luz do Sol tem a mesma direcção.

Precisamos também de compreender bem o movimento do Sol no modelo que estamos a utilizar. Devido ao movimento diurno de rotação da Terra (em torno do eixo P_NP_S), em cada dia o Sol descreve uma circunferência paralela ao equador celeste e centrada no mesmo eixo. Também é conhecido que, devido ao movimento de translação e à inclinação do eixo da Terra relativamente ao plano da sua órbita, essa circunferência varia ao longo do ano. Nos equinócios, o Sol descreve exactamente o equador celeste no sentido negativo (o dos ponteiros do relógio para quem olha do P_N para o equador: parte de Eq, passa por E, por Eq' e por O, voltando a Eq). Os equinócios ocorrem cerca do dia 21 de Março (equinócio da Primavera) e do dia 21 de Dezembro (equinócio do Inverno). Nesses dias a declinação do Sol (ângulo dec) é muito próxima dos 0° (ver figura 1). Como se compreende claramente na figura, o Sol nasce (passa para cima do horizonte) ao passar no ponto cardeal *Este* e tem o seu ocaso quando passa no ponto cardeal *Oeste*. Assim, nessa data, a noite é igual ao dia (daí a palavra equinócio). No solestício de Verão, que ocorre em 21 de Junho, o Sol tem cerca de 23,5° de declinação positiva e percorre no sentido negativo um paralelo celeste, representado na figura, e correspondente ao Trópico de Cancer. Como se depreende da figura, esse é o dia do ano em que o Sol está mais tempo acima do horizonte (nasce no ponto n e tem o seu ocaso no ponto o).

Portanto, *se imaginarmos um modelo de esfera celeste com 10 metros de raio* (o raio a escolher vai depender do espaço que vamos utilizar no pátio da ESE para traçar a elipse), o que vamos fazer na próxima secção é, usando a sua representação em duas vistas, mostrar como chegamos à elipse para mostrador do relógio analemático, e como marcamos as horas nessa elipse.

Traçado de um relógio analemático válido nos equinócios

Está claro que nós queremos um relógio válido para todo o ano, e não apenas para dois dias ... O que vamos fazer é descrever a construção e marcação de um relógio *em princípio* válido apenas para os equinócios e depois mostrar que, variando a posição do gnómon, ele será válido para todos os dias do ano.

Na figura 2 apresentamos os elementos fundamentais dessa construção e marcação (naturalmente feita num programa de geometria dinâmica, como o *Sketchpad*, modo ideal de compreender o que se passa). Seja em que dia for do ano, o Sol verdadeiro descreve uma circunferência em torno do eixo da esfera celeste, e portanto o ponto de partida que adoptámos foi construir em esquema essa circunferência (no topo da figura), marcar as horas (0 h a 24 h, com intervalos de 15°) e colocar um Sol (S_1) a rodar em sentido retrógado (para quem esteja a ver essa rotação a partir do Pólo Norte celeste). Para fixar ideias, a posição de S_1 indica que, em termos de Sol verdadeiro, estamos neste momento entre as 9 e as 10 horas da manhã, digamos 9 h 40 min. A figura inclui também a vista de frente (a meio) e a planta (projecção no plano do horizonte) da tal esfera celeste com 10 metros de raio. Observe bem as duas figuras e compare-as com a vista em perspectiva cavaleira da figura 1 (na figura 2 também a latitude do lugar considerada é 38° N). Identifique na vista de frente os pólos celestes e o equador celeste, o Zénite e o Nadir, o horizonte celeste, um paralelo de declinação (dd'), e os paralelos de declinação correspondentes aos solestícios de Verão (declinação positiva máxima do Sol, $\delta \approx 23{,}5°$) e de Inverno (declinação negativa mínima do Sol, $\delta \approx -23{,}5°$) — estes paralelos são identificados pelas designações Can e Cap pois correspondem aos trópicos de Cancer e Capricórnio na Terra. A circunferência na vista de frente é o meridiano celeste do lugar (círculo máximo passando pelo Zénite e pelos pólos). Em planta apenas estão representados o horizonte (uma circunferência) em verdadeira grandeza, sobre ele os respectivos pontos cardeais N, S, E e O, e ainda a projecção do equador celeste sobre o horizonte — uma elipse que vai ser o mostrador do relógio analemático a construir no pátio da ESE. Como se transfere a posição do Sol e das horas da circunferência inicial para a elipse final?

1. o ângulo correspondente à posição S_1, indicado a sombreado, transfere-se para a circunferência exterior da vista de frente, marcando-o também em sentido directo a partir do ponto Eq. Note-se que estamos no equinócio, o Sol está a percorrer o equador celeste e a circunferência exterior pode representar também (além de ser como já dissemos o meridiano celeste) o equador rodado de 90° em torno do segmento $EqEq'$, e assim tem sentido marcar-se aí o ângulo, também indicado a sombreado. Obtemos assim o ponto S_2.
2. por meio de uma perpendicular ao segmento $EqEq'$ tirada por S_2, obtém-se a posição do Sol sobre o equador celeste visto de frente, seja S_3;
3. finalmente, transfere-se a posição do Sol S_3 para a planta (por meio de uma linha auxiliar vertical não representada na figura), e obtém-se assim o Sol S_4 sobre a elipse.

No documento Sketchpad correspondente à figura 2 (de que pode fazer o download em `www2.apm.pt`), se arrastar o ponto S_1 na circunferência inicial, simulando a rotação do Sol em torno do eixo da esfera celeste, poderá ver o movimento resultante do Sol sobre o equador celeste, tanto na vista de frente como na planta, ou seja, do ponto S_4 sobre a

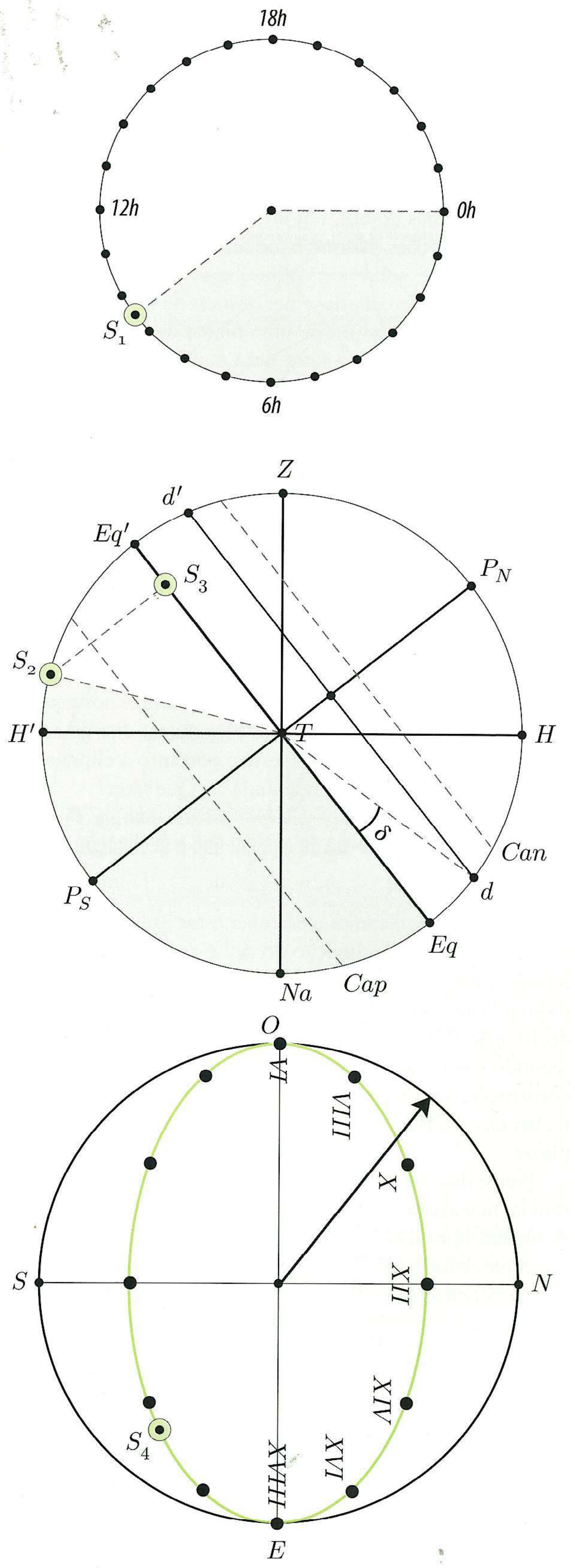

Figura 2.

elipse. Note que o nascimento do Sol se dá quando na vista de frente o Sol passa para cima do horizonte, e isso ocorre precisamente no ponto cardeal E (ver isto na planta da esfera celeste). O transporte das marcas das horas (da circunferência inicial para o mostrador elíptico) faz-se exactamente pelo mesmo processo, repetindo a construção para cada marca. As marcas obtidas na elipse correspondem, no entanto, às posições do Sol, e nós queremos ver as horas através das intersecções da sombra de um gnómon, colocado no centro da elipse, sobre a própria elipse. Por isso as marcações das horas sobre a elipse necessitam de mais um quarto passo — obtida a posição de uma marca de hora pelos três passos anteriores, há que fazer uma meia-volta (rotação de 180°) em torno do centro da elipse para obter a marca final da hora sobre a elipse. Para a posição do Sol às 9 h 40 min, a seta indica a sombra do gnómon e as horas são lidas na intersecção da seta com a elipse. Sobre esta, na figura, apenas marcámos algumas horas para não sobrecarregar a figura.

Como se pode agora perceber, traçar uma elipse no chão, marcar sobre ela as horas do dia e utilizar a intersecção com a elipse da sombra de um gnómon (ou mesmo de uma pessoa) para saber que horas são dá algum trabalho, mas teoricamente não tem nada de transcendente. Simplesmente, a solução que encontrámos e a construção que fizemos apenas é válida para dois dias do ano, correspondentes aos equinócios da Primavera e do Outono ... Nos outros dias do ano, o Sol não percorre o equador celeste e portanto a elipse a traçar seria outra (uma para cada dia!) ... Que fazer?

Análise da situação num dia do ano em que a declinação do Sol não seja 0

Hoje, dia em que estamos a escrever estas linhas, é 20 de Julho (de 2006) e a declinação do Sol é cerca de 20°. Vamos refazer a figura 2 para comparar a direcção das sombras, à mesma hora, entre um Sol nesta declinação e um Sol com declinação 0. Como a figura 2 já nos dá essa direcção no segundo caso, vamos sobre essa figura (simplificada sem as construções anteriores) traçar a direcção da sombra no primeiro caso. Obtemos assim a figura 3, que passamos a explicar.

Neste dia, o Sol está a percorrer também uma circunferência, mas agora trata-se do paralelo de declinação 20°, dd'. À mesma hora da figura 2, às 9 h 40 min, a sua posição sobre o paralelo de declinação encontra-se de modo análogo ao que fizemos para o Sol sobre o equador celeste, servindo-nos agora da circunferência a tracejado, que representa em verdadeira grandeza o paralelo de declinação. Obtemos assim a posição do Sol S_3'. Ou seja, se olharmos para o céu a essa hora veremos o Sol nessa posição. Podemos então imaginar um círculo máximo, passando pelo Zénite, pelo Nadir e pelo Sol (chamado círculo de alturas do Sol e na figura representado por uma elipse na vista de frente) e imaginar também a sua intersecção A com o horizonte. Se transportarmos o ponto A para a circunferência, que em planta representa o horizonte, obtemos o ponto B. Podemos então traçar a direcção das sombras a essa hora relativas ao Sol

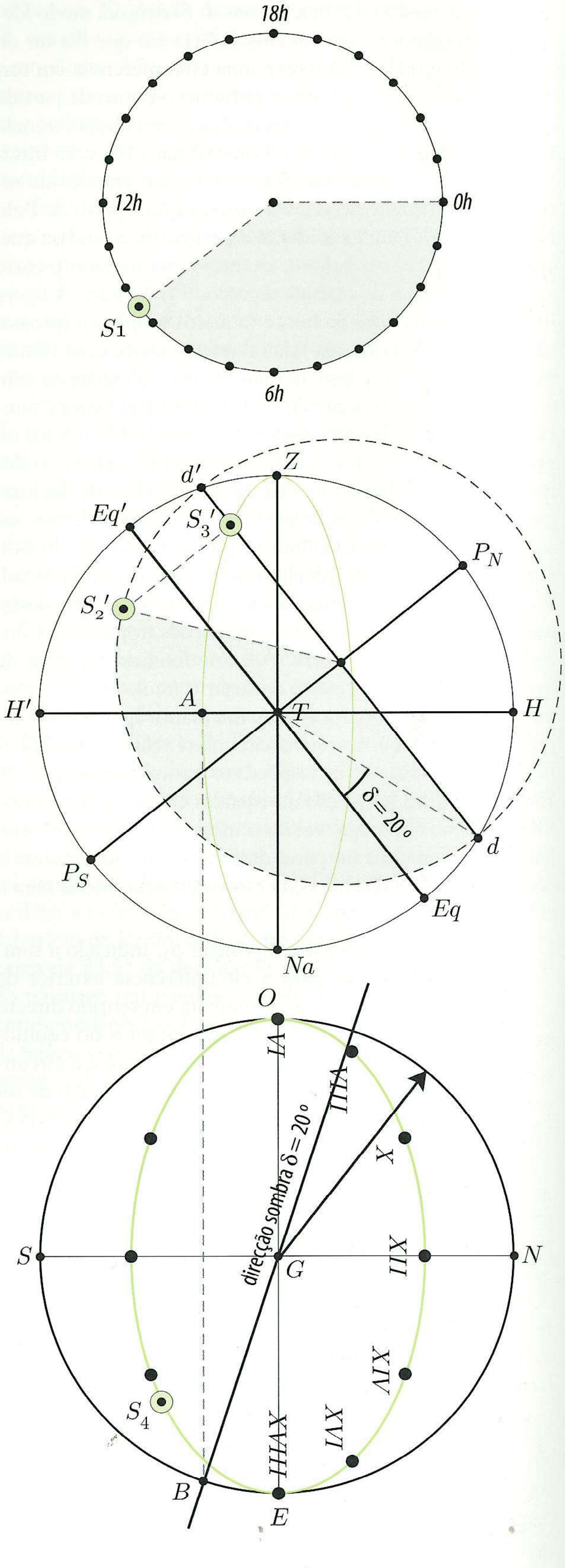

Figura 3.

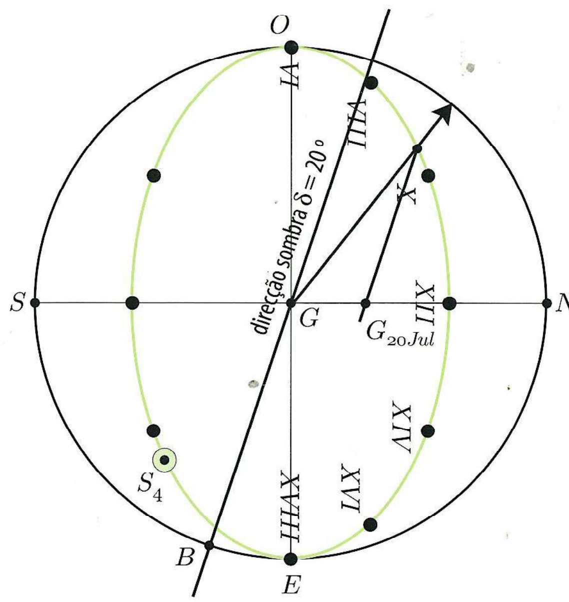

Figura 4.

com declinação igual a 20° e ver que *se usássemos um gnómon situado no centro da elipse*, como fizemos para o Sol no equinócio, a hora obtida *com a mesma graduação* seria muito errada — onde antes tínhamos 9 h 40 min, agora ainda não seriam 8 da manhã …

Para obter a mesma intersecção com a elipse, e obter a mesma hora, dado que as sombras de gnómons paralelos são paralelas, o gnómon deveria estar mais para a direita, no ponto $G_{20\mathrm{Jul}}$ (o que significa posição do gnómon para ver as horas no dia 20 de Julho!) da figura 4. Esse ponto foi obtido tirando pela hora pretendida uma paralela à direcção da sombra do Sol ($\delta = 20°$) e intersectando-a com o semi-eixo menor da elipse. Mas se o leitor está a seguir com atenção esta descrição, certamente levantará algumas questões: isso é válido para uma certa hora, será válido ao longo do dia, para as outras horas? Além disso, poderemos afirmar que as horas marcadas sobre a elipse (e que, recordemos, se referem ao Sol no equinócio) *continuam a valer para outros dias em que a declinação seja diferente de zero?* Se o leitor tem possibilidade de experimentar o documento *Sketchpad* citado, constará experimentalmente que isso é verdade durante todo o dia 20 de Julho, desde que coloquemos o gnómon no ponto $G_{20\mathrm{Jul}}$: arrastando o ponto S_1, e variando assim as horas ao longo do dia, obtemos sempre pela construção da figura 4 o mesmo ponto $G_{20\mathrm{Jul}}$. Pode ainda constatar que isto é verdade qualquer que seja o dia do ano. Ou seja, existe uma posição do gnómon para cada dia do ano, tal que, se for utilizada, a elipse feita para o equinócio e com as horas marcadas para esses dois dias do ano serve também para o resto do ano.

No ponto seguinte, explicaremos este facto.

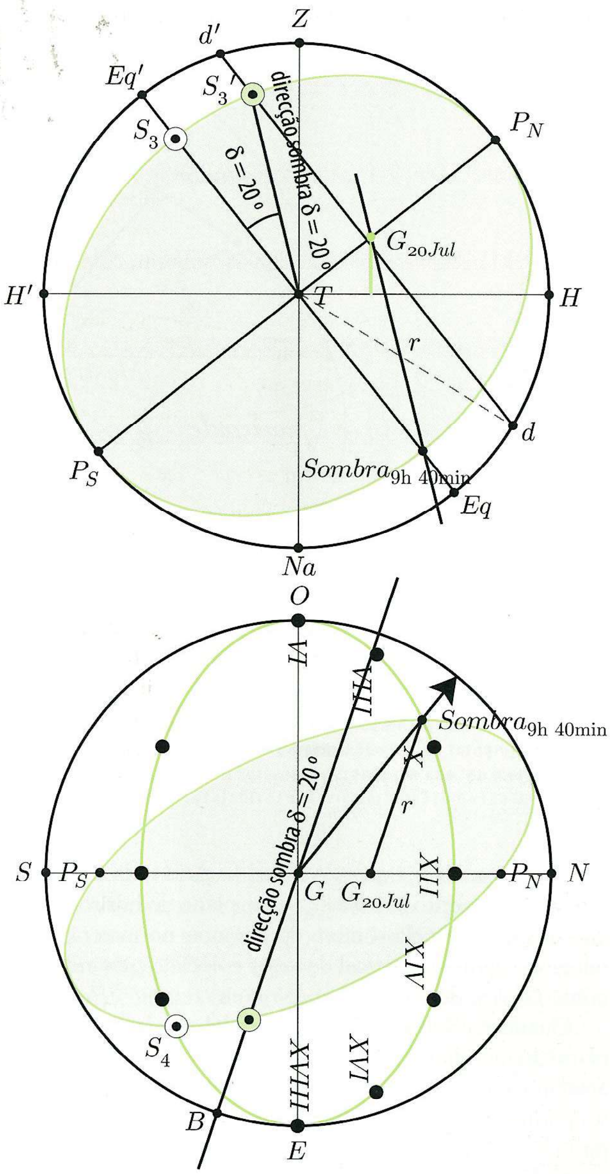

Figura 5.

Sobre a localização do gnómon

Observe agora, na vista de frente da figura 5, a mesma construção que fizemos na planta, ou seja, no plano do horizonte, na figura 4. Consideremos agora o plano do meridiano celeste do Sol, que contém os pólos celestiais (P_N, P_S), o Sol à hora a que nos referimos (S'_3) e o Sol equinocial à mesma hora (S_3). O plano do meridiano, representado pelas elipses sombreadas nas duas vistas, não está em verdadeira grandeza em nenhuma das vistas, é um plano que roda 360° em torno do eixo $P_N P_S$ durante o dia, levado pelo movimento do Sol no paralelo, e só fica de frente para o observador às 0 e 12 horas. É nesse plano que está a recta que nos dá a direcção da sombra no dia 20 de Julho às 9 h 40 min (S'_3T) e a recta r, paralela a essa direcção passando pelo ponto do equador que corresponde à sombra à mesma hora ($Sombra_{9\,h\,40\,min}$) no dia

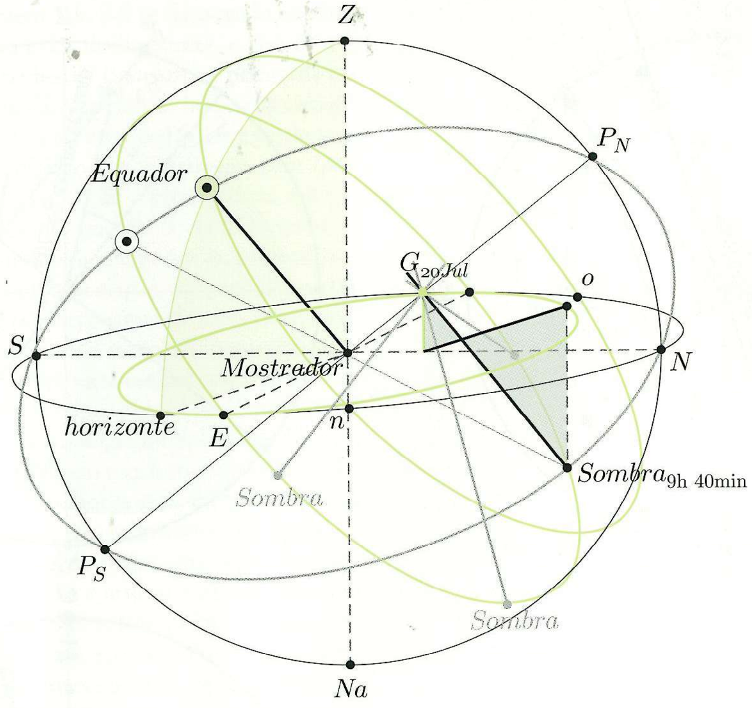

Figura 6.

do equinócio, ou seja quando a declinação é nula. Como é a projecção do ponto $Sombra_{9\,h\,40\,min}$ no plano do horizonte que vai ser indicada pela sombra do gnómon no mostrador do relógio, o gnómon vertical deve ser colocado passando pelo ponto $G_{20\text{Jul}}$, de intersecção de r com o eixo $P_N P_S$.

Quando o Sol se desloca no paralelo de latitude 20°, o plano do meridiano roda em torno do eixo $P_N P_S$ e o ponto *Sombra* vai percorrer o equador. As rectas r, traçadas por esses pontos, mantêm a inclinação de 20° e, por isso, vão gerar uma superfície cónica de vértice em $G_{20\text{Jul}}$ que tem por curva directriz o equador. O ponto onde deve ser colocado o gnómon vertical é, portanto, invariante para cada valor da declinação do Sol. Na prática, consideramo-lo invariante para cada dia do ano, porque consideramos que, em cada dia, o Sol percorre um paralelo ao equador celeste. No mostrador do relógio vão ficar assinaladas datas, com intervalos iguais, por exemplo, de 10 em 10 dias, para colocação do gnómon, o que já nos dá uma aproximação bastante aceitável.

Na figura 6 pode ver em perspectiva a ilustração da explicação que acabámos de fazer para a posição do gnómon.

Nota histórica

Até ao fim da Idade Média, na Europa, a duração de cada hora dependia da estação do ano, uma vez que a duração do dia-luz, isto é, do nascer ao pôr do sol, era dividida em doze partes iguais, tanto no Inverno como no Verão.

No fim da Idade Média apareceram os relógios solares com gnómon paralelo ao eixo polar (trazidos provavelmente pelos cruzados, dado o seu contacto com os árabes), que permitiram a definição da hora verdadeira — correspondente a um ângulo de 360° : 24 = 15° no movimento aparente do Sol. Surgiram assim novas técnicas de construção de relógios de Sol, mais sofisticadas, que possibilitaram a leitura directa da hora verdadeira. É o caso dos relógios designados por analemáticos, que envolvem conhecimentos aprofundados do modelo do movimento do Sol na esfera celeste, e de geometria projectiva, e permitem a leitura da hora com uma precisão excepcional.

Não se sabe quem inventou este tipo de quadrante solar. O relógio analemático mais antigo de que se tem conhecimento é o da catedral de Brou, em Bourg-en-Bress, França. A data de construção é desconhecida, mas terá sido certamente na primeira metade do século XVI. Os textos mais antigos sobre este tipo de relógio solar são do matemático francês Vaulezard e datam de 1640 e 1654, mas foi Lalande, astrónomo nascido em Bourg-en-Bress no século XVIII, que, preocupado com o estado de deterioração do relógio da catedral de Brou, o restaurou por sua conta, e apresentou à Academia de Ciências uma comunicação sobre o traçado e a justificação do relógio analemático, como sendo "uma das mais complicadas de toda a Gnomónica" (Lalande, 1757, citado por Sawyer III).

Não se sabe grande coisa acerca da origem do nome *analemático* atribuído a estes quadrantes solares. O termo analema tem tido vários significados ao longo da História, e há várias justificações plausíveis para estar associado a este tipo de relógio de sol. Para o arquitecto e engenheiro militar ro-

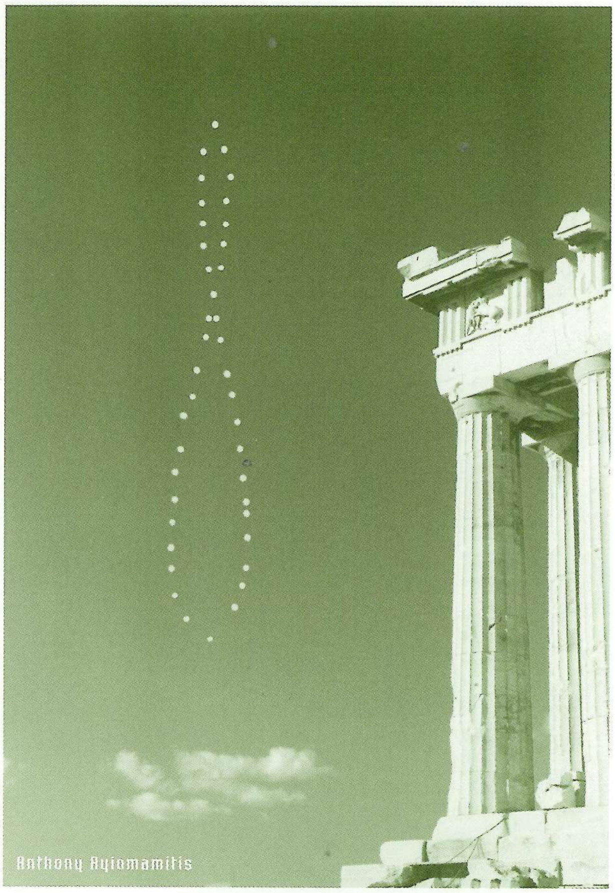

Figura 7. Esta imagem de um analema foi cedida à E&M por Anthony Ayiomamitis, que fez uma montagem de 41 fotografias tiradas na Grécia, junto ao Partenon, durante um ano, ao meio dia. http://jedi.hq.usra.edu/archive/epodviewer.php3?oid=123104.

mano Vitrúvio, no seu tratado *De Architectura* (séc. I a.C.), "O analema é um processo cuidadosamente procurado no curso do Sol e encontrado pela observação da sombra em crescendo até ao solestício de Inverno, pelo qual é possível descobrir o funcionamento da abóbada celeste, através de cálculos arquitectónicos e traçados de compasso". Também Ptolomeu escreveu, no séc. II, o livro *De Analemmata*, em que desenvolvia os métodos de projecção da esfera celeste num plano. Alguns intérpretes destas obras afirmam que Vitrúvio e Ptolomeu designavam por *analema* o método que hoje se designa por projecção ortográfica, que estaria na base da construção da generalidade dos relógios de sol na antiguidade, e que posteriormente foi aplicado, por Vaulezard e Lalande, entre outros, no traçado do relógio analemático.

A partir do século XVIII até à actualidade, a palavra *analema* passou a designar uma curva em forma de 8 que é uma representação gráfica da equação do tempo — isto é, da diferença entre a hora verdadeira e a hora média. Essa curva pode ser obtida de várias maneiras: por exemplo, fotografando o Sol, sempre à mesma hora (hora média, dos relógios actuais), todos os dias de um ano; ou marcando a sombra do extremo de um gnómon vertical, ao longo do ano, sempre à mesma hora também. Por isso, a curva designada por *analema* começou a aparecer no design de vários relógios de sol, com o objectivo de permitir a leitura directa da hora média, embora sem grande sucesso, ou apenas como elemento decorativo.

O célebre relógio de Brou, quando foi restaurado por um artesão amador da gnomónica, em 1902, *ganhou* um analema no eixo menor da elipse. Talvez tenha sido este facto que resultou na crença de que posicionando o gnómon na curva e não no eixo menor, se poderia ler directamente a hora média na elipse. Talvez seja por isso que o relógio se designa por analemático. Mas a verdade é que a introdução desta curva no mostrador não tem qualquer justificação científica, introduz até um erro considerável.

Bibliografia

Gayá, Rafael Soler. *Diseño y Construcción de Relojes de Sol y de Luna — Métodos Gráficos e Analíticos*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

Rohr, René R.J. *Sundials: History, Theory and Practice*. New York: Dover, 1996.

Sawyer III, Frederick W. *Of Analemmas, Mean Time and the Analemmatic Sundial*, Bulletin of the British Sundial Society, Junho de 1994, 94(2), p. 2-6, e Fevereiro de 1995, 95(1), p. 39-44.

Vitrúvio. Tratado de Arquitectura. Lisboa, IST Press, 2006.

Sítios na Internet

The North American Sundial Society — `http://sundials.org/`

Earth Science Picture of the Day — `http://epod.usra.edu/`

Rita Bastos

Eduardo Veloso