Na carruagem do comboio

Outro dia fui de Lisboa ao Porto de comboio numa carruagem de 100 lugares. Tinha como companheiros vários homens e várias mulheres. O comboio fez quatro paragens e fui reparando em quem entrava e saía.

Em Santarém desceram um terço dos passageiros e entraram dois homens. No Entroncamento, saíram novamente um terço dos presentes e entraram mais dois homens. Em Coimbra, também ficaram um terço dos passageiros e entraram dois homens. Finalmente, em Aveiro desceram um terço dos viajantes e entraram dois homens.

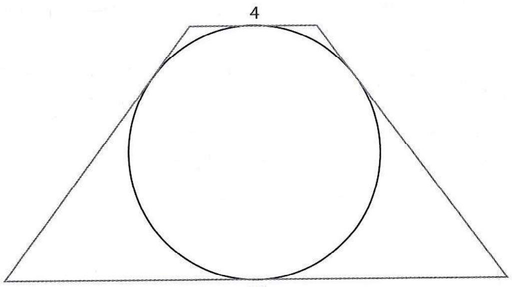
Olhei à volta e, contando comigo; já só havia homens na carruagem. Quantos eram eles?

(Respostas até 30 de Setembro)

Uma circunferência no trapézio

No número 86 de *Educação e Matemática* propusemos um problema e, para além dele, uma investigação suplementar para os mais entusiastas.

Problema



Uma circunferência é tangente aos quatro lados de um trapézio isósceles.

As bases do trapézio medem 4 e 16 cm.

Qual é a medida do raio da circunferência?

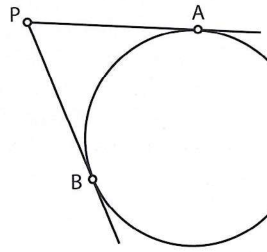
Tivemos 10 respostas: Ana Luísa Correia (Lisboa), Daniel Castanho, Edgar Martins (Queluz), Francisco Branco (Ovar), Francisco Estorninho (Lisboa), Francisco Martins (Charneca da Caparica), Graça Braga da Cruz (Ovar), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Rita Bastos (Lisboa) e Tiago Dias (Coruche).

As resoluções apresentadas foram variadas. Por exemplo, o Pedrosa usou a mediana do trapézio e o teorema de Tales, o Francisco Estorninho utilizou a geometria analítica, o Tiago, o Edgar e o Francisco Martins basearam-se na semelhança de triângulos, a Graça e o Francisco Branco foram pela trigonometria e o Daniel enveredou profundamente pela geometria dinâmica no computador com o programa GSP.

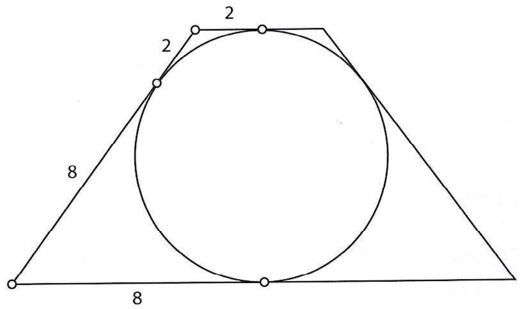
1ª resolução

A abordagem que nos parece mais simples foi a utilizada pela Rita e pelo Edgar (na sua segunda resolução).

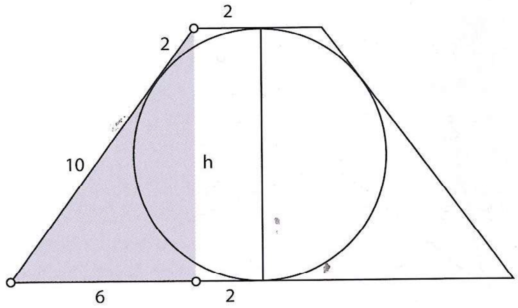
A propriedade principal utilizada na resolução deste problema é o facto de serem congruentes os dois segmentos definidos nas tangentes a uma circunferência tiradas por um ponto exterior. No caso da figura, $\overline{PA} = \overline{PB}$. (Rita)



Aplicamos esta propriedade e o facto de o trapézio isósceles ter um eixo de simetria que divide as bases ao meio:



Consideramos o triângulo sombreado:



Aplicamos finalmente o teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 10^2 - 6^2 \text{ ou } h = 8.$$

Logo, o raio da circunferência mede 4 cm.

2ª resolução

A Graça apresentou uma segunda resolução. Provou e depois usou uma propriedade (conhecida dos geómetras): num quadrilátero convexo que admite uma circunferência inscrita, as somas dos comprimentos dos lados opostos são iguais. Logo, os dois lados não paralelos somam $4 + 16 = 20$ cm.

Então, cada um destes lados tem 10 cm. Tal como na resolução anterior, basta agora aplicar o teorema de Pitágoras.

Generalização

O Francisco Martins e a Ana Luísa foram um pouco mais longe e chegaram à formula que dá o raio em função das bases b e B de um trapézio isósceles qualquer:

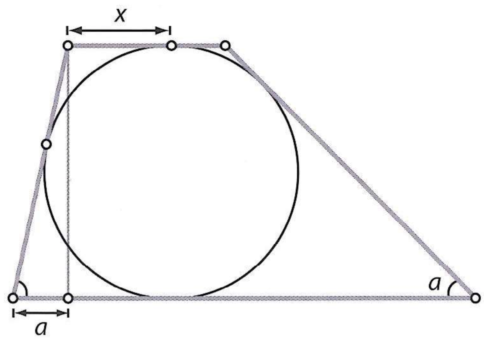
$$r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b \cdot B}$$

Investigação suplementar

Que aconteceria se o trapézio não fosse isósceles?

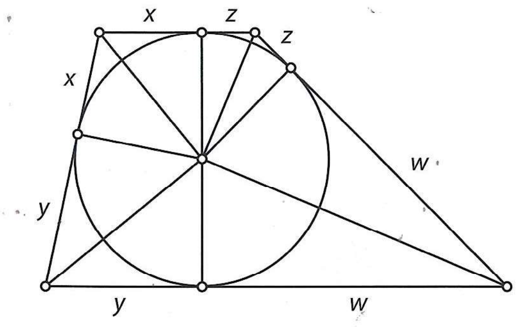
Não estávamos à espera de tantas respostas a esta generalização nada fácil, mas os problemas de geometria têm o condão de entusiasmar muita gente.

A primeira dificuldade é que um trapézio escaleno com uma circunferência inscrita e do qual são conhecidas as bases não fica completamente definido. Torna-se necessário portanto encontrar uma fórmula que dê o raio da circunferência em função não apenas das duas bases mas também de um outro elemento do trapézio.



A Graça escolheu um dos ângulos a da base maior, o Pedrosa os dois ângulos da base, o Francisco Martins o comprimento a, a Rita e a Ana Luísa o comprimento x.

Vejamos a resolução da Ana Luísa.



Acho que vou começar por observar relações num trapézio qualquer que admita uma circunferência tangente aos quatro lados. Em primeiro lugar os pontos de tangência nas bases são extremos de um diâmetro (por um ponto só passa uma perpendicular a duas rectas paralelas). Em segundo lugar o centro da circunferência situa-se sobre a bissectriz de qualquer dos ângulos internos (porque é equidistante dos lados) donde se conclui a igualdade, dois a dois, dos 8 triângulos em que fica dividido o trapézio. Daí os segmentos assinalados na figura com a mesma letra serem geometricamente iguais.

Sendo r o raio da circunferência inscrita, a aplicação do teorema de Pitágoras aos triângulos em que dividimos o trapézio permite concluir que

$$r^2 = xy = zw.$$

Se o trapézio for rectângulo, torna-se evidente que

$$z = w \text{ e } r = z.$$

Da resolução do sistema

$$r^2 = zw, z = b - r \text{ e } w = B - r$$

conclui-se que

$$r = \frac{bB}{b + B}.$$

Conhecidas então as bases b e B, podemos concluir que, tal como para os trapézios isósceles, existe um único trapézio rectângulo que admite uma circunferência tangente aos quatro lados.

Se forem dados apenas os comprimentos das bases existem infinitos trapézios que admitem circunferência tangente aos quatro lados. Teremos que acrescentar mais uma condição para tornar o problema de solução única. Uma hipótese será definir o valor de x. Virá então:

$$r^2 = xy = zw, z = b - x \text{ e } w = B - y$$

Daqui deduzimos a relação

$$r^2 = \frac{xB(b - x)}{b}$$

Este problema deu-me imenso prazer. Tentei escrever o menos possível porque as demonstrações com todos os pormenores levariam muitas páginas. Espero que se perceba tudo.

Só mais uma coisa: Podemos também definir apenas uma base, o valor de x nessa base e a altura do trapézio. Ficará depois determinada a outra base. Este foi o processo que me pareceu mais fácil para desenhar no *sketchpad*. Mando também um anexo com esse ficheiro. Pena que a revista não seja dinâmica. Na verdade, estando on-line, podia lá ser posta qualquer coisa dinâmica, não é?