O grupo de trabalho de geometria da APM tem vindo a discutir, já há alguns anos, várias questões relacionadas com o ensino da geometria. No sentido de partilhar e debater as suas ideias com outros professores de Matemática, decidiu iniciar a publicação de algumas notas, escritas por elementos do grupo ou não, mas que já foram debatidas no seu seio e reflectem, portanto, posições assumidas pelo GTG. Estas notas não pretendem ser exaustivas nem têm uma organização sequencial. É natural, portanto, que sejam muitas vezes notas curtas e que sobre o mesmo assunto se venham a publicar várias, de diversos autores.

A ideia de simetria é uma das mais ricas em matemática e, em particular, na geometria. No entanto, os contactos que tenho tido com professores em várias situações têm-me mostrado que essa ideia nem sempre é muito clara e traz frequentemente consigo muitas confusões. Foi por isso que decidi escrever aqui sobre o conceito de simetria e o seu tratamento nos currículos do ensino básico e secundário.

Do que é que estamos a falar quando falamos de simetria? Por exemplo, quando falamos das simetrias dos gráficos de algumas funções, dos eixos de simetria de algumas figuras, ou dos centros de simetria de outras? Todos nós temos presente, com certeza, que a ideia de simetria está de algum modo associada às transformações geométricas, designadamente às isometrias. Mas a simetria de uma figura é algo mais do que uma transformação geométrica. Uma das confusões, que é muito habitual, deve-se ao facto de, em português, se terem adoptado as designações simetria axial e simetria central para as transformações geométricas que deveriam antes chamar-se reflexões, meias voltas (no plano) ou inversões (no espaço), como é, aliás, proposto por alguns autores e pelo Grupo de Trabalho de Geometria há já alguns anos.

Um primeiro aspecto, que podemos desde já estabelecer, é que quando falamos de simetria, estamos a falar de simetria de uma figura. E aqui abro um parênteses para esclarecer que quando utilizo a palavra figura ela significa "um subconjunto de pontos" do plano ou do espaço, conforme o contexto em que nos encontramos a trabalhar — plano ou espaço. Sendo assim, poderemos falar de simetria, ou simetrias, de uma recta, de um rectângulo, de uma esfera ou de um dodecaedro rômbico, por exemplo, mas também de um desenho artístico ou de uma escultura, desde que entendidos como

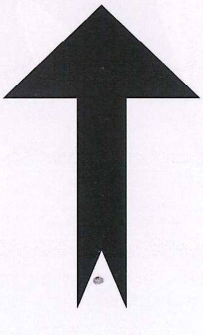

Figura 1.

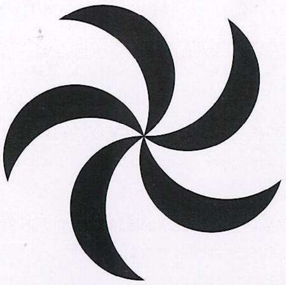

Figura 2.

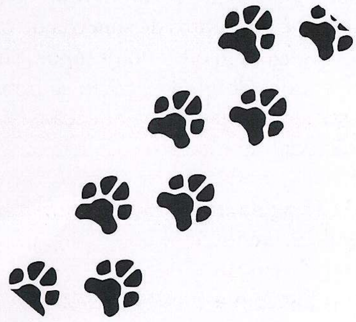

Figura 3.

subconjuntos de pontos do plano, no primeiro caso, ou do espaço, no segundo. Neste texto, vamos tratar apenas de simetria de figuras do plano.

Comecemos por analisar as figuras 1, 2 e 3. Em qualquer delas reconhecemos algum tipo de regularidade ou de repetição, que normalmente designamos, em linguagem corrente, por simetria. Mas é necessário que entre nós, professores, procuremos uma definição matemática mais rigorosa, que nos permita classificar as figuras quanto às suas simetrias, sem ambiguidades. Só assim podemos trabalhar o conceito com os nossos alunos, mesmo com os mais novos, sem os induzir em ideias incorrectas.

A figura 1 tem um eixo de simetria porque se fizermos uma reflexão do plano segundo esse eixo, a figura é transformada nela própria, embora cada ponto da figura seja, em geral, transformado num outro ponto. O ponto A (figura 1a) é transformado no ponto B pela reflexão segundo o eixo e, mas o conjunto de pontos que constitui a figura fica globalmente invariante para a reflexão (do plano) segundo o eixo e. Dizemos então que a figura tem uma simetria de reflexão, de eixo e, ou que a reflexão de eixo e é uma simetria da figura.

A figura 2 não tem eixos de simetria porque não existe nenhuma recta que seja eixo de uma reflexão do plano que deixe a figura invariante. Esse facto pode ser observado com a ajuda de um espelho ou, ainda melhor, de uma mira, ou ainda por decalque da figura num papel vegetal que depois é virado ao contrário — em nenhum dos casos conseguimos sobrepor a figura original e a transformada, porque esta (na figura 2a, um exemplo a cinzento) fica invertida relativamente à original.

Mas a figura 2 tem simetrias de rotação, isto é, se fizermos uma rotação do plano com centro no ponto O e ângulo de 72° (ou 144°, ou 216°, ou 288°, ou ainda 360°), a figura transformada é exactamente a mesma que a original. Dizemos, por isso, que as rotações de centro O e ângulos 72°,

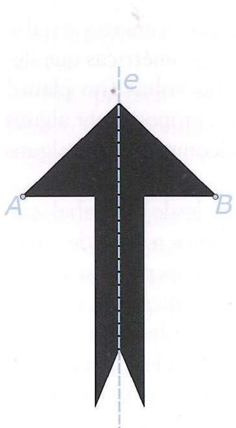

Figura 1a.

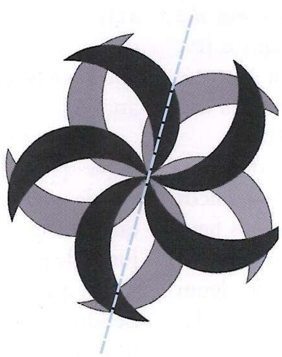

Figura 2a.

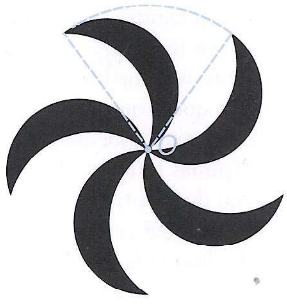

Figura 2b.

144°, 216°, 288° e 360° são simetrias da figura, ou que a figura tem 5 simetrias de rotação com centro em O, ou ainda que O é um centro de simetria de ordem 5.

A figura 3, que vamos supor prolongada indefinidamente para os dois lados, como se o rasto de pegadas continuasse sempre na mesma direcção, não tem simetrias de reflexão nem de rotação. Mas tem simetrias de translação, isto é, se fizermos uma translação do plano segundo o vector AB, a figura, no seu conjunto, é transformada nela própria, embora nenhum ponto da figura seja invariante para essa transformação.

Também a translação segundo o vector BA (figura 3a) é uma simetria da figura 3, assim como todas as translações segundo vectores múltiplos destes. E há ainda outras isometrias que são simetrias da figura, mas que deixarei para outra ocasião ...

Posto isto, estamos em condições de chegar a uma definição de simetria de uma figura do plano: Simetria de uma figura F é uma isometria T do plano que deixa a figura invariante, isto é, tal que $T(F) = F$.

Mas que interesse poderá ter este conceito, de simetria, nos ensinos básico e secundário? Que actividades poderemos propor aos alunos, nos vários níveis, sobre simetria?

O estudo das simetrias das figuras constitui uma aplicação muito interessante das isometrias que permite desenvolver o conhecimento matemático destas transformações geométricas e fornecer, consequentemente, ferramentas que podem ser muito úteis na resolução de problemas geométricos. São conhecidos os problemas da mesa de bilhar, da determinação do caminho mais curto entre dois pontos que têm pelo meio um rio, e muitos outros que se resolvem facilmente com recurso às isometrias. O hábito de resolver problemas com recurso às transformações geométricas não está muito enraizado, mesmo entre nós, professores, mas estas são um instrumento valioso, como iremos tentar mostrar-vos nesta secção da revista.

O conceito de simetria pode ser também a base para actividades de descrição e classificação de figuras geométricas, de argumentação/demonstração ou, em níveis mais adiantados, de construção de figuras. São exemplos de actividades desse tipo o tratamento dos polígonos regulares como figuras geradas por livros de espelhos, ou seja por reflexões, a classificação dos quadriláteros quanto às suas simetrias, a construção dos polígonos regulares inscritos numa circunferência, ou de frisos e padrões por iteração de um conjunto de isometrias geradoras dessas figuras.

A análise de objectos artísticos ou de cristais através das suas simetrias são actividades que estabelecem ligações entre a matemática e outros domínios do saber, podendo ser o ponto de partida para projectos interdisciplinares onde a matemática, em geral, e a geometria, em particular, assumem papéis importantes.

Há, no entanto, alguns cuidados a ter, se não quisermos entrar por caminhos perigosos: um deles tem a ver com o uso da cor. A nossa geometria é monocromática enquanto a maior parte dos objectos artísticos que mais nos atraem usam muitas cores. A própria definição de figura, que estabelecemos mais acima, não tem sentido quando há pontos de várias cores, isto é, pontos de vários tipos — normalmente usamos apenas uma cor para distinguir os pontos que pertencem a uma figura dos que não pertencem. A análise de figuras monocromáticas quanto às suas simetrias já é suficientemente rica, do ponto de vista matemático, por isso devemos evitar figuras como a 4, em que não é fácil decidir se a rotação de centro em O e amplitude 30° é uma simetria da figura.

Onde reside a riqueza matemática do estudo da simetria no plano ou no espaço? Esse assunto ficará para outras Notas, em que veremos que o conjunto das simetrias de uma figura tem uma estrutura muito especial e que, embora a criatividade não conheça limites no que respeita à produção de figuras, artísticas ou não, podem *contar-se pelos dedos* os conjuntos de simetrias possíveis ...

Rita Bastos
Grupo de Trabalho de Geometria da APM

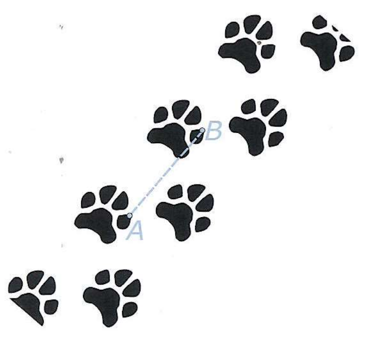

Figura 3a.

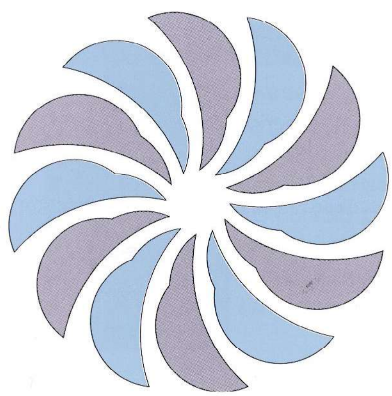

Figura 4.